

УДК 517.53

## ПОБУДОВА ПРИЄДНАНОЇ ЦІЛОЇ КРИВОЇ З НАПЕРЕД ЗАДАНОЮ МНОЖИНОЮ ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ

**Я. І. Савчук**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua*

*Для наперед заданої множини векторів певної структури побудовано цілу криву скінченного додатного порядку, для якої структура дефектних векторів відповідної приєднаної цілої кривої співпадає з цією множиною.*

**Ключові слова:** *ціла крива, спеціальний вектор, приєднана ціла крива, неванліннівський дефектний вектор, мероморфна функція.*

Дана стаття є продовженням [1], тому використовуватимемо позначення, які є в [1] та [2], а також основні результати теорії цілих кривих.

Основним результатом [1] є

**Теорема А.** *Нехай  $\vec{G}$  – ціла  $p$ -вимірна крива скінченного порядку. Тоді ( $1 \leq l \leq p-1$ ):*

1)  $D(\vec{G}_l) \cup \{\vec{0}\} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} A_j$ , де  $A_j$  – підпростори з  $C^q$ , де  $q = C_p^l$ , причому  $0 \leq \dim A_j = q_j \leq q-1$ ;

2) для кожного  $j$  існує спеціальний вектор  $\vec{b}_j \in C^q$ , ортогональний до  $A_j$ .

Як відзначалося, нам не вдалося вияснити, чи підпростори  $A_j$  повинні задовольняти ще яким-небудь умовам. Метою цієї статті є показати, що умова 2) при  $q_j = q-1$  є достатньою.

**Теорема 1.** *Нехай  $A = \bigcup_{j=1}^k A_j$  ( $k \leq \infty$ ), де  $A_j$  – підпростори з  $C^q$ , де  $q = C_p^l$ , причому  $q_j = q-1$ , кожний з яких має ортогональний спеціальний вектор. Тоді для довільного  $0 < \rho < \infty$  існує ціла крива  $\vec{G}: C \rightarrow C^p$  порядку  $\rho$  така, що  $D(\vec{G}_l) \cup \{\vec{0}\} = A$ .*

Доведення цієї теореми проведемо, опираючись на доведення теореми 1 в [3] і вважаючи, що  $\rho < \frac{1}{2}$ . Для зручності перенумеруємо  $A_j$

таким чином, щоб  $A = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} A_j$ ,  $A_0 = \{\vec{0}\}$ . Спеціальні вектори

$\vec{b}^{(j)} = [\vec{b}_1^{(j)}, \vec{b}_2^{(j)}, \dots, \vec{b}_l^{(j)}]$ , ортогональні до  $A_j$ , беремо такими, щоб

$$\|\vec{b}_1^{(j)}\| + \|\vec{b}_2^{(j)}\| + \dots + \|\vec{b}_l^{(j)}\| \leq 2^{-j}. \quad (1)$$

Виберемо  $q$  спеціальних лінійно незалежних між собою векторів  $\vec{b}^{(0s)} = [\vec{b}_1^{(0s)}, \vec{b}_2^{(0s)}, \dots, \vec{b}_l^{(0s)}] \in \mathbb{C}^q$ ,  $s = 1, 2, \dots, q$  (зокрема, можемо взяти  $\vec{b}^{(01)} = (1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{b}^{(0q)} = (0, \dots, 0, 1)$ ).

Позначимо

$$\vec{P}_j(z) = \vec{b}_l^{(j)} + \frac{1}{1!} \vec{b}_{l-1}^{(j)} z + \dots + \frac{1}{(l-1)!} \vec{b}_1^{(j)} z^{l-1}, \quad j \neq 0;$$

$$\vec{P}_0(z) = \sum_{s=1}^q \left( \vec{b}_l^{(0s)} + \vec{b}_{l-1}^{(0s)} z + \dots + \vec{b}_1^{(0s)} z^{l-1} \right) z^{3^s l}.$$

$$\text{Візьмемо } W(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + z \cdot n^{-1/\rho} \right).$$

Виберемо послідовність  $\theta_j$  таку, що  $-\pi < \theta_j < \pi$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_{j+1} > \theta_j$ ,  $\theta_j \rightarrow \pi$  при  $j \rightarrow -\infty$ ,  $\theta_j \rightarrow -\pi$  при  $j \rightarrow +\infty$ .

Покажемо, що ціла крива  $\vec{G}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vec{P}_j(z) W(z e^{-i\theta_j})$  є шуканою.

З результатів [3, гл. II, §5] випливає, що

$$W^{(s)}(z) = o\{W(z)\}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (2)$$

виконується рівномірно по  $z$  в куті  $\{z : -\pi + \delta < \arg z < \pi - \delta\}$ .

