

## ПОВНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ УМОВНОЇ РІВНОВАГИ ДІЛЯНОК БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ У СВЕРДЛОВИНІ ОРІЄНТОВАНІЙ ДОВІЛЬНО У ПРОСТОРІ

**В. М. Мойсишин, В. І. Векерик**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua).*

*У роботі виведено загальні рівняння рівноваги ділянки бурильної колони орієнтованої довільно у просторі; враховано розподілені по довжині сили ваги, тertia труб об стінки свердловини, рух промивальної рідини, обертальний та поступальний рухи колони.*

*Вивчено особливості утворення плоских та просторових форм рівноваги пружної лінії бурильної колони, одержано залежності для знаходження її кривини і кручення, вивчено кінематику обертання ділянок колон та руху промивальної рідини у трубах і затрубному просторі.*

***Ключові слова:** рівняння рівноваги, пружна лінія бурильної колони, кути Ейлера-Крилова, кривина, кручення, згинаючий момент, крутний момент, переміщення, внутрішня сила, внутрішній момент.*

На сьогодні маємо досить багато досліджень присвячених вивченню рівноваги ділянок бурильної колони у свердловині. Розв'язані задачі носять, як правило, частинний характер, що ускладнює їх узагальнення, не дозволяє створити узагальнену математичну модель, яка враховувала б поєднання впливів різноманітних факторів на стійкість розглядуваної механічної системи.

В роботі досліджено особливості взаємної бурильної колони зі стінками свердловини, складено системи рівнянь умовної рівноваги ділянок колони бурильних труб за різних умов навантаження, обмеження стінками свердловини, обертання колони, руху промивальної рідини в трубі та затрубному просторі. Одержано нові системи рівнянь, що дозволяють після їх розв'язання вперше комплексно оцінити вплив різних факторів на стійкість колони у свердловині орієнтованій довільно у просторі.

Одержані результати мають практичне значення, оскільки ними можна скористатись для розв'язку конкретних задач, пов'язаних з визначенням напружень в перерізах колони, сил тиску труб на стінки свердловини, параметрів пружної лінії колони.

### 1. Рівняння рівноваги невідомої ділянки бурильної колони

Пропонована робота є логічним продовженням статті [1], в якій системі векторних рівнянь рівноваги пружної лінії бурильної колони записано у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{ds} + \bar{f}(s) &= 0, \\ \frac{d\bar{L}}{ds} + \bar{z}_0 \times \bar{Q} + \bar{m}(s) &= 0, \\ \bar{L} &= \|A\|(\bar{\omega}_0 - \hat{\omega}), \\ \frac{d\bar{u}}{ds} &= (\cos \beta \cos \gamma - 1) \cdot \bar{x}_0 - \cos \beta \sin \gamma \cdot \bar{y}_0 + \sin \beta \cdot \bar{z}_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

де  $\bar{Q}, \bar{L}$  – внутрішні сила та момент у  $s$ -перерізі компоновки;  $F(s), m(s)$  – розподілені по довжині колони сили і моменти, причому  $\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{l} \times \bar{f}(s)$ ,  $m_1(s)$  – власне розподілений момент,  $\bar{l} \times \bar{f}(s)$  – момент розподіленої сили  $\bar{f}(s)$ ,  $\bar{l}$  – вектор, що з'єднує центр ваги  $s$ -перерізу з точкою прикладання розподіленого силового навантаження;  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  –

орти розрахункової системи координат;  $\|A\|$  – матриця  $\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}$ , в

якій  $A, B, C$  – жорсткості при згині та крученні;

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= p^0 \bar{x}_0^0 + q^0 \bar{y}_0^0 + r^0 \bar{z}_0^0, \\ \hat{\omega} &= p^0 \bar{x}_0 + q^0 \bar{y}_0 + r^0 \bar{z}_0, \end{aligned}$$

$p^0, q^0, r^0$  – кривина і кручення стрижня у недеформованому стані;  $\bar{x}_0^0, \bar{y}_0^0, \bar{z}_0^0$  – орти розрахункової системи координат для недеформованого стрижня;  $\bar{u}$  – вектор переміщення елемента  $ds$  стрижня;  $\beta$  – кут, утворений дотичними до осей свердловини та бурильної колони;  $\gamma$  – кут закручування виділеної ділянки труб.

Два останні кути разом з кутом нахилу  $\alpha$  осі свердловини складають так звані кути Ейлера-Крилова.

В реальній свердловині ділянки бурильної колони взаємодіють зі стінками свердловини, які в першому наближенні приймемо абсолютно жорсткими. Це в першу чергу виправдано для обсаджених ділянок стовбура свердловини.

Розглядаючи рівновагу колони невідільних ділянок бурильної колони розподілені по довжині колони труб сили  $\bar{f}$  і моменти  $\bar{m}$  подамо сумами

$$\left. \begin{aligned} \bar{f} &= \bar{f}' + \bar{f}_R, \\ \bar{m} &= \bar{m}' + \bar{m}_R, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

де  $\bar{f}', \bar{m}'$  – власне розподілені по довжині сили і моменти, а  $\bar{f}_R, \bar{m}_R$  – розподілені сили і моменти реакцій в'язей.

Рівняння (1.1) з урахуванням (1.2) можна використати для опису просторових форм рівноваги невідільних ділянок бурильної колони. У

проекціях на осі розрахункової системи перші два векторних рівняння мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial s} + Q_z q - Q_y r &= -f'_x(s) - f_{Rx}(s), \\ \frac{\partial Q_y}{\partial s} + Q_x r - Q_z p &= -f'_y(s) - f_{Ry}(s), \\ \frac{\partial Q_z}{\partial s} + Q_y p - Q_x q &= -f'_z(s) - f_{Rz}(s); \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_x}{\partial s} + L_z q - L_y r &= Q_y - m'_x(s) - m_{Rx}(s), \\ \frac{\partial L_y}{\partial s} + L_x r - L_z p &= -Q_x - m'_y(s) - m_{Ry}(s), \\ \frac{\partial L_z}{\partial s} + L_y p - L_x q &= -m'_z(s) - m_{Rz}(s). \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

В роботі [2] розглянуто деякі приклади складання рівнянь інтегрованих та неінтегрованих в'язей невільних тонких стрижнів, що опираються на абсолютно тверді тіла. Показано, що для статички тонких стрижнів справджується принцип аналогічний принципу д'Аламбера в динаміці, одержано співвідношення, що відповідає загальному рівнянню динаміки, а також складене методом Лагранжа рівняння пружної лінії невільного стрижня. Базуючись на результатах роботи [2], запишемо рівняння контакту колони зі свердловиною на випадок голономної в'язі через кут Ейлера-Крилова

$$f(\alpha, \beta, \gamma, s, \xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0, \quad (1.5)$$

де  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  – координати точок пружної лінії, що відповідають дуговій координаті. Для випадку неголономної в'язі рівняння контакту має вигляд

$$R_1 \frac{\partial \alpha}{\partial s} + R_2 \frac{\partial \beta}{\partial s} + R_3 \frac{\partial \gamma}{\partial s} + R_4 = 0, \quad (1.6)$$

де  $R_1, R_2, R_3$  – функції кутів  $\alpha, \beta, \gamma$ , а  $R_4$  – функція координат пружної лінії  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ .

Умови, що накладаються рівняннями (1.5), (1.6) на змінні, подамо у вигляді

$$R_1 \delta \alpha + R_2 \delta \beta + R_3 \delta \gamma + S_1 \delta \xi_0 + S_2 \delta \eta_0 + S_3 \delta \zeta_0 = 0, \quad (1.7)$$

де  $\delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma$  – можливі кутові зміщення,  $\delta \xi_0, \delta \eta_0, \delta \zeta_0$  – проекції можливого зміщення точки пружної лінії з координатою  $s$  на осі опорної системи координат.

Одержаний вираз зведемо до вигляду

$$K_1 \delta p + K_2 \delta q + K_3 \delta r + P_1 \delta x_0 + P_2 \delta y_0 + P_3 \delta z_0 = 0, \quad (1.8)$$

де  $K_1, K_2, K_3$  – деякі функції кутів  $\alpha, \beta, \gamma$ ;  $\delta\xi_0, \delta\eta_0, \delta\zeta_0$  – проекції малих змін повної кривини стрижня на осі розрахункової системи координат, причому

$$\left. \begin{aligned} \delta p &= \delta\alpha \cos \beta \cos \gamma + \delta\beta \sin \gamma, \\ \delta q &= -\delta\alpha \cos \beta \sin \gamma + \delta\beta \cos \gamma, \\ \delta r &= \delta\alpha \sin \beta + \delta\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Функції  $P_1, P_2, P_3$  мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= S_1 \cos(\bar{\xi}_0, \bar{x}_0) + S_2 \cos(\bar{\eta}_0, \bar{x}_0) + S_3 \cos(\bar{\zeta}_0, \bar{x}_0), \\ P_2 &= S_1 \cos(\bar{\xi}_0, \bar{y}_0) + S_2 \cos(\bar{\eta}_0, \bar{y}_0) + S_3 \cos(\bar{\zeta}_0, \bar{y}_0), \\ P_3 &= S_1 \cos(\bar{\xi}_0, \bar{z}_0) + S_2 \cos(\bar{\eta}_0, \bar{z}_0) + S_3 \cos(\bar{\zeta}_0, \bar{z}_0). \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Враховуючи характер можливого зміщення стрижня для ідеально гладких в'язей можна записати

$$f_{Rx}(s)\delta x_0 + f_{Ry}(s)\delta y_0 + f_{Rz}(s)\delta z_0 + m_{Rx}(s)\delta p + m_{Ry}(s)\delta q + m_{Rz}(s)\delta r = 0. \quad (1.11)$$

Домноживши вираз (1.8) на “ $-\lambda$ ” і додаючи його до (1.11), одержимо

$$\begin{aligned} &(f_{Rx} - \lambda P_1)\delta x_0 + (f_{Ry} - \lambda P_2)\delta y_0 + (f_{Rz} - \lambda P_3)\delta z_0 + (m_{Rx} - \lambda K_1)\delta p + \\ &+ (m_{Ry} - \lambda K_2)\delta q + (m_{Rz} - \lambda K_3)\delta r = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Множник  $\lambda$  вибираємо так, щоб коефіцієнти при незалежних варіаціях дорівнювали нулю. Тоді рівняння рівноваги (1.3), (1.4) можна подати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial s} + Q_z q - Q_y r &= -f'_x(s) + \lambda P_1, \\ \frac{\partial Q_y}{\partial s} + Q_x r - Q_z p &= -f'_y(s) + \lambda P_2, \\ \frac{\partial Q_z}{\partial s} + Q_y p - Q_x q &= -f'_z(s) + \lambda P_3, \\ \frac{\partial L_x}{\partial s} + L_z q - L_y r &= Q_y - m'_x(s) + \lambda K_1, \\ \frac{\partial L_y}{\partial s} + L_x r - L_z p &= -Q_x - m'_y(s) + \lambda K_2, \\ \frac{\partial L_z}{\partial s} + L_y p - L_x q &= -m'_z(s) + \lambda K_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Для визначення множника  $\lambda$ , з рівняння (1.14) знаходимо величини  $\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial q}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s}$  через  $\lambda$  і решту невідомих. Після цього підкладемо їх у рівняння в'язі (1.5) або (1.6) попередньо продиференційоване і зведене до вигляду

$$K_1^* \frac{\partial p}{\partial s} + K_2^* \frac{\partial q}{\partial s} + K_3^* \frac{\partial r}{\partial s} + K_4^* = 0, \quad (1.15)$$

де  $K_1^*, K_2^*, K_3^*, K_4^*$  – відомі функції кутів Ейлера-Крилова.

