УДК 517.9

СИМЕТРІЙНІ МЕТОДИ В МАТЕМАТИЧНІЙ ФІЗИЦІ

М. І. Сєров, М. М. Сєрова
Полтавський національний технічний університет ім. Ю. Кондратюка; e-mail: mserov@ukr.net

Наведено деякі напрямки досліджень в галузі симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, що проводяться групою науковців кафедри вищої математики Полтавського національного університету імені Юрія Кондратюка. Запропоновано процедуру нелінійної суперпозиції розв'язків, яке дозволяє будувати ланцюжки розв'язків типу односолітонних для рівнянь синус-Гордон. Досліджено зв'язок деяких відомих та одержаних розв'язків з операторами умовної симетрії рівняння синус-Гордон, за допомогою яких побудовано класи точних розв'язків даного рівняння. Знайдено оператори умовної симетрії та відповідні їм класи розв'язків для багатовимірного хвильового рівняння синус-Гордон.

Ключові слова: *симетрій ний аналіз нелінійних рівнянь математичної фізики, багатовимірне рівняння синус-Гордон, солітон, анзац.*

Одним з нових напрямів у математиці є симетрійний аналіз нелінійних рівнянь математичної фізики. В Україні фундатором цього напрямку вважається В.І. Фущич. Доктор фізико-математичних наук, професор, член кореспондент НАН України, зав. відділом прикладних досліджень Інституту математики НАН України, лауреат кількох державних премій Фущич Вільгельм Ілліч добре відомий своїми науковими працями в області симетрійного аналізу диференціальних рівнянь не тільки в нашій країні, але й за її межами (у США, Канаді, Японії, Італії, Австралії, Німеччині та деяких інших країнах серед вчених, які займаються тематикою даного напряму математичної фізики). Група вчених (47 кандидатів наук, 13 докторів наук) згуртована Вільгельмом Іллічем при відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України по праву заслуговує на ім'я наукової школи симетрійного аналізу рівнянь математичної фізики.

Незважаючи на те, що науковий шлях Вільгельма Ілліча починався з вивчення симетрійних властивостей лінійних рівнянь та систем математичної фізики, де він разом зі своїми учнями досяг значних успіхів, багато його наукових звершень відносяться до симетрійного аналізу рівнянь нелінійної математичної фізики. Перші нелегкі кроки в цьому напрямі були зроблені наприкінці 70-х – на початку 80-х років минулого століття. Кожне нелінійне рівняння, зі слів Вільгельма Ілліча, потребувало індивідуального підходу, вимагало розробки спеціальних методів його дослідження. Незважаючи на ці фундаментальні проблеми нелінійних рівнянь, Вільгельму Іллічу вдалося розробити ряд важливих підходів дослідження нелінійних диференціальних рівнянь і узагальнити їх для цілих класів рівнянь та систем нелінійної математичної фізики.

В.І. Фущич відзначав важливість відбору серед усіх допустимих математичних моделей, які описують конкретні фізичні процеси, тих, які володіють широкими симетрійними властивостями, а саме задовольняють принципам відносності Галілея та Пуанкаре-Ейнштейна. У зв’язку з цим всі рівняння з частинними похідними він поділяв на два великих класи: рівняння релятивістської та нерелятивістської фізики. Багато робіт В.І. Фущича та його учнів присвячено цій проблемі.

Наукові ідеї Фущича Вільгельма Ілліча живуть і розвиваються в роботах його учнів і послідовників. Одним з осередків послідовників ідей В.І. Фущича є у м. Полтаві кафедра вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка, де протягом останніх десяти років в галузі симетрійного аналізу диференціальних рівнянь захищено 5 кандидатських дисертацій, 2 дисертації готуються до захисту. Наукові дослідження дисертаційних робіт присвячені як вивченню класичних ліївських симетрій, так і пошуку неліївських симетрій нелінійних диференціальних рівнянь, а також застосуванню нелокальних перетворень для побудови розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики.

Як приклад ефективної роботи науковців нашої школи наведу один з вагомих результатів, здобутих її представниками, що одержав схвалення на семінарах Інституту математики НАН України.

Нелокальні формули розмноження розв’язків рівняння синус-Гордона

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордон (СГ). З геометричної точки зору рівняння синус-Гордон виникло в диференціальній геометрії наприкінці XIX століття і пов’язане із задачею побудови чебишевських сіток на поверхнях від’ємної кривини [7]. У 1936 році вивченням розв’язків рівняння (1) займався німецький вчений Р. Штойрвальд, але результати його досліджень були відомі на той час лише небагатьом спеціалістам з геометрії [4, 19]. У фізиці рівняння СГ було застосоване в теорії дислокацій Я. Френкелем та Т. Канторовою. Воно описує розповсюдження обертань, умовних або дійсних, у різних фізичних системах [8, 9].

Рівняння СГ є одним з найбільш відомих рівнянь теорії солітонів, розвиток якої бере початок із спостереження фізичного явища “solitary ware” (відокремленої хвилі) британським інженером Д.С. Расселом у 1834 році. Однак його роботи на деякий час були забуті. Пізніше, в 1965 році в роботі Н. Забуського і М. Крускала [20] ця хвиля була названа солітоном.

Наприкінці XIX століття Беклунд [7, 14] запропонував нелокальні перетворення вигляду:

$$\left(\frac{\overset{2}{u}+\overset{1}{u}}{2}\right)_y=\frac{1}{\lambda}\sin\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{2},\qquad \left(\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{2}\right)_z=\lambda\sin\frac{\overset{2}{u}+\overset{1}{u}}{2} \tag{2}$$

для рівняння СГ (1), записаного в конусних змінних

$$u_{yz}=\sin u, \tag{3}$$

де

$$y=\frac{x_1+x_0}{2},\quad z=\frac{x_1-x_0}{2}, \tag{4}$$

$\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ – два різні розв’язки рівняння (3), λ – довільна стала. Перетворення (2) зв’язують між собою два різні розв’язки рівняння СГ, вони є автоперетвореннями Беклунда (АПБ). Враховуючи те, що перетворення (2) задають неявний зв’язок між двома розв’язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння (3), то їх важко використовувати для побудови точних розв’язків цього рівняння.

За допомогою АПБ (2) у літературі побудовано деякі точні розв’язки рівняння (3), які одержали назву солітонних розв’язків. Односолітонні

$$u=4\arctan e^{\theta_1} \tag{5}$$

та двосолітонні

$$u=4\arctan\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right), \tag{6}$$

де $\theta_i=\lambda_i z+\frac{1}{\lambda_i}y+c_i$, λ_i, c_i — сталі, $i=1,2$, розв’язки даного рівняння [4, 5].

