Математика та механіка

УДК 517.948.34

УСЕРЕДНЕННЯ В СИСТЕМАХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПОДВІЙНОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

С. С. Гулька
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15; тел.+380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

Застосовується метод усереднення Крилова-Боголюбова-Митропольського в поєднанні з методом ітерацій до систем інтегро-диференціальних рівнянь з подвійною імпульсною дією.

Ключові слова: *система інтегро-диференціальних рівнянь, подвійна імпульсна дія, усереднення, похибка.*

У роботі розглядається поширення ідей усереднення в імпульсних системах, запропонованих А.М. Самойленком і М.О. Перестюком [1], у поєднанні з методом ітерацій на системи інтегро-диференціальних рівнянь з подвійною імпульсною дією.

Розглянемо систему виду

$$
\begin{aligned}
&x'(t) = \varepsilon F\left(t,\, x(t),\, \int_0^t K(t,\, s,\, x(s))ds + \sum_{0<s_j<t} J_j\left(x(s_j - 0)\right) \right), \quad t \neq t_i\,, \\
&\Delta x\big|_{t=t_i} = \varepsilon G_i(x)\,, \quad i\,, j = 0,\, 1,\, \ldots,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр,
функції $F(t,\, x,\, y)$, $K(t,\, s,\, x)$, $J_j(x)$, $G_i(x)$ визначені і неперервні в області $R = \{t\,, s \in [0,\, T],\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in D,\, y = (y_1\,, \ldots, y_m) \in D_1\}$,
D, D_1 – обмежені області евклідових просторів E_n і E_m відповідно,
$T = \varepsilon^{-1} L$, L – довільна стала.

Розв'язок системи (1) $x(t)$ задовольняє початковим умовам

$$x(0) = x_0\,. \tag{2}$$

Припустимо, що в області R визначені і неперервні функції $f(t, x, y)$, $k(t, s, x)$, $q_j(x)$, $g_i(x)$ разом із своїми похідними f'_x, f'_y, k'_x, q'_j, g'_i задовольняють умовам:

1) $$\left\| \left(F(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})\right) - \left(f'_x(t,\bar{x},\bar{y}) + f'_y(t,\bar{x},\bar{y})\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int_0^t k'_x(t,\bar{x},\bar{y})\,ds + \sum_{0<S_j<t} q'_j(\bar{x}) \right)(x-\bar{x}) \right\| \le \varepsilon \|x-\bar{x}\|,$$
$$\left\| \left(G_i(x) - g_i(\bar{x})\right) - g'_i(\bar{x})(x-\bar{x}) \right\| \le \varepsilon \|x-\bar{x}\|;$$

2) $$\left\| \left(f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})\right) \right\| \le L_1 \|x-\bar{x}\| + L_2 \|y-\bar{y}\|,$$
$$\left\| \left(k(t,s,x) - k(t,s,\bar{x})\right) \right\| \le L_3 \|x-\bar{x}\|,$$
$$\left\| \left(q_j(x) - q_j(\bar{x})\right) \right\| \le L_4 \|x-\bar{x}\|,$$
$$\left\| \left(g_j(x) - g_j(\bar{x})\right) \right\| \le L_5 \|x-\bar{x}\|,$$
$$m \le \|f(t,x,y)\| + \|g_i(x)\| \le M,$$

де M, m, L_p, $p = 1,\dots,5$ – додатні постійні.

Вважатимемо, що при $t, s \in [0,T]$, $i, j \le d$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sum\limits_{T<s_j<s+T} q_i(x)}{T} = q_0(x), \quad \lim_{T\to\infty} \frac{\sum\limits_{T<t_i<t+T} g_i(x)}{T} = g_0(x),$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t,x,y)\,dt = f_0(x,y), \tag{3}$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} k(t,s,x)\,ds = k_0(t,x).$$

Позначимо через $T(u)$ оператор

$$T(u) = f'_x\left(t, u(t), \int_0^t k(t,s,u(s))\,ds + \sum_{0<S_j<t} q_j\left(u(s_j - 0)\right)\right) +$$
$$+ f'_y\left(t, u(t), \int_0^t k(t,s,u(s))\,ds + \sum_{0<S_j<t} q_j\left(u(s_j - 0)\right)\right) \times \tag{4}$$
$$\times \left(\int_0^t k'_x(t,s,u(s))\,ds + \sum_{0<S_j<t} q'_j\left(u(s_j - 0)\right) \right).$$

Розглянемо систему рівнянь

$$z'(t) = \varepsilon\left[f_0(z(t)), \int_0^t k_0(t, z(s))\,ds + t q_0(z) + g_0(z) \right],$$
$$\alpha'(t) = \varepsilon T(z)\alpha(t), \tag{5}$$

$$t \neq t_i, \quad \Delta\alpha\big|_{t=t_i} = \varepsilon g_i'(z)\alpha$$

з початковими умовами

$$z(0) = x_0, \ \ \alpha(0) = 0.$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови (1), (2), (3) і, крім цього,

$$\|F(t,x,y)\| + \|G_i(x)\| \leq N,$$

$$\|T(u)\| \leq P, \ \ \|T(u+\varepsilon^2) - T(u)\| < \varepsilon.$$

Тоді розв'язок задачі (1), (2) з точністю до ε^2 можна подати у вигляді:

$$x(t) = z(t) + \alpha(t), \tag{8}$$

де $z(t)$, $\alpha(t)$ характеризують відповідно плавну і розривну частини розв'язку.