Знайдене значення  $\lambda$  підкладаємо в (1.13), (1.14) і одержуємо рівняння, що дозволяють вивчати закономірності рівноваги ділянки бурильної колони, що взаємодіє зі стінками свердловини.

## 2. Визначення кривини пружної лінії бурильної колони у свердловині довільно орієнтованій у просторі

Трасекторія глибоких свердловин може складатись з вертикальних ділянок, ділянок набору, стабілізації та скидання кривини. Для тих чи інших ділянок стовбура свердловини використовують різноманітні технічні засоби і конструкції компоновок бурильної колони.

Для вивчення закономірностей просторового викривлення стовбура свердловини введемо наступні системи координат:

$\xi, \eta, \zeta$  – нерухому (опорну) з початком в точці  $O$ ;

$\xi', \eta', \zeta'$  – пов'язану з нахилом осі свердловини у площині  $\eta O \zeta$ ;

$\xi'', \eta'', \zeta''$  – пов'язану з нахилом осі свердловини у площині  $\xi O \zeta$ ;

$x', y', z'$  – відносну;

$x, y, z$  – розрахункову.

Розглянемо чотири кутових зміщення  $\alpha, \delta, \beta$  і  $\gamma$ , т.б. додамо до кутів Ейлера-Крилова кут  $\delta$ . Кути  $\alpha$  і  $\delta$  відповідають за просторове викривлення свердловини, кут  $\beta$  – за нахил бурильної колони до осі свердловини,  $\gamma$  – за скручування виділеної ділянки труб.

Порівнюючи запропоновану нами систему кутів  $\alpha, \delta, \beta, \gamma$  з кутами Ейлера-Крилова, приходимо до висновку, що останні не характеризують вісь свердловини відносно сторін світу. Щоб кути  $\alpha, \delta, \beta, \gamma$  мали всі переваги кутів Ейлера-Крилова, зокрема дозволяли складати наближені рівняння рівноваги, необхідно зв'язати повороти  $\delta$  и  $\beta$ , т.б. виконувати їх один за одним. При цьому не важливо який з них буде першим.

Для вивчення рівноважних форм спіральнозігнутого низу бурильної колони нами запропоновано наступну схему кутових зміщень

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xi & \rightarrow & \alpha & \rightarrow & \xi' & & \xi'' & & x' & & x \\ \eta & & & & \eta' & \rightarrow & \delta & \rightarrow & \eta'' & \rightarrow & \beta & \rightarrow & y' & & y \\ \zeta & & & & \zeta' & & \zeta'' & & z' & \rightarrow & \gamma & \rightarrow & z. \end{array}$$

Спільний початок систем  $x'y'z'$  и  $xuz$  рівномірно рухається вздовж пружної лінії стрижня зі швидкістю ( $s = t$ ) рівною одиниці. При викристанні кутів Ейлера-Крилова величини розподілених сил і моментів, що виникають внаслідок накладених в'язей, необхідно визначати після нахилу ділянки свердловини з бурильними трубами всередині на кути  $\alpha$  і  $\delta$ . Кутове зміщення  $\alpha(s)$  відповідає за викривлення осі свердловини у площині  $\eta O \zeta$ , а  $\delta(s)$  – у площині  $\xi O \zeta$ .

На лініях 2 і 3 у площинах  $\xi O \zeta$  і  $\xi O \zeta$  (см. рис.1) зображені проєкції  $M'$  и  $M''$  точки  $M$ , яка належить осі свердловини. Кути  $\alpha(s)$  і  $\delta(s)$  характеризують викривлення осі свердловини в точці  $M$ , що відповідає дуговій координаті  $s$ . Складемо для введених нами кутових зміщень таблиці косинусів:

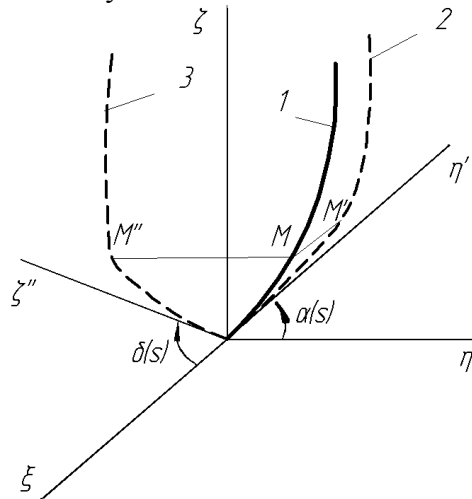
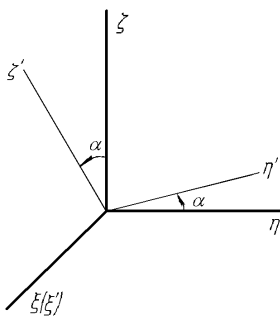


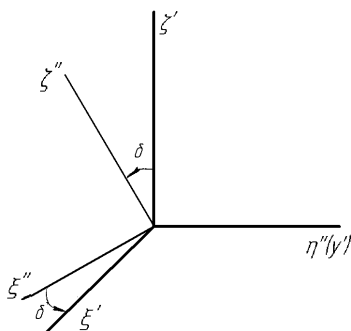
Рис.1. До визначення кутових переміщень  $\alpha(s)$  і  $\delta(s)$



між  $\xi \eta \zeta$  і  $\xi' \eta' \zeta'$

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\xi'$	1	0	0
$\eta'$	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\zeta'$	0	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$

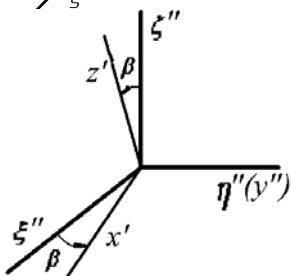
Табл.2.1



між  $\xi' \eta' \zeta'$  і  $\xi'' \eta'' \zeta''$

	$\xi'$	$\eta'$	$\zeta'$
$\xi''$	$\cos \delta$	0	$-\sin \delta$
$\eta''$	0	1	0
$\zeta''$	$\sin \delta$	0	$\cos \delta$

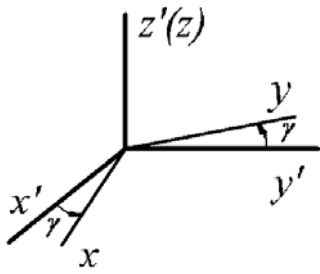
Табл.2.2



між  $\xi'' \eta'' \zeta''$  і  $x' y' z'$

	$\xi''$	$\eta''$	$\zeta''$
$x'$	$\cos \beta$	0	$-\sin \beta$
$y'$	0	1	0
$z'$	$\sin \beta$	0	$\cos \beta$

Табл.2.3

між  $x'y'z'$  і  $xyz$ 

	$x'$	$y'$	$z'$
$x$	$\cos \gamma$	$\sin \gamma$	0
$y$	$-\sin \gamma$	$\cos \gamma$	0
$z$	0	0	1

Табл.2.4

між  $\xi\eta\zeta$  і  $\xi''\eta''\zeta''$ 

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\xi''$	$\cos \delta$	$\sin \alpha \sin \delta$	$-\cos \alpha \sin \delta$
$\eta''$	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\zeta''$	$\sin \delta$	$-\sin \alpha \sin \delta$	$\cos \alpha \cos \delta$

(3.2.1)×(3.2.2)

Табл. 2.5

між  $\xi''\eta''\zeta''$  і  $xyz$ 

	$\xi''$	$\eta''$	$\zeta''$
$x$	$\cos \beta \cos \gamma$	$\sin \gamma$	$-\sin \beta \cos \gamma$
$y$	$-\cos \beta \sin \gamma$	$\cos \gamma$	$\sin \beta \sin \gamma$
$z$	$\sin \beta$	0	$\cos \beta$

(3.2.3)×(3.2.4)

Табл. 2.6

між  $\xi'\eta'\zeta'$  і  $x'y'z'$ 

	$\xi'$	$\eta'$	$\zeta'$
$x'$	$\cos \delta \cos \beta - \sin \delta \sin \beta$	0	$-\sin \delta \cos \beta - \cos \delta \sin \beta$
$y'$	0	1	0
$z'$	$\cos \delta \sin \beta + \sin \delta \cos \beta$	0	$-\sin \delta \sin \beta + \cos \delta \cos \beta$

(3.2.3)×  
×(3.2.3)

Табл. 2.7

або

	$\xi'$	$\eta'$	$\zeta'$
$x'$	$\cos(\delta + \beta)$	0	$-\sin(\delta + \beta)$
$y'$	0	1	0
$z'$	$\sin(\delta + \beta)$	0	$\cos(\delta + \beta)$

Табл. 2.7a

між  $\xi\eta\zeta$  і  $x'y'z'$ 

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	(3.2.1)×(3.2.7a) або (3.2.2)×(3.2.3)
$x'$	$\cos(\delta + \beta)$	$\sin \alpha \sin(\delta + \beta)$	$-\cos \alpha \sin(\delta + \beta)$	
$y'$	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	
$z'$	$\sin(\delta + \beta)$	$-\sin \alpha \cos(\delta + \beta)$	$\cos \alpha \cos(\delta + \beta)$	

Табл. 2.8

між  $\xi'\eta'\zeta'$  і  $xyz$

	$\xi'$	$\eta'$	$\zeta'$	(3.2.7a)×(3.2.4) або (3.2.2)×(3.2.6)
$x$	$\cos(\delta + \beta)\cos\gamma$	$\sin\gamma$	$-\sin(\delta + \beta)\cos\gamma$	
$y$	$-\cos(\delta + \beta)\sin\gamma$	$\cos\gamma$	$\sin(\delta + \beta)\sin\gamma$	
$z$	$\sin(\delta + \beta)$	$0$	$\cos(\delta + \beta)$	

Табл. 2.9

між  $\xi\eta\zeta$  і  $xyz$

(3.2.8)×(3.2.4) або (3.2.1)×(3.2.9) або (3.2.5)×(3.2.6)

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	$\cos(\delta + \beta) \times$ $\times \cos\gamma$	$\cos\alpha \sin\gamma +$ $+ \sin\alpha \sin(\delta + \beta)\cos\gamma$	$\sin\alpha \sin\gamma +$ $+ \cos\alpha \sin(\delta + \beta)\cos\gamma$
$y$	$-\cos(\delta + \beta) \times$ $\times \sin\gamma$	$\cos\alpha \cos\gamma -$ $- \sin\alpha \sin(\delta + \beta)\sin\gamma$	$\sin\alpha \cos\lambda +$ $+ \cos\gamma \sin(\delta + \beta)\sin\gamma$
$z$	$\sin(\delta + \beta)$	$-\sin\alpha \cos(\delta + \beta)$	$\cos\alpha \cos(\delta + \beta)$

Табл. 2.10

Використовуючи таблиці косинусів (2.1)-(2.10), неважко одержати результати попереднього параграфу через кути  $\alpha, \delta, \beta, \gamma$ .