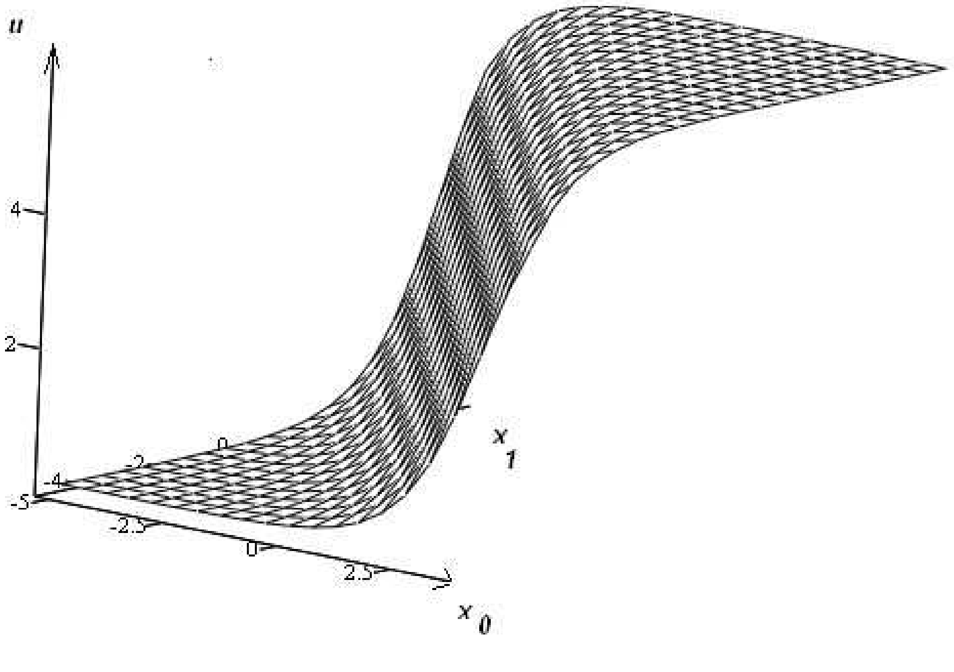

Рис.1. Графік функції $u=4\arctan e^{\theta_1}$

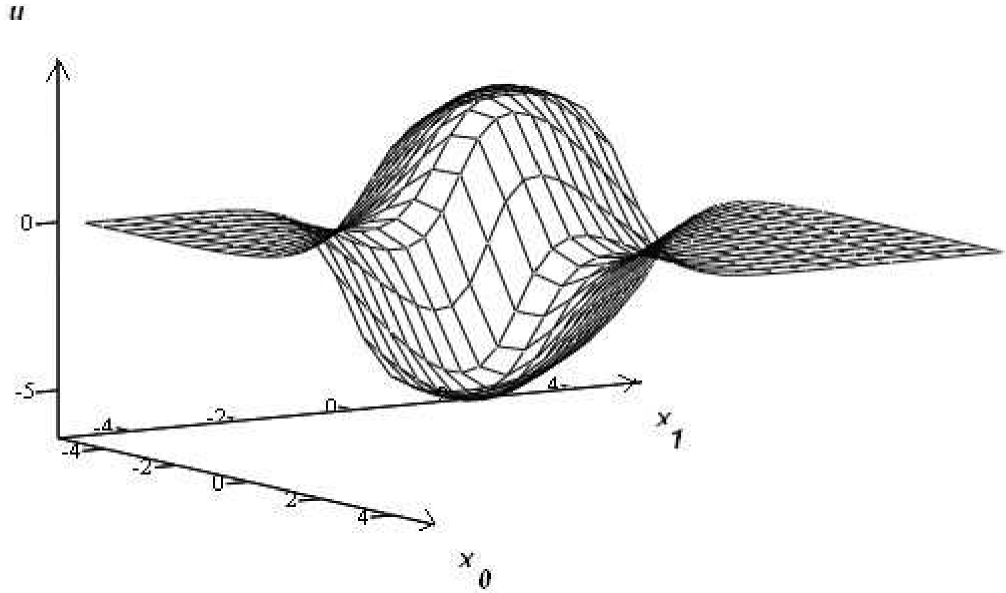

Рис.2. Графіки функції $u = 4\arctan(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}})$

У роботі [15] виведена формула знаходження N-солітонних розв'язків рівняння СГ:

$$\cos u(x_0,x_1) = 1-2(\frac{\partial^2}{\partial x_0{}^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2})\ln F,$$
$$F = \det(M_{ij}),$$
$$M_{ij} = 2(a_i+a_j)^{-1}\cosh[\frac{1}{2}(\theta_i+\theta_j)], \tag{7}$$
$$\theta_j = \gamma_j(x_0 - V_j x_1 - t_j),$$
$$a_j^2 = (1-V_j)(1+V_j)^{-1},$$
$$\gamma_j^2 = (1-V_j^2)^{-1},$$

де a_j, t_j – довільні параметри.

Ми пропонуємо дещо інший підхід до знаходження розв'язків рівняння СГ за допомогою АПБ (2).

Для спрощення приймемо $\lambda = 1$. Введемо функціональний параметр $\tau = \tau(y,z)$ за формулою:

$$\tau = \tan\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{4}. \tag{8}$$

Це дає змогу записати зв'язок між розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння СГ у параметричному вигляді. Сформулюємо даний результат у вигляді теореми.

Теорема 1. Якщо $\overset{1}{u}$ – розв'язок рівняння (3), то його інший розв'язок $\overset{2}{u}$ знаходиться за формулою

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4\arctan\tau, \tag{9}$$

де $\tau = \tau(y, z)$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \tau_y &= -\frac{1}{2}(\tau^2 + 1)\overset{1}{u}_y + \tau, \\ \tau_z &= -\frac{1}{2}(\tau^2 - 1)\sin\overset{1}{u} + \tau\cos\overset{1}{u}. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 1 доводиться безпосередньою підстановкою формул (9), (10) у рівняння (3).

Таким чином, згідно даної теореми побудову розв'язків рівняння СГ пропонується здійснювати в два етапи. Спочатку за відомим розв'язком $\overset{1}{u}$ потрібно знайти функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$, як розв'язок системи диференціальних рівнянь (10), а потім за допомогою розв'язку $\overset{1}{u}$ і знайденим за ним параметром τ та формулою (9) знаходимо $\overset{2}{u}$ – новий розв'язок рівняння СГ.