Доведення. Одночасно із задачами (1),(2),(5),(6) розглянемо задачі

$$\begin{aligned} & u'(t) = \varepsilon f\left(t,u(t)\right), \int_0^t k\left(t,s,u(s)\right)ds + \sum_{0<S_j<t} q_j(u), \\ & t \neq t_i, \quad \Delta u\big|_{t=t_i} = \varepsilon g_i(u), \\ & v'(t) = \varepsilon T(u) v(t), \\ & t \neq t_i, \quad \Delta v\big|_{t=t_i} = \varepsilon g_i'(u) v, \end{aligned} \tag{9}$$

з початковими умовами

$$u(0) = x_0, \ \ v(0) = 0. \tag{10}$$

Позначивши $\delta = \|x - (u+v)\|$ із (1), (2), (9), (10) враховуючи умови (1), (7), легко одержати оцінку $\delta \leq \varepsilon^2 |N-m| \varepsilon^{PL}$, тобто

$$x = u + v + \varepsilon^2 \dots. \tag{11}$$

Використовуючи результати роботи $[2]$ про усереднення першого з рівнянь системи (9), одержимо, що $z(t) = u(t) + \varepsilon^2 \dots$. Для інших рівнянь системи (5) і (9), враховуючи (7), $\alpha(t) = v(t) + \varepsilon^2 \dots$.

Теорему доведено.

Розв'язок задачі (5), (6) можна знайти, побудувавши такий ітераційний процес:

$$\begin{aligned} & z_{n+1}'(t) = \varepsilon\left[f_0\left(z_n(t)\right), \int_0^t k_0\left(t, z_n(s)\right)ds + tq_0(z_n) + g_0(z_n) \right], \\ & \alpha_{n+1}'(t) = \varepsilon T(z_n)\alpha_n(t), \\ & t \neq t_i, \quad \Delta\alpha_{n+1}\big|_{t=t_i} = \varepsilon g_i'(z_n)\alpha_n, \ n = 0,1,\dots. \end{aligned} \tag{12}$$

Припустимо, що множина $D - MT$ не порожня, і постійні L_p, $p = 1,\dots,5$ задовольняють нерівність

$$q_1 = \varepsilon\left[\int_0^T\left(L_1 + L_2\int_0^T (L_3 + \tau L_4) ds\right) d\tau + TL_5\right] < 1 . \tag{13}$$

Тоді оператор $f_0\left(z, \int_0^t k_0(t,z)\,ds + tq_0(z)\right) + g_0(z)$ є оператором стискування. Вибравши за початкове наближення функцію $z_0(t) \in D - MT$, легко показати, що

$$\left\| z_{n+1}(t) - z_n(t) \right\| \le \overline{q}_1 \left\| z_n(t) - z_{n-1}(t) \right\|, \tag{14}$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n(t) = z(t),$$

де $z(t)$ – розв’язок першого рівняння системи (5), (6).

Припустимо також, що оператор $T(u)$ на множині $\{z_n(t)\}$ задовольняє умовам, які забезпечують відсутність особливих точок і розв’язків другого рівняння системи (5), (6):

$$\left\| T(u) - T(\overline{u}) \right\| \le \beta < 1, \ \forall u, \overline{u} \in \{z_n(t)\}, \tag{15}$$
$$n = 0,1,\dots,$$

тоді

$$\left\| \alpha_{n+1}(t) - \alpha_n(t) \right\| \le \beta \left\| \alpha_n(t) - \alpha_{n-1}(t) \right\|, \tag{16}$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(t) = \alpha(t),$$

де $\alpha(t)$ – розв’язок другого рівняння системи (5), (6).

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і мають місце нерівності (13), (15); тоді для розв’язку $x(t)$ задачі (1), (2) з точністю до величин порядку ε^2 має місце оцінка

$$\left\| x(t) - \left(z_n(t) + \alpha_n(t) \right) \right\| \le \left(\overline{q}_1 + \beta \right)^{n-p+1} \left[\left\| z_p - z_{p-1} \right\| + \left\| \alpha_p - \alpha_{p-1} \right\| \right],$$
$$1 \le p \le n .$$

На завершення зауважимо, що коли замість системи (5), (6) розглядати систему

$$x'(t) = \varepsilon\left[f_0\left(z(t)\right), \int_0^t k_0\left(t, x(s)\right) ds + tq_0(x) + g_0(x) \right],$$
$$\alpha'(t) = \varepsilon P \alpha(t), \tag{17}$$
$$t \ne t_i, \quad \Delta\alpha\big|_{t=t_i} = \varepsilon P\alpha, \ z(0) = x_0, \quad \alpha(0) = 0,$$

то одержимо узагальнення результатів роботи $[3]$.

Література

1. Мышкис А.Д. Системы с толчками в заданные моменты времени / А.Д. Мышкис, А.М. Самойленко // Математический сборник. – 1974. – Т.74, №2.

2. Самойленко А.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // Дифференциальные уравнения. – 1977. – №11.
3. Самойленко А.М. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // Дифференциальные уравнения. – 1978. – №6.
4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – К.: КГУ, 1980. – 80 с.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963.
6. Митропольський Ю.О. Методи нелінійної механіки / Ю.О. Митропольський. – К.: Наукова думка, 2002.

Стаття надійшла до редакційної колегії 04.07.2010 р.
Рекомендовано до друку академіком НАН України,
*професором **Перестюком М.О.***

THE METHOD OF PART MIDDLING IN THE INTEGRAL-DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DOUBLE IMPULSIVE ACTION

S. S. Gulka
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, st. Carpats'ka, 15;
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

The method of middling by Crilov-Bogolubov-Mitropopolsky is applied to the systems of integral-differential equalizations with double impulsive action.

Key words: *system of integral-differential equalizations, double impulsive action, middling, error.*