Вектор повної кривини  $\bar{\omega}$  пружної лінії ділянки бурильної колони знаходимо за теоремою про додавання миттєвих обертальних рухів ( $s = t$ ) навколо осей, що перетинаються

$$\bar{\omega} = \frac{\partial\alpha}{\partial s} \bar{\xi}_0'' + \frac{\partial\delta}{\partial s} \bar{\xi}_0' + \frac{\partial\beta}{\partial s} \bar{y}_0' + \frac{\partial\gamma}{\partial s} \bar{z}_0 = \frac{\partial\alpha}{\partial s} \bar{\xi}_0'' + \left( \frac{\partial\delta}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial s} \right) \bar{y}_0' + \frac{\partial\gamma}{\partial s} \bar{z}_0, \quad (2.1)$$

де векторами з індексом "0" позначено орти введених систем координат.

Проектуючи (2.1) на осі розрахункової системи координат, одержуємо

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial\alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta)\cos\gamma + \left( \frac{\partial\delta}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial s} \right) \sin\gamma, \\ q &= -\frac{\partial\alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta)\sin\gamma + \left( \frac{\partial\delta}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial s} \right) \cos\gamma, \\ r &= \frac{\partial\alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial\gamma}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Модуль і напрямні косинуси вектора  $\bar{\omega}$  визначаються рівностями

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial\alpha}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial\delta}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial\gamma}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{\partial\alpha}{\partial s} \frac{\partial\gamma}{\partial s} \sin(\delta + \beta)}, \quad (2.3)$$



$$\cos(\overline{\omega}, \hat{x}_0) = \frac{p}{\omega}, \quad \cos(\overline{\omega}, \hat{y}_0) = \frac{q}{\omega}, \quad \cos(\overline{\omega}, \hat{z}_0) = \frac{r}{\omega}. \quad (2.4)$$

Нарівні з кутами  $\alpha, \delta, \beta, \gamma$  можна, очевидно, вводити інші схеми поворотів. Найбільш “життєздатною” нам видається наступна

$$\begin{array}{ccccccc} \xi & & \xi & \rightarrow & \alpha^* & \rightarrow & \xi'' & \rightarrow & \theta & \rightarrow & x_2 & & x \\ \eta & & \tilde{\eta} & & & & \eta'' & & & & y_2 & & y \\ \zeta & \rightarrow & \theta^* & \rightarrow & \zeta & & \zeta'' & & & & z_2 & \rightarrow & \varphi & \rightarrow & z. \end{array}$$

Тут  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$  осі проміжної системи координат з ортами  $\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0, \tilde{\zeta}_0$ .

До схеми безпосередньо входять азимутальний  $\theta^*$  і зенітний  $\alpha^*$  кути викривлення осі свердловини, що визначаються інклінометричними замірами. Необхідність у формулах зв'язку між  $\theta^*, \alpha^*$  і  $\alpha, \delta$  відповідає. Але ця система кутових зміщень має усі недоліки кутів Л.Ейлера. Користуючись викладеним вище, неважко скласти таблиці косинусів, що відповідають запропонованій системі кутів. Не роблячи цього, наведемо тільки формули для визначення вектора повної кривини та його проєкцій на осі  $x, y, z$  через кути  $\theta^*, \alpha^*, \theta, \varphi$

$$\overline{\omega} = \frac{\partial \theta^*}{\partial s} \tilde{\xi}_0 + \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} \tilde{\xi}_0'' + \frac{\partial \theta}{\partial s} (\overline{x_2})_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \overline{z}_0 = \frac{\partial \theta^*}{\partial s} \tilde{\xi}_0 + \left( \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) (\overline{x_2})_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \overline{z}_0, \quad (2.5)$$

$$p = \frac{\partial \theta^*}{\partial s} \sin(\alpha^* + \theta) \sin \varphi + \left( \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \cos \varphi,$$

$$q = \frac{\partial \theta^*}{\partial s} \sin(\alpha^* + \theta) \cos \varphi - \left( \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \sin \varphi, \quad (2.6)$$

$$r = \frac{\partial \theta^*}{\partial s} \cos(\alpha^* + \theta) + \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Вирази для знаходження модуля и напрямних косинусів вектора повної кривизни матимуть вигляд

$$\omega = \sqrt{\left( \frac{\partial \theta^*}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial s} + 2 \frac{\partial \theta^*}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cos(\alpha^* + \theta)}, \quad (2.7)$$

$$\cos(\overline{\omega}, \hat{x}_0) = \frac{p}{\omega}, \quad \cos(\overline{\omega}, \hat{y}_0) = \frac{q}{\omega}, \quad \cos(\overline{\omega}, \hat{z}_0) = \frac{r}{\omega_0}. \quad (2.8)$$

### 3. Взаємозв'язок між азимутальним і зенітним кутами та кутам $\alpha, \delta$ .

#### Інтенсивність викривлення

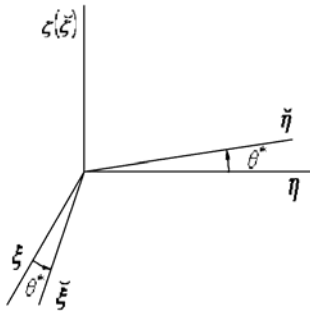
У практиці буріння свердловин систематичний контроль за просторовим положенням осі свердловини проводять за допомогою спеціальних пристроїв, які дозволяють вимірювати азимутальний  $\theta^*$  і зенітний  $\alpha^*$  кути.

Для подання результатів вимірювань через кути Ейлера-Кривола необхідно встановити залежності між кутами  $\theta^*, \alpha^*$  і  $\alpha, \delta$ .

Щоб сумістити похилоскеровану свердловину, що характеризується азимутальним і зенітним кутами, з положенням вертикальної осі після поворотів на кути  $\alpha$ ,  $\delta$  запропоновано наступну схему

$$\begin{array}{l} \xi \rightarrow \theta^* \rightarrow \check{\xi} \qquad \qquad \xi'' \\ \eta \qquad \qquad \check{\eta} \qquad \qquad \eta'' \\ \zeta \qquad \qquad \check{\zeta} \rightarrow \alpha^* \rightarrow \zeta'' \end{array}$$

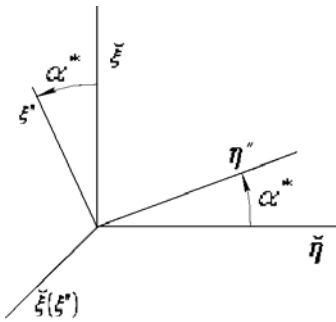
Нижче наводяться таблиці косинусів між розглядуваними осями:



між  $\xi\eta\zeta$  і  $\check{\xi}\check{\eta}\check{\zeta}$

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\check{\xi}$	$\cos\theta^*$	$\sin\theta^*$	0
$\check{\eta}$	$-\sin\theta^*$	$\cos\alpha^*$	0
$\check{\zeta}$	0	0	1

Табл.3.1



між  $\check{\xi}\check{\eta}\check{\zeta}$  і  $\xi''\eta''\zeta''$

	$\check{\xi}$	$\check{\eta}$	$\check{\zeta}$
$\xi''$	1	0	0
$\eta''$	0	$\cos\alpha^*$	$\sin\alpha^*$
$\zeta''$	0	$-\sin\alpha^*$	$\cos\alpha^*$

Табл.3.2

між  $\xi\eta\zeta$  і  $\xi''\eta''\zeta''$  (3.1)×(3.2)

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\xi''$	$\cos\theta^*$	$\sin\theta^*$	0
$\eta''$	$-\sin\theta^* \cos\alpha^*$	$\cos\theta^* \cos\alpha^*$	$\sin\alpha^*$
$\zeta''$	$\sin\theta^* \sin\alpha^*$	$-\cos\theta^* \sin\alpha^*$	$\cos\alpha^*$

Табл. 3.3

Вектор повної кривини осі просторововикривленої свердловини  $\tilde{\omega}$  можна подати залежностями

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial\alpha}{\partial s} \bar{\xi}'_0 + \frac{\partial\delta}{\partial s} \bar{\eta}''_0, \tag{3.1}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial\theta^*}{\partial s} \bar{\zeta}''_0 + \frac{\partial\alpha^*}{\partial s} \bar{\xi}''_0. \tag{3.2}$$

Проектуючи (3.1) і (3.2) на осі опорної системи і прирівнюючи результати, одержимо

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} \cos \theta^* , \\ \frac{\partial \delta}{\partial s} \cos \alpha &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} \sin \theta^* , \\ \frac{\partial \delta}{\partial s} \sin \alpha &= \frac{\partial \theta^*}{\partial s} . \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Додаючи квадрати першої і другої залежностей системи (3.3), будемо мати

$$\left( \frac{\partial \alpha^*}{\partial s} \right)^2 = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial \delta}{\partial s} \cos \alpha \right)^2 . \quad (3.4)$$

На основі (3.3), (3.4) запишемо

$$\theta^* = \int \frac{\partial \delta(s)}{\partial s} \sin \alpha(s) ds + \theta_0^* , \quad (3.5)$$

$$\alpha^* = \int \left[ \frac{\partial \alpha(s)}{\partial s} + \frac{\partial \delta(s)}{\partial s} \cos \alpha(s) \right] ds + \alpha_0^* . \quad (3.6)$$

Попередньо додаючи квадрати лівих і правих частин другої і третьої залежностей системи (3.3), знайдемо наступні взаємозв'язки між кутами  $\alpha, \delta$  і кутами  $\alpha^*, \theta^*$

$$\alpha = \int \frac{\partial \alpha^*(s)}{\partial s} \cos \theta^*(s) ds + \alpha_0 , \quad (3.7)$$

$$\delta = \int \left[ \frac{\partial \alpha^*(s)}{\partial s} \sin \theta^*(s) + \frac{\partial \theta^*(s)}{\partial s} \right] ds + \delta_0 . \quad (3.8)$$

У виразах (3.5)-(3.8) початкові значення відповідних параметрів позначено через  $\theta_0^*, \alpha_0^*, \alpha_0, \delta_0$ .

Одержані залежності дозволяють визначати параметри гвинтової лінії, перерізуючі сили і моменти, як функції дугової координати  $s$  пружної лінії, азимута  $\theta^*$  і зенітного кута  $\alpha^*$  свердловини.

Декілька слів про приріст просторового кута викривлення  $\Delta i$ . За формулою М.М. Александра

$$\Delta i = \sqrt{(\Delta \alpha^*)^2 + (\Delta \theta^* \sin \alpha_{\text{серед.}}^*)^2} , \quad (3.9)$$

де  $\Delta \alpha^*$  – модуль різниці кутів на початку  $\alpha_1^*$  і в кінці  $\alpha_2^*$  інтервалу  $l$ ;  $\Delta \theta^*$  – модуль різниці азимутальних кутів  $\theta_1^*$  і  $\theta_2^*$ ;  $l$  – відстань між точками, в яких інклінометром замірюють  $\alpha^*$  и  $\theta^*$ ;  $\alpha_{\text{серед.}}^*$  – середнє значення зенітного кута.

Якщо різниця початкового і кінцевого значень азимута перевищує  $360^\circ$ , тоді

$$\Delta \theta^* = (360^\circ - \theta_2^*) + \theta_1^* . \quad (3.10)$$

За допомогою (3.5), (3.6) можна виразити  $\Delta i$  через  $\alpha, \delta$  і говорити, користуючись [3] та одержаним виразом, про інтенсивність викривлення, визначати притискуючі сили і сили опору за різних умов буріння, а також аналітично знаходити власну вагу ділянки бурильної колони у викривленій свердловині.