На перший погляд, формули (9), (10) спрощують знаходження розв'язку $\overset{2}{u}$, однак при цьому, для знаходження параметра τ потрібно зінтегрувати систему диференціальних рівнянь (10), яка є системою рівнянь Ріккаті. Добре відомо, що немає загального методу розв'язування рівнянь Ріккаті. Тому за складністю формули (9), (10), вочевидь, не поступаються формулам (2). Але нам вдалося зауважити одну закономірність, за якою можна знаходити частинний розв'язок рівнянь Ріккаті (10) (див. лему нижче). Як відомо, наявність частинного розв'язку рівняння Ріккаті дозволяє звести його до рівняння Бернуллі, яке інтегрується у квадратурах.

Якщо для побудови розв'язків рівняння СГ формули (9), (10) використовувати послідовно декілька разів, то зрештою отримаємо рекурентні формули вигляду

$$\overset{n+1}{u} = \overset{n}{u} + 4\arctan\overset{n+1}{\tau}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \overset{n+1}{\tau}_y &= -\frac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2 + 1)\overset{n}{u}_y + \overset{n+1}{\tau}, \\ \overset{n+1}{\tau}_z &= -\frac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2 - 1)\sin\overset{n}{u} + \overset{n+1}{\tau}\cos\overset{n}{u}, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\overset{n}{u}$ – розв'язок рівняння СГ на n-му кроці, $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n+1}{\tau}$ – функції, що знайдені на $(n+1)$-му кроці. Ми знайшли зв'язок між розв'язками системи рівнянь Ріккаті (12) на різних кроках. Сформулюємо цей зв'язок у вигляді наступного твердження.

Лема. Якщо за початковий розв'язок у формулах (11), (12) вибрати тривіальний розв'язок рівняння синус-Гордон $\overset{0}{u} = 0$, то для системи (12) справджується формула

$$\overset{n+1}{\tau}_0(y,z) = \overset{n}{\tau}_3(-y,-z), \tag{13}$$

де $\overset{n}{\tau}_3(y,z)$ – загальний розв'язок системи (2.11) на n-му кроці при спеціальному виборі сталої інтегрування, $\overset{n+1}{\tau}_0(y,z)$ – частинний розв'язок системи (12) на $(n+1)$-му кроці, $n = 1,2,3,4,5$.

Опишемо знаходження точних розв'язків рівняння (1).

1-крок. $n = 1$:

$$\overset{0}{u} = 0, \tag{14}$$

тоді

$$\overset{1}{u} = 4\arctan\overset{1}{\tau}, \tag{15}$$

де функціональний параметр $\overset{1}{\tau}$ є розв'язком такої системи диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними

$$\begin{aligned} \overset{1}{\tau}_y &= \overset{1}{\tau}, \\ \overset{1}{\tau}_z &= \overset{1}{\tau}. \end{aligned} \tag{16}$$

Розв'язавши (16) з точністю до перетворень (13) одержимо

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z}, \tag{17}$$

$$\overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z}. \tag{18}$$

Цей розв'язок у літературі відомий як односолітонний розв'язок рівняння СГ [4].

2-крок. $n = 2$:

$$\overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z}, \tag{19}$$

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4\arctan\overset{2}{\tau}, \tag{20}$$

де параметр $\overset{2}{\tau}$ є розв'язком такої системи рівнянь Ріккаті:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\tau}_y &= M((\overset{2}{\tau})^2 + 1) + \overset{2}{\tau}, \\ \overset{2}{\tau}_z &= N((\overset{2}{\tau})^2 - 1) + L\overset{2}{\tau}, \end{aligned} \tag{21}$$

де $M = -\dfrac{1}{\cosh(y+z)}$, $N = \dfrac{\sinh(y+z)}{\cosh^2(y+z)}$, $L = 2\tanh^2(y+z) - 1$. Використавши лему, маємо

$$\overset{2}{\tau}_0(y,z) = \overset{1}{\tau}_3(-y,-z) = e^{-(y+z)}. \tag{22}$$

Здійснивши заміну:

$$\overset{2}{\tau} = w + e^{-(y+z)}, \tag{23}$$

де $w = w(y,z)$ — нова невідома функція, систему (21) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{gathered}\cosh(y+z)w_y = (\sin(y+z)-1)w - w^2,\\ \cosh^2(y+z)w_z = (\sin^2(y+z)-1)w + \sinh(y+z)w^2.\end{gathered} \tag{24}$$

Загальний розв'язок системи (24) має вигляд

$$w = \frac{2\cosh^2(y+z)}{e^{y+z}(y-z+c_2)-\cosh(y+z))}. \tag{25}$$

Отже, використавши (25), одержуємо:

$$\overset{2}{\tau} = \frac{(y-z+c_2)e^{-(y+z)}+\cosh(y+z)}{y-z+c_2-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{26}$$

де c_2 – стала інтегрування. Підставивши $\overset{2}{\tau}$, $\overset{1}{u}$, що задані формулами (26), (19) відповідно, у формулу (20), одержуємо

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-(y-z+c_2)}{\cosh(y+z)}. \tag{27}$$

З точністю до перетворень (1.3) можна вважати $c_2 = 0$. Отже,

$$\overset{2}{\tau} = \frac{(y-z)e^{-(y+z)}+\cosh(y+z)}{y-z-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{28}$$

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}. \tag{29}$$

Зауважимо, що розв'язок (29) одержано Новіковим С.П. в [3] із двосолітонного розв'язку (6), якщо в ньому перейти до границі при $\lambda_2 \to \lambda_1$.

3-крок. $n = 3$:

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}, \tag{30}$$

$$\overset{3}{u} = \overset{2}{u} + 4\arctan\overset{3}{\tau}. \tag{31}$$

Система рівнянь Ріккаті для знаходження $\overset{3}{\tau}$ має вигляд

$$\begin{gathered}\overset{3}{\tau}_y = -\frac{2((y-z)\sinh(y+z)-\cosh(y+z))}{B}((\overset{3}{\tau})^2+1)+\overset{3}{\tau},\\ \overset{3}{\tau}_z = \frac{2(y-z)\cosh(y+z)A}{B^2}((\overset{3}{\tau})^2-1)+\frac{A^2-4(y-z)^2\cosh^2(y+z)}{B^2}\overset{3}{\tau},\end{gathered} \tag{32}$$

де $A = \cosh^2(y+z)-(y-z)^2$, $B = \cosh^2(y+z)+(y-z)^2$.

Використавши лему, маємо

$$\overset{3}{\tau}_0(y,z) = \overset{2}{\tau}_3(-y,-z) = \frac{(y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}. \tag{33}$$

Скориставшись заміною

$$\overset{3}{\tau} = w + \frac{(y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}, \tag{34}$$

де $w = w(y,z)$ – нова невідома функція, систему (32) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{gathered} w_y = \frac{\beta B - 4\alpha C}{\beta B} w - \frac{2C}{B} w^2, \\ w_z = \frac{4(y-z)\alpha A\cosh(y+z) + \beta(A^2 - 4(y-z)^2)\cosh^2(y+z)}{\beta B^2} w + \\ + \frac{2(y-z)A\cosh(y+z)}{B^2} w^2, \end{gathered} \tag{35}$$

де $\alpha = (y-z)e^{y+z} - \cosh(y+z)$, $\beta = y - z + e^{y+z}\cosh(y+z)$,

$C = (y-z)\sinh(y+z) - \cosh(y+z)$. Розв'язавши (35), одержуємо

$$\overset{3}{\tau} = \frac{-2B^2 + \alpha K}{\beta K}, \tag{36}$$

$$\overset{3}{u} = 4\arctan e^{-y-z}\,\frac{P+B}{P-B}, \tag{37}$$

де

$$\begin{gathered} K = (y - z + e^{y+z}\cosh(y+z))((y-z)^2 e^{-(y+z)} \\ -2(y-z)\cosh(y+z) + f) - 4e^{y+z}\cosh^4(y+z), \\ f = \cosh(y+z)(e^{2(y+z)} + 2) + (y+z+c)e^{-(y+z)}, \\ P = c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z). \end{gathered}$$

Випишемо ланцюжок розв'язків рівняння синус-Гордон (3), одержаного в результаті застосування рекурентних формул (11), (12):

$$0 \to 4\arctan e^{y+z} \to 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)} \to$$

$$4\arctan\left(\frac{e^{-(y+z)}(c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z) + \cosh^2(y+z) + (y-z)^2)}{c + y + z + \cosh(y+z)\sinh(y+z) - \cosh^2(y+z) - (y-z)^2}\right).$$

Таким чином, враховуючи зв'язок (2) між змінними y, z і x_0, x_1, одержаний нами ланцюжок розв'язків для рівняння СГ (1) має вигляд

$$0 \to 4\arctan e^{x_1} \to 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1}$$

$$\to 4\arctan e^{-x_1}\,\frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2}.$$

Побудуємо графіки розв'язків $\overset{2}{u}$ і $\overset{3}{u}$, виокремивши графіки при фіксованих значеннях змінної x_0.

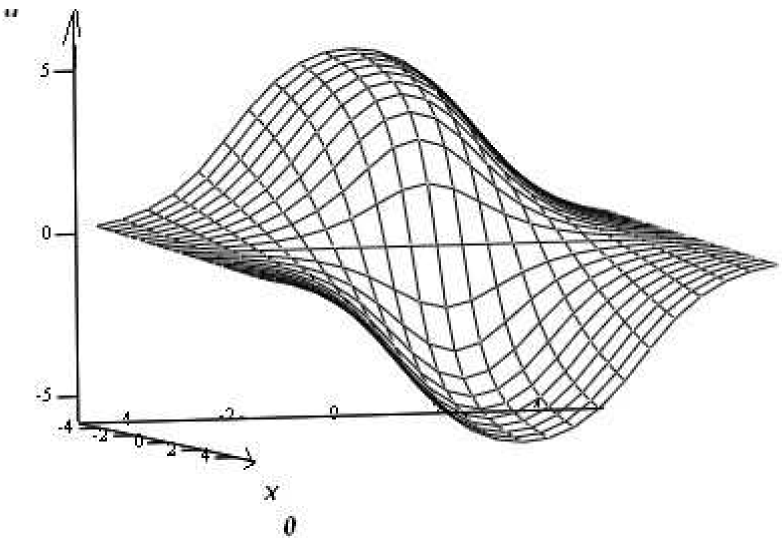

Рис.3. Графік функції $\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1}$

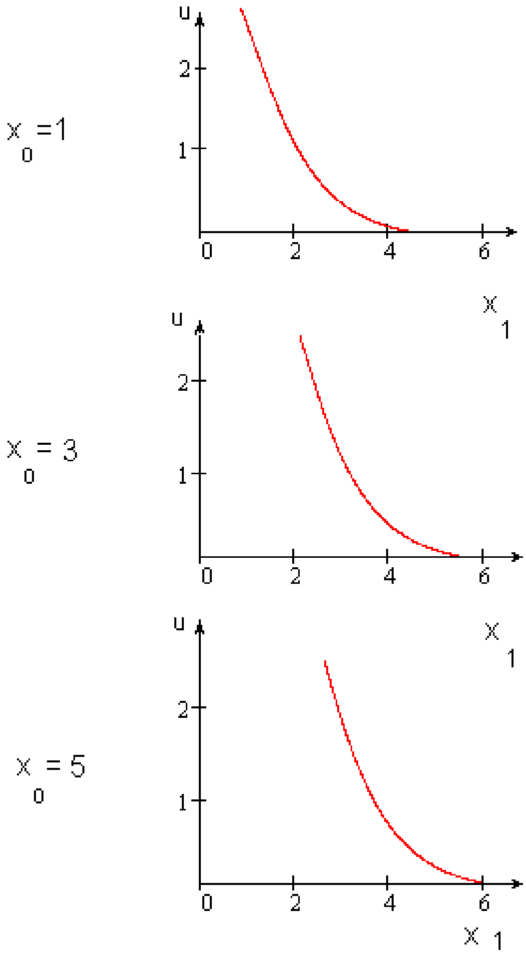

Рис.4. Графіки функції $\overset{2}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0