#### 4. Кінематика спіральновигнутої ділянки бурильної колони

За певного поєднання навантажень ділянка бурильної колони набуває рівноважної форми у вигляді спіралі. Для встановлення зв'язку між рухом бурильної колони у свердловині орієнтованій довільно у просторі і параметрами, що характеризують її пружний стан, припустимо, що ділянка колони рухається поступально в напрямі осі свердловини зі швидкістю  $\bar{v}_s$  і обертається навколо цієї осі з кутовою швидкістю  $\bar{\Omega}$ . Остання є швидкістю обертання розрахункової системи координат, орти  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  якої – функції часу  $t$  і дугової координати  $s$ .

Для похідних від ортів за часом справджується співвідношення

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial t} = \bar{\Omega} \times \bar{x}_0, \quad \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial t} = \bar{\Omega} \times \bar{y}_0, \quad \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial t} = \bar{\Omega} \times \bar{z}_0. \quad (4.1)$$

Проекції вектора  $\bar{\Omega}$  на осі розрахункової системи координат подамо через кутові зміщення  $\alpha(s, t), \delta(s, t), \beta(s, t), \gamma(s, t)$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \sin \gamma, \\ \Omega_y &= -\frac{\partial \alpha}{\partial t} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma, \\ \Omega_z &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Встановимо зв'язок між векторами  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\Omega}$ , попередньо зауваживши, що абсолютні похідні згаданих векторів відповідно по  $s$  і  $t$  рівні локальним.

Оскільки

$$\frac{\partial' \bar{\Omega}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial s} - \bar{\omega} \times \bar{\Omega}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial' \bar{\omega}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} - \bar{\Omega} \times \bar{\omega}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial' \bar{\Omega}}{\partial s} - \frac{\partial' \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{\omega} = 0, \quad (4.5)$$

$$\text{то } \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} - \bar{\Omega} \times \bar{\omega} = 0. \quad (4.6)$$

Для плоскої кривої

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial s} = \frac{\partial \omega_z}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Зв'язок між лінійною швидкістю руху стрижня  $\bar{v}$ , вектором повної кривини лінії  $\bar{\omega}$  і кутовою швидкістю обертання ортів розрахункової системи  $\bar{\Omega}$  встановлюється за допомогою кінематичного рівняння вигляду

$$\frac{\partial' \bar{v}}{\partial s} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\Omega} \times \bar{z}_0. \quad (4.8)$$

У проекціях на осі розрахункової системи координат вираз (4.8) набуде вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial s} + v_z q - v_y r &= \Omega_y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial s} + v_x r - v_z p &= -\Omega_x, \\ \frac{\partial v_z}{\partial s} + v_y p - v_x q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

На рис.2 зображено ділянку бурильної колони 1 у свердловині 2. Точкою  $M$  позначено поточну координату пружної лінії 3.

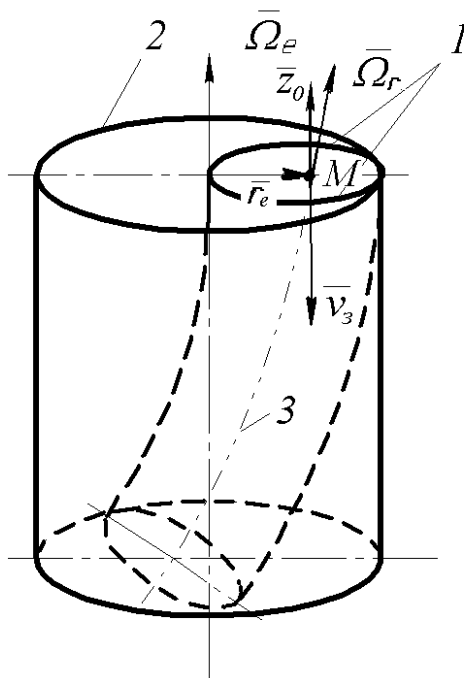


Рис.2. До визначення швидкості  $\bar{v}$  виділеної ділянки колони

Подамо швидкість руху виділеної ділянки бурильної колони через усереднену швидкість поглиблення вибою свердловини

$$\bar{v}_e = -v_e \bar{z}_0, \quad (4.10)$$

а також кутову швидкість обертання  $\bar{\Omega}_e$  колони бурильних труб навколо осі свердловини 4 та кутову швидкість обертання  $\bar{\Omega}_r$  колони навколо власної осі 5. Використовуючи формулу Л. Ейлера, запишемо

$$\bar{v} = \bar{\Omega}_e \times \bar{r}_e + \bar{v}_3 + \bar{\Omega}_r \times \bar{r}_r. \quad (4.11)$$

Величина  $r_e$  рівна піврізниці діаметрів свердловини і бурильної труби, а  $r_r = 0$ . З урахуванням цього запишемо (4.11) в проекціях на осі розрахункової системи координат

$$\begin{aligned} v_x &= \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma, \\ v_y &= \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma, \\ v_z &= -v_3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Відзначимо, що кут закручування  $\gamma$  залежить від  $\bar{\Omega}_r$ . Величина кута  $\gamma$  потрібна для правильного вибору кута довороту відхиляючого пристрою при похилоскерваному бурінні.

Підкладаючи (4.12) в (4.9), одержимо

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma \right) + v_z q - v_y r &= \Omega_y, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left( \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \right) + v_z r - v_x p &= -\Omega_x, \\ -\frac{\partial v_3}{\partial s} + v_y p - v_x q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Одержані співвідношення дозволяють визначати швидкість довільної координати пружної лінії за поступального і обертального рухів спіральновигнутої бурильної колони.

### 5. Рівняння рівноваги невідних ділянок бурильної колони у свердловині орієнтованій довільно в просторі

Виведемо залежності для визначення сил у перерізах бурильної колони за її взаємодії зі стінками свердловини. Нехай ділянка колони під дією кінцевих сил і моментів набуває просторової орієнтації, обертається навколо осі свердловини з переносною кутовою швидкістю  $\bar{\Omega}_e$  і навколо власної осі з відносною швидкістю  $\bar{\Omega}_r$ , а також рухається поступально в напрямі осі свердловини з переносною швидкістю  $\bar{v}_e$ . Вісь пружної лінії ділянки колони, а також розрахункова і опорна системи координат у вертикальній і похилій свердловинах зображені на рис.3.

Запишемо складові розподіленої сили

$$\bar{q} = -\rho g \bar{\zeta}_0 \quad (5.1)$$

в проекціях на осі опорної і розрахункової систем координат. Вектор  $\bar{q}$  є стежною силою напрямленою паралельно осі  $\zeta$ , тому

$$q_\xi = 0, \quad q_\eta = 0, \quad q_\zeta = -\rho g, \quad (5.2)$$

де  $\rho = m/l$  – маса одиниці довжини бурильної колони,  $m$  – маса виділеної ділянки труб довжини  $l$ ,  $g$  – прискорення земного тяжіння.

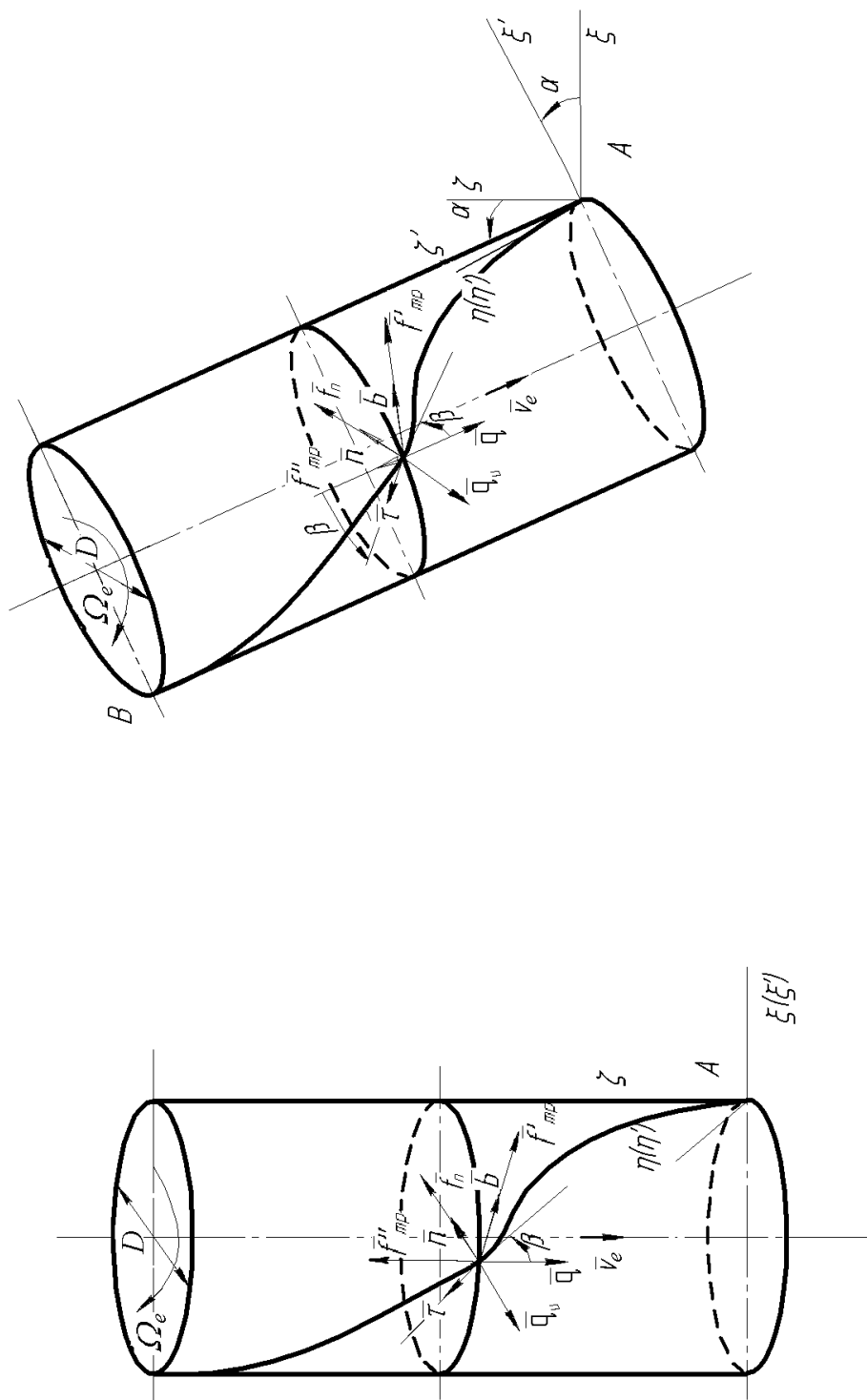


Рис. 3. До визначення проєкції складових головних векторів зовнішніх сили і моменту, прикладених до ділянки колони у вертикальній (а) і похилій (б) свердловинах

Проектуючи вектор  $\bar{q}$  на осі розрахункової системи координат, одержимо

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -\rho g(\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma), \\ q_y &= -\rho g(\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma), \\ q_z &= -\rho g \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Якщо в (5.3) підкласти  $\alpha = 0$ , то одержимо проекції розподілених по довжині сил, що діють на зігнуту у вертикальній свердловині гвинтову спіраль, тобто на виділену ділянку бурильної колони.