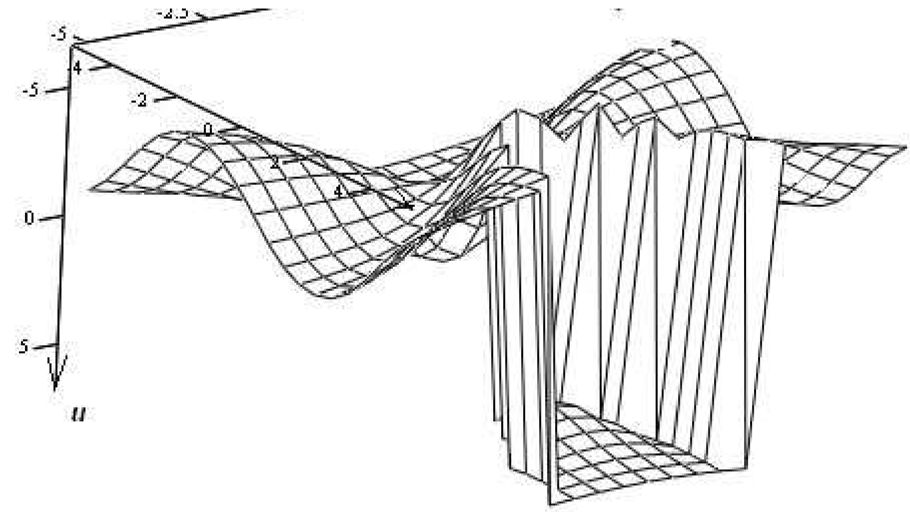

Рис.5. Графіки функції $\overset{3}{u} = 4\arctan e^{-x_1}\dfrac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2}$

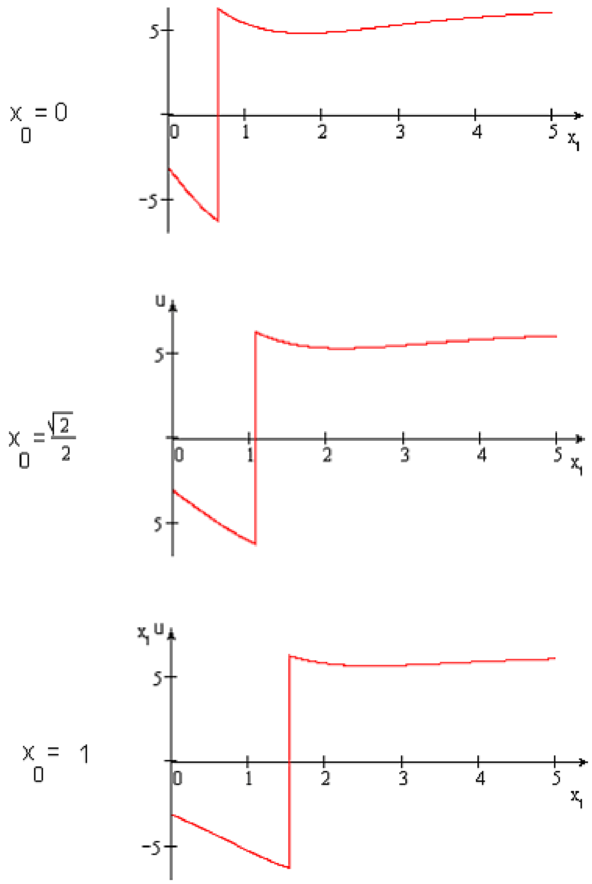

Рис.6. Графіки функції $\overset{3}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0

Оскільки побудовані графіки одержаних розв'язків $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$ зберігають форму єдиної хвилі з ростом часової змінної x_0, то можна припустити, що ці розв'язки є розв'язками солітонного типу рівняння синус-Гордон.

Зауваження 1. З кожним наступним кроком процедури розмноження розв'язків рівняння СГ, запропонованої в теоремі (1), різко зростає громіздкість перетворень даного алгоритму. Тому було природно наступні кроки доручити ЕОМ.

За допомогою програми Maple нам вдалося допрацювати ще два кроки вказаного алгоритму і одержати такі розв'язки

$$\overset{4}{u} = 4\arctan\frac{(\frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0 + c_4)\cosh x_1 - 2x_0x_1\sinh x_1}{\frac{1}{3}x_0^4 - c_4x_0 + x_1^2 + \cosh^2 x_1}, \tag{38}$$

$$\overset{5}{u} = 4\arctan e^{x_1}\frac{(\cosh^2 x_1 + A - B)e^{2x_1} + C + D}{\cosh^2 x_1 + A + B + (C - D)e^{2x_1}}, \tag{39}$$

де
$$A = \frac{1}{9}x_0^6 + \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + x_0^2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + 2c_5x_1,$$
$$B = \frac{1}{3}x_0^4x_1 + 2x_0^2(x_1 + c_5) - x_1(x_1^2 + 1) + c_5,$$
$$C = \frac{1}{6}x_0^4 + \frac{3}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}x_1^2, \quad D = (x_0^2 + 1)x_1 - c_5.$$

Побудуємо графіки розв'язків $\overset{4}{u}$ і $\overset{5}{u}$, виокремивши графіки при фіксованих значеннях змінної x_0.

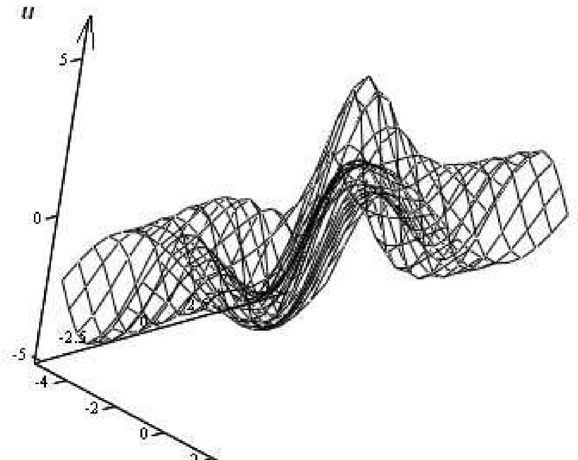

Рис.7. Графіки функції $\overset{4}{u} = 4\arctan\dfrac{(\frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0 + c_4)\cosh x_1 - 2x_0x_1\sinh x_1}{\frac{1}{3}x_0^4 - c_4x_0 + x_1^2 + \cosh^2 x_1}$