Нормальна складова  $\bar{q}_n$  розподіленої сили урівноважується реакцією стінки свердловини

$$\bar{f}_n = \bar{n}(q_x \cos \gamma - q_y \sin \gamma) = \bar{n} \rho g \sin \beta = \bar{n} f_n. \quad (5.4)$$

Тангенціальна складова  $\bar{q}_\tau$  зінтегрована по довжині виділеної ділянки пружної лінії, урівноважується кінцевою силою, тобто осьюовою складовою реакції вибою свердловини.

Під час руху ділянки колони у свердловині виникає розподілена по довжині сила тертя  $\bar{f}_{mp}$ , яку можна подати сумою двох доданків

$$\bar{f}_{mp} = \bar{f}'_{mp} + \bar{f}''_{mp}, \quad (5.5)$$

де  $\bar{f}'_{mp}, \bar{f}''_{mp}$  – складові розподіленої сили тертя, що виникають відповідно при обертанні колони та поглибленні вибою свердловини і визначаються за формулами

$$f'_{mp} = \mu' f_n + f'_0, \quad (5.6)$$

$$f''_{mp} = \mu'' f_n + f''_0. \quad (5.7)$$

Відмінність у значеннях  $\mu'$  і  $\mu''$ ,  $f'_0$  і  $f''_0$  зумовлена анізотропією породи.

Напрямок сили тертя  $\bar{f}'_{mp}$  при обертанні колони за і проти руху годинникової стрілки зображено на рис.4а і 4б.

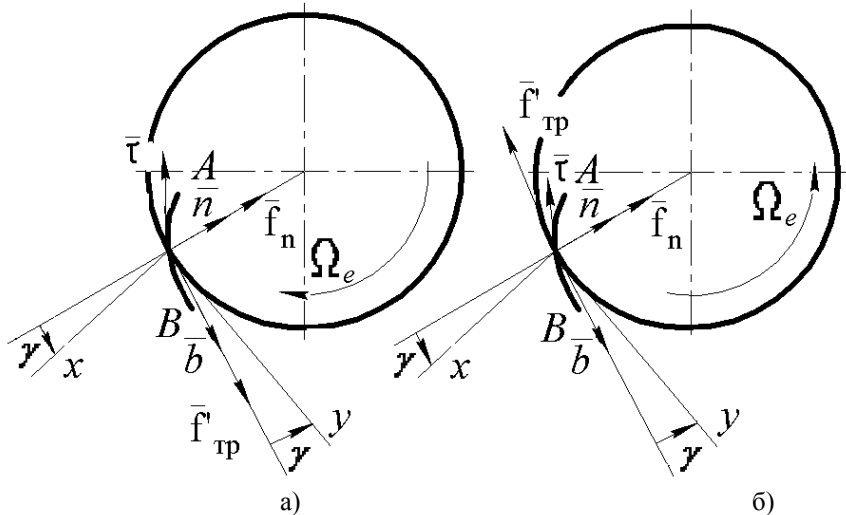


Рис.4. До визначення напрямку сили  $\bar{f}'_{mp}$



У загальному випадку напрям вектора  $\vec{f}'_{mp}$  залежить від співвідношення векторів кутової швидкості обертання навколо осі свердловини  $\vec{\Omega}_e$  та навколо власної осі бурильної колони  $\vec{\Omega}_r$ . Вектор абсолютної кутової швидкості  $\vec{\Omega}$  визначається за теоремою про додавання миттєвих обертальних рухів навколо осей, що перетинаються

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_e + \vec{\Omega}_r. \quad (5.8)$$

За перекочування колони стінкою свердловини в бік протилежний кутовому зміщенню обертача, величина лінійної швидкості точки взаємодії колони зі стінкою визначається формулою

$$\tilde{v}_a = \Omega_e \frac{D}{2} - \Omega_r \frac{d}{2}, \quad (5.9)$$

де  $D$  – діаметр свердловини,  $d$  – діаметр бурильної колони.

Якщо  $\tilde{v}_a > 0$ , то напрям сили  $\vec{f}'_{mp}$  співпадає з напрямом бінормалі, якщо  $\tilde{v}_a < 0$  – протилежний йому. Коли ж  $\tilde{v}_a = 0$ , то  $\vec{f}'_{mp} = 0$ .

Розподілене інерційне навантаження, що пов'язане з відцентровими силами і виникає внаслідок обертання колони навколо осі свердловини з кутовою швидкістю  $\Omega_e$ , складе

$$q_u = \frac{q(D-d)}{2g} \Omega_e^2 = 0,5\rho(D-d)\Omega_e^2. \quad (5.10)$$

Тепер можна, користуючись принципом Германа-Ейлера-д'Аламбера, одержати векторні рівняння для визначення внутрішніх сил і моментів

$$\vec{Q} = -\int(\vec{q} + \vec{f}_n + \vec{f}_{mp} + q_u)ds + \vec{C}_1 = \int \vec{F}ds + \vec{C}_1, \quad (5.11)$$

$$\vec{L} = -\int(\vec{z}_0 + \vec{Q} + \vec{l} + \vec{f}_{mp})ds + \vec{C}_2 = \int \vec{M}ds + \vec{C}_2. \quad (5.12)$$

Для свердловини орієнтованої довільно у просторі проекції сили  $\vec{F}$  і моменту  $\vec{M}$  на осі розрахункової системи координат визначаються наступним чином

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -q_x + (f_n - q_u) \cos \gamma - f'_{mp} \sin \gamma, \\ F_y &= -q_y - (f_n - q_u) \sin \gamma - f'_{mp} \cos \gamma, \\ F_z &= -q_z - f''_{mp} \cos \beta; \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Q_y + f''_{mp} \frac{d}{2} \cos \beta \sin \gamma, \\ M_y &= -Q_z + f''_{mp} \frac{d}{2} \cos \beta \cos \gamma, \\ M_z &= -f''_{mp} \frac{d}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Для вертикальної свердловини за  $\tilde{v}_a > 0$  будемо мати

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -0,5\rho(D-d)\Omega_e^2 \cos \gamma - (\mu'\rho g \sin \beta + f'_0) \sin \gamma, \\ F_y &= 0,5\rho(D-d)\Omega_e^2 \sin \gamma - (\mu'\rho g \sin \beta + f'_0) \cos \gamma, \\ F_z &= \rho g \cos \beta - (\mu''\rho g \sin \beta + f''_0) \cos \beta; \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Q_y + 0,5d(\mu''\rho g \sin \beta + f''_0) \cos \beta \sin \gamma, \\ M_y &= -Q_x + 0,5d(\mu''\rho g \sin \beta + f''_0) \cos \beta \cos \gamma, \\ M_z &= -0,5d(\mu'\rho g \sin \beta + f'_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Доданки у правих частинах (5.14) одержуємо, розкриваючи визначники

$$\bar{z}_0 \times \bar{Q} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\bar{l} \times \bar{f}_{mp} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{d}{2} \cos \gamma & -\frac{d}{2} \sin \gamma & 0 \\ f'_{mp} \sin \gamma & f'_{mp} \cos \gamma & f''_{mp} \cos \beta \end{vmatrix}. \quad (5.18)$$

Для похилої свердловини залежності (5.13), (5.14) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho g \sin \alpha \sin \gamma - 0,5\rho(D-d)\Omega_e^2 \cos \gamma - \\ &\quad - (\mu'\rho g \cos \alpha \sin \beta + f'_0) \sin \gamma, \\ F_y &= \rho g \sin \alpha \sin \gamma + 0,5\rho(D-d)\Omega_e^2 \sin \gamma - \\ &\quad - (\mu'\rho g \cos \alpha \sin \beta + f'_0) \cos \gamma, \\ F_z &= \rho g \cos \alpha \cos \beta - (\mu''\rho g \cos \alpha \sin \beta + f''_0) \cos \beta; \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Q_y + 0,5d(\mu''\rho g \cos \alpha \sin \beta + f''_0) \cos \beta \sin \gamma, \\ M_y &= -Q_x + 0,5d(\mu''\rho g \cos \alpha \sin \beta + f''_0) \cos \beta \cos \gamma, \\ M_z &= -0,5d(\mu'\rho g \cos \alpha \sin \beta + f'_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Вирази (5.15)-(5.20) неважко переписати і для  $\tilde{v}_a < 0$ . Через очевидність необхідних перетворень ці співвідношення тут не наводимо.

Якщо переносна кутова швидкість  $\bar{\Omega}_e$  і сила тертя  $\bar{f}_{mp}$  дорівнюють нулю (буріння з вибійним двигуном), то для колони у вигляді гвинтової спіралі, що знаходиться у вертикальній свердловині, одержимо

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -q_x + f_n \cos \gamma = 0, \\ F_y &= -q_y - f_n \sin \gamma = 0, \\ F_z &= -q_z - f''_{mp} \cos \beta = \rho g \cos \beta - (\mu''\rho g \sin \beta + f''_0) \cos \beta; \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

$$M_x = Q_y + f_{mp} \frac{d}{2} \cos \beta \sin \gamma = Q_y + 0,5d(\mu'' \rho g \sin \beta + f_0'') \cos \beta \sin \gamma,$$

$$M_y = -Q_x + f_{mp}'' \frac{d}{2} \cos \beta \cos \gamma = -Q_x + 0,5d(\mu'' \rho g \sin \beta + f_0'') \cos \beta \cos \gamma, \quad (5.22)$$

$$M_z = 0.$$

Якщо  $\alpha \neq 0$ , то ці рівняння набудуть вигляду

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho g \sin \alpha \sin \gamma, \\ F_y &= \rho g \sin \alpha \cos \gamma, \\ F_z &= \rho g \cos \alpha \cos \beta - (\mu'' \rho g \cos \alpha \sin \beta + f_0'') \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Q_y + 0,5d(\mu'' \rho g \sin \beta + f_0'') \cos \beta \sin \gamma, \\ M_y &= -Q_x + 0,5d(\mu'' \rho g \sin \beta + f_0'') \cos \beta \cos \gamma, \\ M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Залежності (5.13)-(5.24) можна використати для дослідження просторових форм рівноваги невеличких ділянок бурильної колони за очищення свердловини газом або повітрям. Вплив їхнього тиску на стійкість бурильної колони можна оцінити так само, як і вплив тиску промивальної рідини.

#### 6. Вивчення взаємодії бурильної колони зі свердловиною з урахуванням впливу промивальної рідини

Включення до рівняння рівноваги (1.1) складових, що враховують рух промивальної рідини в трубі і затрубному просторі, дає можливість зібрати разом весь комплекс чинників, що визначають з високою точністю перерізуючи сили і моменти, силу тиску труби на стінку свердловини, кривину і кручення пружної лінії бурильної колони.

Абсолютні швидкості промивальної рідини в трубі і затрубному просторі подамо відповідно сумою відносних і переносних складових

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1^r + \bar{v}_1^e, \quad (6.1)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_2^r + \bar{v}_2^e. \quad (6.2)$$

Відносні складові швидкостей  $\bar{v}_1^r$  і  $\bar{v}_2^r$  пов'яжемо з рухом рідини в трубі та затрубному просторі, коли швидкість поглиблення вибою рівна нулю, а переносні  $\bar{v}_1^e$  і  $\bar{v}_2^e$  – з переміщенням колони вздовж осі свердловини.

Якщо враховується розтяг стрижня, то відносні складові швидкостей є функціями часу  $t$  і дугової координати пружної лінії  $s$ .

Якщо розтяг стрижня не враховується, то ці складові є функціями тільки часу  $t$ .