$x_0 = 0$

$x_0 = 0,5$

$x_0 = 1$

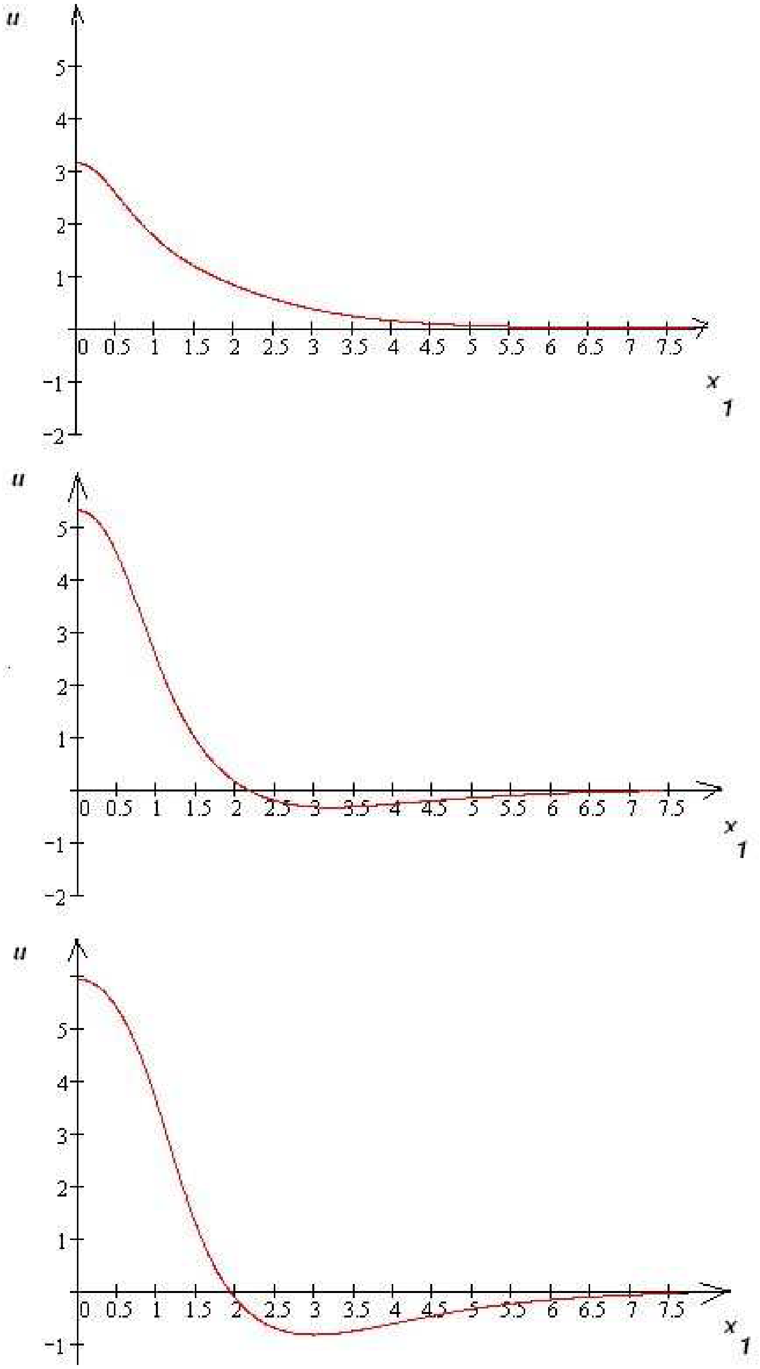

Рис. 8. Графіки функції $\overset{4}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0.

Проаналізувавши графіки одержаних розв'язків та їх проекцій, робимо висновок, що всі вони мають вигляд хвилі, яке не змінює свою форму з плином часу. Отже, знайдені нами розв'язки $\overset{2}{u} - \overset{5}{u}$, як і $\overset{1}{u}$, є розв'язками солітонного типу рівняння синус-Гордон.

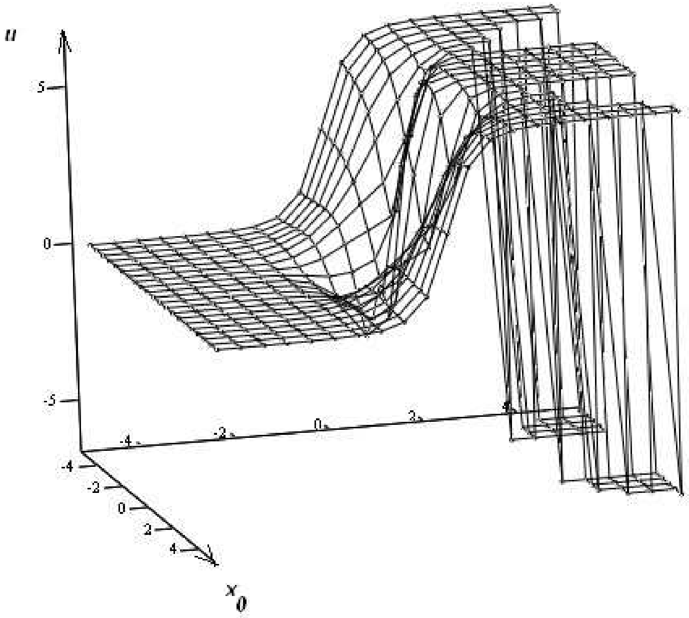

Рис.9. Графіки функції $u = 4\arctan e^{x_1}\dfrac{(\cosh^2 x_1 + A - B)e^{2x_1} + C + D}{\cosh^2 x_1 + A + B + (C - D)e^{2x_1}}$

<u>Умовна інваріантність багатовимірного рівняння синус-Гордон</u>

Розглянемо багатовимірне рівняння СГ

$$\mathrm{W}u + \sin u = 0, \tag{40}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Як і для одновимірного рівняння СГ, доводиться наступне твердження.

Теорема 2. Рівняння (40) інваріантне відносно оператора

$$Q = \partial_n + \eta(x_n, u)\partial_u \tag{41}$$

при додаткових умовах

$$u_\mu u^\mu + \Phi(x_n, u) = 0, \tag{42}$$

$$Qu = u_n - \eta = 0, \tag{43}$$

де

$$\Phi = \frac{1}{\eta_{uu}} T, \quad \eta_{uu} \neq 0, \tag{44}$$

$$T = \eta\cos u - \eta_u \sin u - 2\eta\eta_{nu} - \eta_{nn}, \tag{45}$$

$$\frac{1}{\eta_{uu}^2}(\eta_{nuu} + \eta\eta_{uuu} + 2\eta_u\eta_{uu})T - \frac{1}{\eta_{uu}}(T_n + \eta T_u) + 2\eta\eta_n = 0. \tag{46}$$