Визначимо взаємозв'язки між параметрами руху промивальної рідини, ділянки бурильної колони і параметрами пружної лінії. Знайдемо повну похідну радіус-вектора точок осьової лінії течії рідини в часі

$$\frac{d\bar{r}[s(t), t]}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (6.3)$$

Перший доданок є локальною похідною і характеризує зміну в часі координат перерізу колони при фіксованому значенні дугової координати  $s$ . Другий доданок визначає конвективну (переносну) похідну і відповідає за зміну координат точок осьової лінії течії рідини. Похідна  $\frac{\partial s}{\partial t}$  відповідає за переносну швидкість промивальної рідини.

Рівняння (6.3) для рухомої рідини в трубі перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial \bar{r}[s(t), t]}{\partial t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} v_1^r, \quad (6.4)$$

а для затрубної рухомої рідини

$$\frac{\partial \bar{r}[s(t), t]}{\partial t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} v_2^r. \quad (6.5)$$

Знайдемо абсолютні прискорення усталеного руху рідини в трубі та затрубному просторі

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} - 2v_1^r \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial s \partial t} + (v_1^r)^2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial s^2}, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} + 2v_2^r \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial s \partial t} + (v_2^r)^2 \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial s^2}. \quad (6.7)$$

За сталої витрати рідини відносні швидкості  $v_1^r$  і  $v_2^r$  будемо вважати постійними, т.б.

$$\frac{\partial' v_1^r}{\partial t} = \frac{\partial' v_2^r}{\partial t} = 0, \quad (6.8)$$

тому залежності (6.6), (6.7) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{v}_1^e + \bar{v}_1^r)}{\partial t} = \frac{\partial' \bar{v}_1^e}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{v}_1^e + 2\bar{\Omega} \times \bar{v}_1^r - \frac{\partial' \bar{v}_1^r}{\partial s} v_1^r - (\bar{\omega} \times \bar{v}_1^r) v_1^r, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{v}_2^e + \bar{v}_2^r)}{\partial t} = \frac{\partial' \bar{v}_2^e}{\partial t} + \bar{\Omega} \times \bar{v}_2^e + 2\bar{\Omega} \times \bar{v}_2^r - \frac{\partial' \bar{v}_2^r}{\partial s} v_2^r - (\bar{\omega} \times \bar{v}_2^r) v_2^r. \quad (6.10)$$

У нашому випадку

$$\bar{v}_1^r(s, t) = -\bar{v}_1^r \bar{z}_0, \quad (6.11)$$

$$\bar{v}_2^r(s, t) = \bar{v}_2^r \bar{z}_0. \quad (6.12)$$

Складові  $\bar{\Omega}$  визначаються виразами (4.2), а складові  $\bar{\omega}$  – виразами (2.2), в яких повні похідні по  $s$  замінено частинними.

Враховуючи (4.10)-(4.12), спроектуємо (6.9), (6.10) на осі розрахункової системи координат

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma \right) - \Omega_y v_3 - \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \cdot \Omega_z - 2\Omega_y v_1^r + (v_1^r)^2 p, \\ \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)_y &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \right) + \Omega_x v_3 + \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma \cdot \Omega_z + 2\Omega_x v_1^r - (v_1^r)^2 p, \\ \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)_z &= -\frac{\partial v_3}{\partial t} + \Omega_x \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma - \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma \cdot \Omega_y + v_1^r \frac{\partial v_1^r}{\partial s}; \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)_x &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma \right) - \Omega_y v_3 - \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \cdot \Omega_z + 2\Omega_y v_3^r + (v_2^r)^2 q, \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)_y &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \right) + \Omega_x v_3 + \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma \cdot \Omega_z - 2\Omega_x v_2^r - (v_2^r)^2 p, \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)_z &= -\frac{\partial v_3}{\partial t} + \Omega_x \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma - \Omega_e \frac{D-d}{2} \sin \gamma \cdot \Omega_y + v_2^2 \frac{\partial v_2^r}{\partial s}. \end{aligned} \right\} (6.14)$$

Одержані взаємозв'язки (6.13), (6.14) необхідні для урахування інерційних складових руху рідини при складанні рівнянь умовної рівноваги ділянки бурильної колони у свердловині.

Звернемось до зображення на рис.5 ділянки бурильної колони, для якої

$$\bar{v}_3 = 0, \quad \bar{\Omega}_e = \bar{\Omega}_r = 0. \quad (6.15)$$

Оскільки колона нерухома, то усі згадувані нами параметри залежать тільки від кутової координати  $s$  пружної лінії.

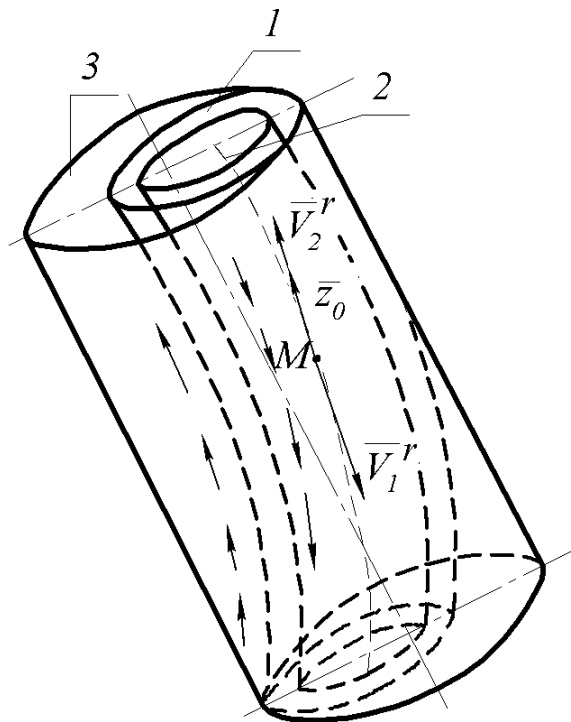


Рис.5. До оцінки впливу промивальної рідини для нерухокої ділянки бурильної колони

Для опису руху достатньо знати тільки положення виділеної ділянки труби в часі та внутрішні силу і момент у фіксованому перерізі. Розділимо рух ділянки труби на відносний та переносний.

У нашому випадку рух рідини розглядається разом з рухом труби. Якщо рідина нестислива, то відносна швидкість не залежить від руху труби.

Виділимо ділянку труби 1, рідину 2, що рухається в трубі, та промивальну рідину 3 (разом зі шламом), що рухається в затрубному просторі, і запишемо, користуючись принципом д'Аламбера, рівняння рівноваги сил

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial s} + \bar{f}_1^e + \bar{f}_2^e = \bar{F}, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial(S_1 p_1 \bar{z}_0)}{\partial s} + \bar{f}_1^e = \bar{F}_1, \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial(S_2 p_2 \bar{z}_0)}{\partial s} + \bar{f}_2^e = \bar{F}_2, \quad (6.18)$$

де  $\bar{f}_1^e$ ,  $\bar{f}_2^e$  – розподілені по довжині сили взаємодії відповідно між трубою і рідиною в ній та між трубою і затрубною рідиною;  $S_1$ ,  $p_1$  – площа отвору і тиск рідини в трубі;  $S_2$ ,  $p_2$  – площа поперечного перерізу затрубного простору і тиск рідини в ньому;  $\bar{z}_0$  – орт дотичної до пружної лінії бурильної колони. Вектори  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$  визначаються за формулами

$$\bar{F}_1 = m_1 g \bar{z}_0 - \psi_1 m_1 \frac{d\bar{v}_1}{dt}, \quad (6.19)$$

$$\bar{F}_2 = m_2 g \bar{z}_0 - \psi_2 m_2 \frac{d\bar{v}_2}{dt}, \quad (6.20)$$

де  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  – коректувальні коефіцієнти, що залежать від дугової координати  $s$ . У першому приближенні їх можна прийняти постійними.

Для визначення  $\bar{f}_1^e$  і  $\bar{f}_2^e$  можна скористатись теоремою Ейлера про рівність нулю векторної суми головних векторів об'ємних і поверхневих сил та векторів кількостей руху мас рідини, що входить і виходить через два якихось перерізи труби за одиницю часу.

Якщо осі бурильної колони і свердловини не співпадають, то для визначення розподілених по довжині сил взаємодії труби і затрубної рідини можна скористатись міркуваннями, наведеними в роботі [4]. Ексцентричний кільцевий простір (рис.6) розбивається на сектори, кожен з яких розглядається як еквівалентна часина відповідного кільцевого простору. Відстані між стінкою свердловини і трубою приймаються рівними різниці радіусів свердловини і частинами кільця, що відповідає розглядуваному сектору.

Радіус  $R_2$  утворює в кожному секторі однакові області. В одному з секторів рідина може мати ламінарний характер течії, в другому – турбулентний, в третьому – залишатись нерухомою. За основу взято припущення, що течія в одному секторі не впливає на течію в сусідньому секторі.

Є тільки дві спільних характеристики секторів: градієнт руху рідини в кільцевому просторі ті діаметр свердловини.

Якщо  $S_1 = const$ ,  $S_2 = const$  і рух рідини стаціонарний, то

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = -\frac{d\bar{v}_1}{ds} v_1^r = (v_1^r)^2 \frac{d\bar{z}_0}{ds} = (v_1^r)^2 (\bar{\omega} \times \bar{z}_0), \quad (6.21)$$

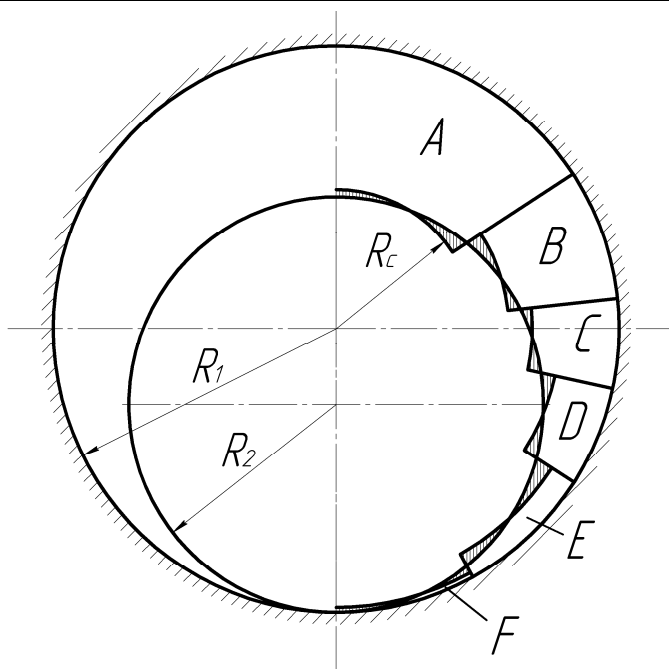


Рис.6. Поділ на сектори ексцентричного кільцевого простору

Рівності (6.21), (6.22) одержано на підставі подання через змінні Ейлера повних похідних від швидкостей  $\bar{v}_1(s,t)$  і  $\bar{v}_2(s,t)$  з урахуванням (6.8).