$x_0 = 0$

$x_0 = 0,5$

$x_0 = 1$

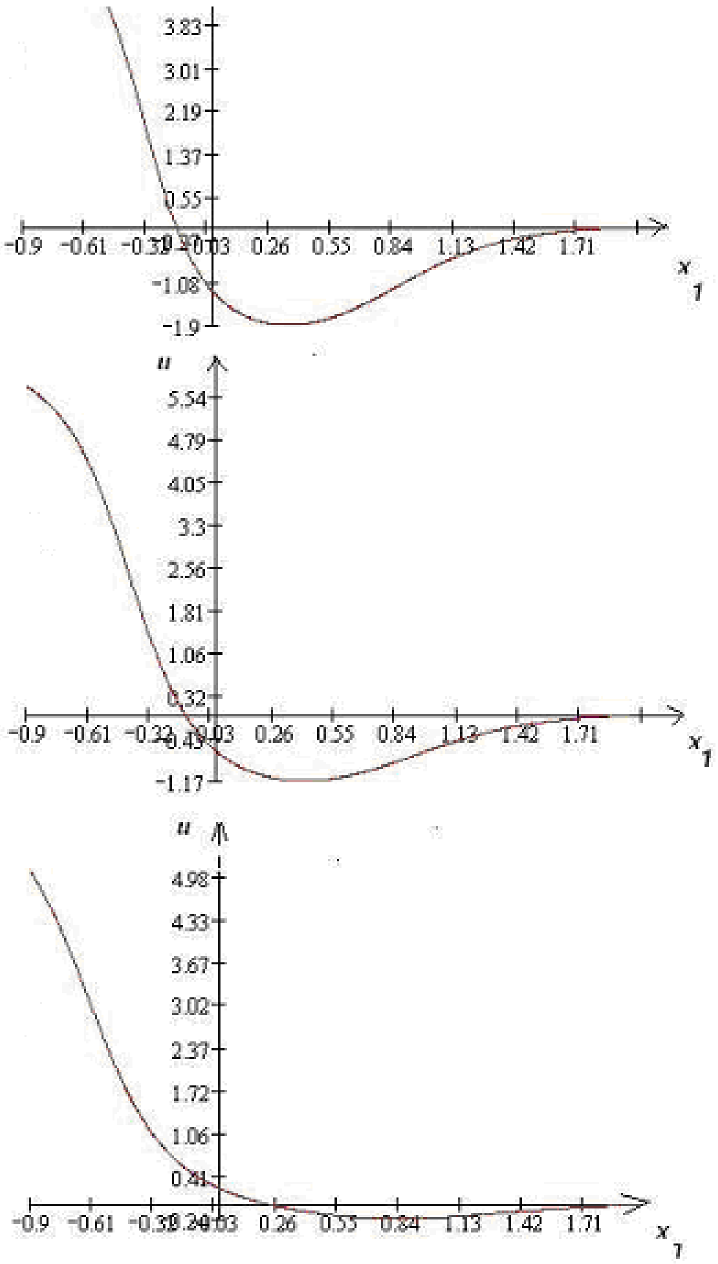

Рис.10. Графіки функції $\overset{5}{u}$ при фіксованих значеннях змінної x_0

Зауваження 2. За допомогою прямої перевірки можна переконатися, що оператори

$$Q = \partial_n + 2\sin\frac{u}{2}\partial_u, \tag{47}$$

$$Q = \partial_n - 2\tanh x_n \sin\frac{u}{2}\partial_u, \tag{48}$$

$$Q = \partial_n + \eta\partial_u,$$

$$\eta = -2(\sin\frac{u}{2} - 2\cosh x_n \frac{\cos\frac{u}{2} + \sinh x_n \sin\frac{u}{2}}{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n}) \tag{49}$$

задовольняють умовам теореми 2, тобто є операторами умовної симетрії рівняння (40).

Оператору (47) відповідає анзац

$$u = 4\arctan(e^{x_n}\varphi(x_0,\dots,x_{n-1})), \tag{50}$$

який редукує рівняння (40) до системи рівнянь

$$\begin{gathered} \mathrm{W}\varphi = 0, \\ \varphi_s\varphi^s = 0, s = \overline{0, n-1}. \end{gathered} \tag{51}$$

Оператору (48) відповідає анзац

$$u = 4\arctan\frac{\varphi(x_0,\dots,x_{n-1})}{\cosh x_n}, \tag{52}$$

який редукує рівняння (40) до системи рівнянь

$$\begin{gathered} \mathrm{W}\varphi = 0, \\ \varphi_s\varphi^s - 1 = 0, s = \overline{0, n-1}. \end{gathered} \tag{53}$$

Оператору (49) відповідає анзац

$$u = 4\arctan e^{-x_n}\frac{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n + \cosh^2 x_n + \varphi^2}{c + x_n + \cosh x_n \sinh x_n - \cosh^2 x_n - \varphi^2}, \tag{54}$$

де $\varphi = \varphi(x_0, x_1,\dots,x_{n-1})$. Анзац (54) редукує рівняння (40) також до системи рівнянь (53).

Узагальнимо анзаци (50), (52) наступним чином

$$u = 4\arctan\varphi\psi, \tag{55}$$

де $\varphi = \varphi(x_0,\dots,x_{n-1})$, $\psi = \psi(x_n)$ – невідомі функції. Підставивши (55) у рівняння (40), одержимо

$$\varphi^2\mathrm{W}\varphi - 2\varphi\varphi_s\varphi^s - \varphi^3 + \frac{1}{\psi^2}(\mathrm{W}\varphi + \varphi) - \frac{\ddot{\psi}}{\psi^3}\varphi + (2\frac{\dot{\psi}^2}{\psi^2} - \frac{\ddot{\psi}}{\psi})\varphi^3 = 0, \tag{56}$$

де $s = \overline{0, n-1}$. Врахувавши, що функції ϕ, ψ залежать від різних аргументів, з рівняння (56) отримуємо два суттєво різні випадки:

$$\begin{gathered} \ddot{\psi} - 2\lambda_1\psi^3 = 0, \\ \psi\ddot{\psi} - 2\dot{\psi}^2 + 2\lambda_2 = 0, \\ S_3 - 2\lambda_1\varphi = 0, \\ S_4 + 2\lambda_2\varphi^3 = 0; \end{gathered} \tag{57}$$

$$\begin{gathered} \ddot{\psi} - 2\lambda_1\psi = 0, \\ \psi\ddot{\psi} - 2\dot{\psi}^2 + 2\lambda_2\psi^2 = 0, \\ S_3 + 2\lambda_2\varphi^3 = 0, \\ S_4 - 2\lambda_1\varphi = 0, \end{gathered} \tag{58}$$

де λ_1, λ_2 – довільні сталі, $S_3 = \varphi^2 \mathrm{W}\varphi - 2\varphi\varphi_s\varphi^s - \varphi^3$, $S_4 = \mathrm{W}\varphi + \varphi$. Розглянемо кожен із отриманих випадків окремо. Із (57) випливає, що вигляд функції ψ визначаються, як