Подамо маси  $m_1$  і  $m_2$  через густини промивальної рідини в трубі і затрубної рідини (з урахуванням шламу)

$$m_1 = \frac{\rho_1}{g} S_1, \quad (6.23)$$

$$m_2 = \frac{\rho_2}{g} S_2 \quad (6.24)$$

Виключаючи з (6.16)-(6.18) розподілені по довжині сили  $\bar{f}_1^b$  і  $\bar{f}_2^b$ , приходимо до одного векторного рівняння

$$\frac{d\bar{Q}^*}{ds} = \bar{F}^*, \quad (6.25)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{Q}^* &= \bar{Q} - (S_1 p_1 + S_2 p_2) \cdot \bar{z}_0 - \left[ \psi_1 m_1 (v_1^r)^2 + \psi_2 m_2 (v_2^r)^2 \right] \cdot \bar{z}_0 = \\ &= Q_x \bar{x}_0 + Q_y \bar{y}_0 + \left[ Q_z - S_1 p_1 - S_2 p_2 - \psi_1 \frac{\rho_1}{g} S_1 (v_1^r)^2 - \psi_2 \frac{\rho_2}{g} S_2 (v_2^r)^2 \right] \cdot \bar{z}_0 = \\ &= Q_x^* \bar{x}_0 + Q_y^* \bar{y}_0 + Q_z^* \bar{z}_0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}^* &= \bar{F} - g(m_1 + m_2)\bar{\zeta}_0 = \{F_x - (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2)\} \times \\ &\times [\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin(\delta + \beta) \cos \gamma] \bar{x}_0 + \{F_y - (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2)\} \times \\ &\times [\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin(\delta + \beta) \sin \gamma] \bar{y}_0 + [F_z - (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2) \times \\ &\times \cos \alpha \cos(\delta + \beta)] \bar{z}_0 = F_x^* \bar{x}_0 + F_y^* \bar{y}_0 + F_z^* \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Для одержання (6.26), (6.27) використано співвідношення (6.15)-(6.24) і таблиця косинусів 2.10. Складові  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  головного вектора зовнішніх сил визначаються за формулами (5.13). Для ідеальної рідини при  $S_1 = const$ ,  $S_2 = const$  вектори  $\bar{f}_1^e$ ,  $\bar{f}_2^e$  ортогональні  $\bar{z}_0$ .

Зв'яжемо тиск зі швидкістю ідеальної рідини

$$p_1 + \frac{m_1(v_1^r)^2}{2S_1} + \frac{m_1 g \zeta}{S_1} = const, \quad (6.28)$$

$$p_2 + \frac{m_2(v_2^r)^2}{2S_2} + \frac{m_2 g \zeta}{S_2} = const, \quad (6.29)$$

де  $\zeta$  – апліката центра ваги виділеної ділянки колони в опорній системі координат (відстань від вибою свердловини до центра ваги ділянки).

Якщо  $S_1$ ,  $S_2$  сталі, то (6.28), (6.29) з урахуванням (6.23), (6.24) перепишуться у вигляді

$$P_1 + \frac{\rho_1 S_1}{2g} (v_1^r)^2 + \rho_1 S_1 \zeta = const, \quad (6.30)$$

$$P_2 + \frac{\rho_2 S_2}{2g} (v_2^r)^2 + \rho_2 S_2 \zeta = const, \quad (6.31)$$

де

$$P_1 = p_1 S_1, \quad (6.32)$$

$$P_2 = p_2 S_2. \quad (6.33)$$

Вектори  $\bar{L}$  і  $\bar{Q}$  зв'язані залежністю

$$\frac{d\bar{L}}{ds} = \bar{Q} \times \bar{z}_0 + \bar{m} = 0. \quad (6.34)$$

Враховуючи, що

$$\bar{Q} \times \bar{z}_0 = \bar{Q}^* \times \bar{z}_0, \quad (6.35)$$

запишемо наступні системи рівнянь рівноваги у проєкціях на осі розра-хункової системи координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_x^*}{ds} + Q_z^* q - Q_y^* r &= F_x^*, \\ \frac{dQ_y^*}{ds} + Q_x^* r - Q_z^* p &= F_y^*, \\ \frac{dQ_z^*}{ds} + Q_y^* p - Q_x^* q &= F_z^*, \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$



$$\left. \begin{aligned} A \frac{d}{ds} (p - p^0) + Cq(r - r^0) - Ar(q - q^0) &= M_x^*, \\ B \frac{d}{ds} (q - q^0) + Ar(p - p^0) - Cp(r - r^0) &= M_y^*, \\ C \frac{d}{ds} (r - r^0) + Ap(q - q^0) - Aq(p - p^0) &= M_z^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

В (6.37)  $M_x^*$ ,  $M_y^*$  відрізняються від  $M_x$ ,  $M_y$  тим, що в перші входять  $Q_y^*$ ,  $Q_x^*$  а в другі –  $Q_y$ ,  $Q_x$ ;  $M_z = M_z^*$ .

Додаючи до (6.36), (6.37) третє та четверте рівняння системи (1.1), одержимо повну систему рівнянь рівноваги бурильної колони з урахуванням впливу промивальної рідини.

Підкладаючи в (6.19) вираз (6.13), а в (6.20) – (6.14), одержимо рівняння умовної рівноваги рухомої колони з урахуванням впливу промивальної рідини, т.б. фактично будемо мати випадок роторного буріння.

#### 7. Повна система рівнянь умовної рівноваги ділянки бурильної колони у свердловині

Наведемо повну систему рівнянь, що описує поведінку ділянки бурильної колони під дією розглядуваних в роботі навантажень. Якщо виконуються умови (6.8),  $v_a > 0$ , обертання зі швидкістю  $\bar{\Omega}_e$  рівномірне, вибій поглиблюється рівномірно зі швидкістю  $\bar{v}_e$ , то для випадку вертикальної свердловини при роторному бурінні будемо мати

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial s} + \left[ Q_z - S_1 p_1 - S_2 p_2 - \psi_1 \frac{\rho_1}{g} S_1 (v_1^r)^2 - \right. \\ \left. - \psi_2 \frac{\rho_2}{g} S_2 (v_2^r)^2 \cdot \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma - Q_y \frac{\partial \gamma}{\partial s} = F_x^*, \right. \\ \frac{\partial Q_y}{\partial s} + Q_x \frac{\partial \gamma}{\partial s} - \left[ Q_z - S_1 p_1 - S_2 p_2 - \psi_1 \frac{\rho_1}{g} S_1 (v_1^r)^2 - \right. \\ \left. - \psi_2 \frac{\rho_2}{g} S_2 (v_2^r)^2 \right] \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma = F_y^*, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left[ Q_z - S_1 p_1 - S_2 p_2 - \psi_1 \frac{\rho_1}{g} S_1 (v_1^r)^2 - \psi_2 \frac{\rho_2}{g} \times \right. \\ \left. \times S_2 (v_2^r)^2 \right] + Q_y \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - Q_x \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma = F_z^*, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned}
A \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - p^0 \right] + Cq \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} - r^0 \right) - Ar \left[ \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma - q^0 \right] &= M_x^*, \\
A \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma - q^0 \right] + Ar \left[ \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - p^0 \right] - Cp \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} - r^0 \right) &= M_y^*, \\
C \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} - r^0 \right) + A \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma \left[ \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma - \right. & \\
\left. A \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \left[ \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - p^0 \right] \right] &= M_z^*.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Далі розпишемо праві частини у співвідношеннях (7.1), (7.2). Наприклад,

$$\begin{aligned}
F_x^* &= -q_x + (f_n - q_n) \cos \gamma - f_{mp}' \sin \gamma + (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2) \times \sin(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\rho_1}{g} S_1 \times \\
&\times \left[ \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial t} \cos \gamma \cdot v_6 - \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} - 2 \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \cdot v_1' \right] + \frac{\rho_2}{g} S_2 \times \\
&\times \left[ \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \cdot v_6 - \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2 \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \cdot v_2' \right].
\end{aligned}$$

Зводячи подібні та враховуючи, що урівноважується не тільки вага стрижня, а й рідини в трубі та затрубному просторі, одержимо

$$\begin{aligned}
F_x^* &= -0,5 \left( \rho + \rho_1 S_1 \right) (D-d) \Omega_e^2 \cos \gamma - [\mu' \rho g \sin(\delta + \beta) + f_0'] \cos \gamma - \frac{\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2}{g} \times \\
&\times \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \cdot v_6 - 2 \frac{\rho_1 S_1}{g} \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \cdot v_1' + 2 \frac{\rho_2 S_2}{g} \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \cdot v_2', \\
F_y^* &= 0,5 (\rho + \rho_1 S_1) (D-d) \Omega_e^2 \sin \gamma - [\mu' \rho g \sin(\delta + \beta) + f_0'] \times \sin \gamma - \frac{\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2}{g} \times \\
&\times \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \sin \gamma \cdot v_6 + 2 \frac{\rho_1 S_1}{g} \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \sin \gamma \cdot v_1' - 2 \frac{\rho_2 S_2}{g} \times \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \sin \gamma \cdot v_2',
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$F_z^* = \rho g \cos(\delta + \beta) - [\mu'' \rho g \sin(\delta + \beta) + f_0''] \cos(\delta + \beta).$$

Складові моменти  $\bar{M}^*$  подамо у вигляді

$$\left. \begin{aligned}
M_x^* &= Q_y + 0,5d [\mu'' \rho g \sin(\delta + \beta) + f_0''] \times \cos(\delta + \beta) \sin \gamma, \\
M_y^* &= -Q_x + 0,5d [\mu'' \rho g \sin(\delta + \beta) + f_0''] \times \cos(\delta + \beta) \cos \gamma, \\
M_z^* &= -0,5d [\mu' \rho g \sin(\delta + \beta) + f_0'] .
\end{aligned} \right\} \tag{7.4}$$

Співвідношеннями (7.1)-(7.4) можна користуватись і для випадку буріння вибійним двигуном. Для цього в (7.3) слід прийняти  $\bar{\Omega}_e = 0$ .