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{\lambda_1\psi^4 + \lambda_2}} = x_n. \tag{59}$$

Провівши заміну

$$w = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda_2\varphi^4 + \varphi^2 + \lambda_1}} \tag{60}$$

з двох останніх рівнянь системи (57), одержимо

$$\begin{gathered} \mathrm{W}w = 0, \\ w_s w^s + 1 = 0, \quad s = \overline{0, n-1}. \end{gathered} \tag{61}$$

Зауваження 3. Якщо у формулах (59), (60) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, то одержимо розв’язок рівняння СГ, який виражається через елементарні функції та функцію w за формулою

$$u = -4\arctan\frac{\sinh w}{x_n}. \tag{62}$$

Якщо ж в формулах (59), (60) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, то одержимо такий розв’язок

$$u = -4\arctan\frac{x_n}{\sinh w}, \tag{63}$$

який за допомогою перетворень (1.4), (1.5) зводиться до (62). За всіх інших значень параметрів λ_1, λ_2 розв’язки рівняння СГ вигляду (55) виражаються через еліптичні функції (див., наприклад, [2]).

З (58) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ одержимо наступний розв’язок

$$u = 4\arctan e^{x_n}\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}), \tag{64}$$

де функція φ виражається з (60), а функція w є розв’язком системи

$$\begin{gathered} \mathrm{W}w = 0, \\ w_s w^s = 0, \quad s = \overline{0, n-1}. \end{gathered} \tag{65}$$

Повний аналітичний опис множини гладких розв’язків систем (51), (53), (61), (65) у випадку $n = 4$ зроблено Фущичем В.І., Ждановим Р.З., Ревенком І.В. в роботі [10], а також здійснено в роботі [13]. У результаті цього в даній роботі отримано цілі класи точних розв’язків багатовимірного рівняння синус-Гордон.

Таким чином, ми запропонували процедуру нелінійної суперпозиції розв’язків, яка дозволяє будувати ланцюжки розв’язків типу односолітонних для рівняння синус-Гордон. Досліджено зв’язок деяких відомих та одержаних розв’язків з операторами умовної симетрії рівняння синус-Гордон, за допомогою яких побудовано класи точних розв’язків даного рівняння. Знайдено оператори умовної симетрії та відповідні їм класи розв'язків для багатовимірного хвильового рівняння синус-Гордон.

Література

1. Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи / М.Абловиц, Х.Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций / Н.И.Ахиезер. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
3. Теория солитонов / В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский // Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 324 с.
4. Новиков С.П. Солитоны / С.П.Новиков. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
5. Новокшенов В.Ю. Математические модели в естествознании / В.Ю.Новокшенов. – Уфа: УГАТ ун-т, 1999. – 98 с.
6. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 323 с.
7. Позняк Э.Г. Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика / Э.Г.Позняк, А.Г.Попов. – М.: Знание, 1991. – 48 с.
8. Филиппов А.Т. Многоликий солитон / А.Т.Филиппов. – М.: Наука, 1990. – 288 с.
9. Френкель Я. О теории пластической деформации и двойникования / Я.Френкель, Т.Конторова // Физический журнал. – 1939. – №1. – С. 137-145.
10. Фущич В.И. Решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала / В.И.Фущич, Р.З.Жданов, И.В.Ревенко // УМЖ, 43. – 1991. – №11. – С. 1471-1487.
11. Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В.И.Фущич, В.М.Штелень, Н.И.Серов. – Киев: Наукова думка, 1989. – 339 с.
12. Theory and applicationcs of the sine-Gordon equatoin / A.Barone, F.Eposito, C.Magee, A.Scott // Riv. Nuovo cimento. – 1971. – №1. – C. 227-267.
13. Barannyk A.F. On a new method for constructing exact solitions of the nonlinear differential equations of mathematical physics / A.F.Barannyk, I.I.Yurik // J. Phys. A: Math. Gen. 31. – 1998. – P. 4899-4907.
14. Bäclund A.V. Om Ytor med konstant negativ Krökning / A.V.Bäclund // Lund Universitets Arsskrift. 19. – 1883. – P. 1-48.
15. Caudrey P.J. The sine-Gordon equations a model field theory / P.J.Caudrey, J.C.Eibeck, J.D.Gibbon // Nuovo Cimento. – 25. – 1975. – P. 497-512.
16. Skyrme T.H.R. A Non-Linear Theory of Strong Interactions / T.H.R.Skyrme // Proc. Roy. Soc. 247. – 1958. – №1249. – P. 260-278.
17. Smirnov V.I. New method for solving a plane problem of elastic oscillations / V.I.Smirnov, S.L.Sobolev // Proc. Of the Seismologicalinstitute of the Academi of Sciences USSR. 20. – 1932. – P. 37-42.
18. Smirnov V.I. On application of a new method to the study of elastic oscillations in a space with the axial symmetry / V.I.Smirnov, S.L.Sobolev

// Proc. of the Seismologicalinstitute of the Academi of Sciences USSR, 29. – 1933. – P. 43-51.
19. Steurwald R. Uber Ennepersche Flichen und bicklund'sche Transformation, München.: Abh. Bayer Akad. Wiss. – 40. – 1936. – 105 p.
20. Zabusky N.J. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states / N.J.Zabusky, M.D.Kruskal // Phys. Rev. Lett., 15. – 1965. – P. 240-243.

Стаття надійшла до редакційної колегії 28.12.2011 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.***

SYMMETRIC METHODS IN MATHEMATICAL PHYSICS

M. I. Serov, M. M. Serova
Poltava National Technical University by Yu. Kondratiuk;
e-mail: mserov@ukr.net

Some directions of researches are resulted in industry of symmetric analysis of differential equalizations, which are conducted by the group of research workers of department of higher mathematics of the Poltava National Technical University by Yu. Kondratiuk. Procedure of nonlinear superposition of decisions is offered, which allows to build the chainless of decisions of type of onesolitonnih for equalizations sine-Gordon. Communication of some known and got decisions with the statements of conditional symmetry of equalization is explored sine-Gordon, which the classes of exact decisions of the given equalization are built by. It is found statements of conditional symmetry and classes of decisions for multidimensional wave equalization proper to them sine-Gordon.

Key words: *symmetries ache analysis of nonlinear equalizations of mathematical physics, equalization is a sine-Gordon, fliton, anzats.*