Перепишемо систему рівнянь (7.1)-(7.4) для випадку похилої свердловини

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial s} + \left[ Q_z - S_1 p_1 - S_2 p_2 - \psi_1 \frac{\rho_1}{g} S_1 (v_1')^2 - \psi_2 \frac{\rho_2}{g} S_2 (v_2')^2 \right] \times \\ & \cdot \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \right] - Q_y \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] = F_x^*, \\ & \frac{\partial Q_y}{\partial s} + Q_x \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] - \left[ Q_z - S_1 p_1 - S_2 p_2 - \psi_1 \frac{\rho_1}{g} S_1 (v_1')^2 - \right. \\ & \left. - \psi_2 \frac{\rho_2}{g} S_2 (v_2')^2 \right] \times \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma \right] = F_y^*, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \left[ Q_z - S_1 p_1 - S_2 p_2 - \psi_1 S_1 \frac{\rho_1}{g} (v_1')^2 - \psi_2 \frac{\rho_2}{g} S_2 (v_2')^2 \right] + Q_y \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \times \right. \\ & \left. \times \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma \right] - Q_x \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \right] = F_z^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - p^0 \right] + C \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial s} \times \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \right. \\ & \left. + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \right] \times \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial s} - r^0 \right] + A \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] \times \\ & \times \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \times \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma - q^0 \right] = M_x^*, \\ & A \frac{\partial}{\partial s} \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - q^0 \right] + \\ & + A \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] \times \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - p^0 \right] - \\ & - C \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma \right] \times \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial s} - r^0 \right] = M_y^*, \\ & C \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \alpha}{\partial s} - r^0 \right] + A \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \right] \times \\ & \times \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \times \cos \gamma - q^0 \right] - A \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \right. \\ & \left. + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \right] \times \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma - p^0 \right] = M_z^*; \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\left. \begin{aligned}
F_x^* &= \rho g \sin \alpha \sin \gamma - 0,5(\rho + \rho_1 S_1)(D-d)\Omega_e^2 \cos \gamma - \\
&- [\mu' \rho g \sin(\delta + \beta) \cos \alpha + f_0'] \sin \gamma - (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2) \sin \alpha \sin \gamma + \\
&+ \left( \frac{\rho_1}{g} S_1 + \frac{\rho_2}{g} S_2 \right) \left\{ - \left[ - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \right] v_e - \right. \\
&- \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial t} \sin(\delta + \beta) \left. \right\} - 2 \left[ - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \cos \gamma \right] \left( \frac{\rho_1}{g} S_1 v_1^r - \frac{\rho_2}{g} S_2 v_2^r \right), \\
F_y^* &= \rho g \sin \alpha \sin \gamma + 0,5(\rho + \rho_1 S_1)(D-d)\Omega_e^2 \sin \gamma - \\
&- [\mu' \rho g \cos \alpha \sin(\delta + \beta) + f_0'] \cos \gamma - (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2) \sin \alpha \sin \gamma + \\
&+ \left( \frac{\rho_1}{g} S_1 + \frac{\rho_2}{g} S_2 \right) \left\{ \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \sin \gamma \right] v_e + \right. \\
&+ \Omega_e \frac{D-d}{2} \cos \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial t} \sin(\delta + \beta) \left. \right\} + 2 \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial t} \sin \gamma \right] \times \left( \frac{\rho_1}{g} S_1 v_1^r - \frac{\rho_2}{g} S_2 v_2^r \right), \\
F_z^* &= \rho g \cos \alpha \cos(\delta + \beta) - [\mu'' \rho g \cos \alpha \sin(\delta + \beta) + f_0''] \times \\
&\times \cos(\delta + \beta) - (\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2) \cos \alpha \cos(\delta + \beta) + \\
&+ \frac{\partial \alpha}{\partial t} \times \cos(\delta + \beta) \Omega_e \frac{D-d}{2};
\end{aligned} \right\} (7.7)$$

$$\left. \begin{aligned}
M_x^* &= Q_y + 0,5d[\mu'' \rho g \cos \alpha \sin(\delta + \beta) + f_0''] \cos(\delta + \beta) \sin \gamma, \\
M_y^* &= -Q_x + 0,5d[\mu'' \rho g \cos \alpha \sin(\delta + \beta) + f_0''] \cos(\delta + \beta) \cos \gamma, \\
M_z^* &= -0,5d[\mu' \rho g \cos \alpha \sin(\delta + \beta) + f_0'].
\end{aligned} \right\} (7.8)$$

Одержану сукупність (7.4)-(7.8) слід доповнити співвідношенням для вектора переміщень  $\bar{u}$  в проекціях на осі розрахункової системи координат.

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial s} + u_z \left[ - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \right] - u_y \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \right. \\
\left. + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right] &= \cos(\delta + \beta) \cos \gamma - 1, \\
\frac{\partial u_y}{\partial s} + u_x \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin(\delta + \beta) + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] - u_z \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \right. \\
\left. + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma \right] &= -\cos(\delta + \beta) \sin \gamma, \\
\frac{\partial u_z}{\partial s} + u_y \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \cos \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \sin \gamma \right] - \\
- u_x \left[ - \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos(\delta + \beta) \sin \gamma + \frac{\partial(\delta + \beta)}{\partial s} \cos \gamma \right] &= \sin(\delta + \beta).
\end{aligned} \right\} (7.9)$$

До рівнянь (7.4)-(7.9), в загальному випадку слід приєднати (6.30), (6.31), прирівняти витрати рідини в трубі і затрубному просторі у привибійній зоні

$$S_1 v_1^2 = S_2 v_2^r, \quad (7.10)$$

що дає можливість знаходити величину швидкості  $v_2^r$  на вибої свердловини.

Сукупність рівнянь (7.4)-(7.10), (6.30), (6.31) є найбільш загальною. Вона враховує зосереджені сили і моменти, сили інерції, опір стінок свердловини, анізотропію і адгезію розбурюваних порід, характер руху колони. Задаючи певним чином функції  $\alpha(s)$ ,  $\delta(s)$ , будемо мати рівняння конкретних ділянок свердловини. Так для вертикальних ділянок  $\alpha(s)=0$ ,  $\delta(s)=0$ ; для горизонтальних –  $\alpha(s)=\frac{\pi}{2}$ ,  $\delta(s)=const$ , для похилих –  $\alpha(s)=const$ ,  $\delta(s)=const$ , а на закруглених хоча б одну з функцій  $\alpha(s)$ ,  $\delta(s)$ , треба задати у вигляді  $\tilde{s}/R_3$ , де  $\tilde{s}$  – поточна координата осі виділеної ділянки свердловини, а  $R_3$  – радіус заокруглення.

Запропонована математична модель взаємодії бурильної колони зі стінками і вибоєм свердловини дозволяє визначати внутрішні сили і моменти в довільному перерізі, кривину і кручення пружної лінії компоновки, переміщення фіксованого перерізу труби за комплексного навантаження колони та цілий ряд інших параметрів.

Підкладаючи третє рівняння (1.1) в друге та враховуючи розглянуті навантаження, одержимо систему трьох векторних рівняння, для розв'язку яких треба мати граничні умови

$$\bar{F}(l_1), \bar{u}(l_1), \alpha(l_1), \beta(l_1), \gamma(l_1), \bar{F}(l_2), \bar{u}(l_2), \alpha(l_2), \beta(l_2), \gamma(l_2), \quad (7.11)$$

де  $l_1, l_2$  – значення дугової координати  $s$  на кінцях виділеної ділянки труби.

Якщо вісь свердловини орієнтована довільно у просторі, то до сукупності (7.11) слід додати умови

$$\delta(l_1), \delta(l_2). \quad (7.12)$$

Граничні умови (7.12) можна переписати в еквівалентній, більш зручній формі

$$\bar{F}(l_1), \bar{M}(l_1), \bar{u}(l_1), \bar{F}(l_2), \bar{M}(l_2), \bar{u}(l_2). \quad (7.13)$$

В місцях з'єднання ділянок бурильної колони прирівнюємо вектори переміщень, внутрішніх сил і моментів.

Отже, згідно принципу звільнення від в'язей, слід відкинути умови з'єднання або закріплення ділянки труб і замінити їх дію силами і моментами в'язей.

Під час розв'язування деяких задач умовної рівноваги ділянок бурильної колони, зв'язаних з визначенням внутрішніх сил і моментів в  $s$ -перерізі колони, рівняння для переміщень можна не брати до уваги, т.б. з числа граничних виключити умови  $\bar{u}(l_1), \bar{u}(l_2)$ .

Одержані рівняння умовної рівноваги бурильної колони через громіздкість розв'язувати аналітично доволі складно. Тому для розв'язку конкретних прикладних задач рівняння доцільно звести до безрозмірної форми і розробляти комп'ютерні програми, передбачаючи в них ряд коректувальних коефіцієнтів, які б дозволяли оперативно вносити поправки за результатами порівняння розрахункових та експериментальних даних.

### Висновки

1. Складемо систему рівнянь умовної рівноваги ділянки бурильної колони, що взаємодіє зі стінками свердловини орієнтованої довільно у просторі.

2. Обґрунтовано необхідність введення чотирьох кутів  $\alpha, \delta, \beta, \gamma$  для вивчення просторової орієнтації осі свердловини і пружної лінії бурильної колони. Встановлено взаємозв'язки між кутами  $\alpha$  і  $\delta$  з одного боку та зенітним і азимутальним кутами свердловини з другого боку, знайдено залежності для визначення вектора повної кривини пружної лінії та інтенсивності викривлення осі свердловини.

3. Знайдено зв'язок між швидкістю руху ділянки колони у свердловині та вектором повної кривини її пружної лінії. Векторне рівняння цього зв'язку спроектовано на осі розрахункової системи координат; враховані осьове переміщення, переносне та відносне обертання ділянки колони.

4. Одержимо нові залежності для визначення нормальної складової розподілених по довжині колони сили тиску труби на стінку свердловини, інерційного навантаження від обертання ділянки навколо осі розглядуваної циліндричної виробки, сил опору стінки свердловини з урахуванням адгезії, анізотропії та характеру руху колони.

5. Складено рівняння, які дозволяють вивчати просторові форми рівноваги ділянок бурильної колони у вертикальній та похилій свердловинах за очистки вибоєм газом або повітрям.

6. Вивчено кінематику руху промивальної рідини в бурильних трубах і затрубному просторі. Знайдено залежності між векторами внутрішніх сил і моментів з одного боку і розподіленими по довжині ділянки колони силами взаємодії бурильної труби з промивальною рідиною з другого боку. Вказано шляхи врахування впливу рідини на параметри пружної лінії колони при роторному бурінні та бурінні вибійним двигуном.

7. Під час складання загальних рівнянь умовної рівноваги пружної лінії невідільної бурильної колони у свердловині, віссю якої є просорова крива, враховано найбільш повний комплекс силових і моментних навантажень, що визначають напруження і деформації виділеної ділянки бурильної колони. Сукупність систем рівнянь (7.4)-(7.10), (6.30), (6.31) дає можливість проаналізувати розв'язок ряду прикладних задач, зв'язаних з визначенням внутрішніх сил і моментів, нормальної складової сили тиску бурильних труб на стінку свердловини, параметрів пружної лінії

колони; розробити практичні рекомендації з удосконалення компоновок бурильного інструменту і технології процесу буріння.

### *Література*

1. Мойсишин В.М. Про рівняння рівноваги пружної лінії бурильної колони / В.М. Мойсишин // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2010. – №1(9). – С. 56-74.
2. Ніколенко І.В. Диференційні рівняння рівноваги вільних і невільних тонких стержнів / І.В. Ніколенко // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. астрономії, математики та механіки. – 1958. – Вип.1. – С. 47-56.
3. Александров М.М. Силы сопротивления при движении труб в скважине / М.М.Александров. – М.: Недра, 1978. – 208 с.
4. McLean R.H. Displacement Mechanics in Primary Cementing / R.H.McLean, C.W.Manry, W.W.Whitaker // Transacting of the Society of Petroleum Engineers of the AIME. – 1967. – Vol.240. – 10 p.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 29.11.2011 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Лисканичем М.В.*

## **COMPLETE SYSTEM OF EQUALIZATIONS OF CONDITIONAL EQUILIBRIUM OF AREAS OF BORING COLUMN IN MINING HOLE ORIENTED ARBITRARILY IN SPACE**

**V. M. Moisyshyn, V. I. Vekeryk**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivs'k, Carpat'ska st., 15;*

*ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua)*

*At this work common equalizations of equilibrium of area of boring column of oriented are shown out in space arbitrarily; the distributed are taken into account on length of force of weight, friction of pipes o walls of mining hole, motion of washing liquid, rotator and forward motions of column.*

*The features of formation of flat and spatial forms of equilibrium of resilient line of boring column are trained, dependences are got for finding of its crooked and twisting, the kinematics of rotation of areas of columns and motion of washing liquid in pipes and out of pipes is trained space.*

**Key words:** *equalization of equilibrium, resilient line of boring column, corners Euler-Krylov, crook, twisting, bending a moment, twisting moment, moving, internal force, internal moment.*