В [4] показано, що  $T(r, \vec{G}) \leq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} r^\rho + o(r^\rho)$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Тоді, відпо-

відно до нерівності  $T(r, \vec{G}_l) \leq \{l + o(1)\} T(r, \vec{G})$ ,  $r \rightarrow \infty$  [1], одержуємо, що

$$T(r, \vec{G}_l) \leq \frac{\pi l}{\sin \pi \rho} r^\rho + o(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Зафіксуємо число  $m \in \mathbb{Z}$ . Візьмемо  $\eta = \eta(m)$ ,  $0 < \eta < (\theta_{m+1} - \theta_m)/4$ , і розглянемо цілу криву на множині  $V_m = V_m(\eta) = \{z : (\theta_m + \theta_{m-1})/2 + \eta < \arg z < (\theta_m + \theta_{m+1})/2 - \eta; \varphi \notin E(\mu)\}$ , де  $E(\mu)$  – скінченне об'єднання інтервалів, таке, що

$$\text{mes } E(\mu) < \mu; \quad (4)$$

$[-\pi, -\pi + \mu/3] \cup [\pi, \pi - \mu/3] \subset E(\mu)$ ;  $\theta_j + \pi \in E(\mu)$  при  $j \leq 0$ ;  
 $\theta_j - \pi \in E(\mu)$  при  $j > 0$ .

Згідно (2) на основі такого вибору  $E(\mu)$  рівність

$$W^{(s)}(ze^{-i\theta_j}) = o\left\{W(ze^{-i\theta_j})\right\}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (5)$$

виконується рівномірно по  $z$  на множині  $\{z : \arg z \in [-\pi, \pi] \setminus E(\mu)\}$ .

Щоб виконувалось  $\text{mes } V_m > 0$ , візьмемо  $\mu < (\theta_{m+1} - \theta_{m-1})/4 - \eta$ .

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} & \left[ \bar{P}_m(z)W(ze^{-i\theta_m}), (\bar{P}_m(z)W(ze^{-i\theta_m}))', \dots, (\bar{P}_m(z)W(ze^{-i\theta_m}))^{(l-1)} \right] = \\ & = \left[ \bar{P}_m(z), \bar{P}_m'(z), \dots, \bar{P}_m^{(l-1)}(z) \right] W^l(ze^{-i\theta_m}). \end{aligned} \quad (6)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що при  $m \neq 0$

$$\left[ \bar{P}_m(z), \bar{P}_m'(z), \dots, \bar{P}_m^{(l-1)}(z) \right] = \left[ \bar{b}_1^{(m)}, \bar{b}_2^{(m)}, \dots, \bar{b}_l^{(m)} \right] = \bar{b}^{(m)}. \quad (7)$$

Міркуючи як в [3, с.163-165], дістанемо

$$\ln \left| \frac{W(re^{i(\varphi-\theta_j)})}{W(re^{i(\varphi-\theta_m)})} \right| \leq -A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty, \quad A_m(\eta) > 0, \quad j \neq m,$$

рівномірно відносно  $\varphi$  та  $j$  в  $V_m$ .

Тоді при цих же умовах, згідно (5), маємо:

$$\left| W^{(s)}(re^{i(\varphi-\theta_j)}) \right| = o\left\{ \left| W(re^{i(\varphi-\theta_j)}) \right| \right\} \leq \exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\} \left| W(re^{i(\varphi-\theta_m)}) \right|, \quad r \rightarrow \infty.$$

Тому одержимо ( $z = re^{i\varphi}$ )

$$\left| \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq m}}^{\infty} (\bar{P}_j(z)W(ze^{-i\theta_j}))^{(s)} \right| \leq \exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\} \left| W(re^{i(\varphi-\theta_m)}) \right|, \quad r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

рівномірно відносно  $\varphi$  та  $j$  в  $V_m$ .

Оскільки

$$\begin{aligned} \bar{G}_l(z) &= \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{P}_j(z)W(ze^{-i\theta_j}), \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\bar{P}_j(z)W(ze^{-i\theta_j}))', \dots, \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\bar{P}_j(z)W(ze^{-i\theta_j}))^{(l-1)} \right] = \\ &= \left[ \bar{P}_m(z)W(ze^{-i\theta_m}), (\bar{P}_m(z)W(ze^{-i\theta_m}))', \dots, (\bar{P}_m(z)W(ze^{-i\theta_m}))^{(l-1)} \right] + \\ &+ \left[ \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq m}}^{\infty} \bar{P}_j(z)W(ze^{-i\theta_j}), \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\bar{P}_j(z)W(ze^{-i\theta_j}))', \dots, \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\bar{P}_j(z)W(ze^{-i\theta_j}))^{(l-1)} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=1}^{l-1} \left[ \bar{P}_m(z) W(z e^{-i\theta_m}), (\bar{P}_m(z) W(z e^{-i\theta_m}))', \dots, (\bar{P}_m(z) W(z e^{-i\theta_m}))^{(s-1)}, \right. \\ \left. \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq m}}^{\infty} (\bar{P}_j(z) W(z e^{-i\theta_j}))^{(s)}, \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\bar{P}_j(z) W(z e^{-i\theta_j}))^{(s+1)}, \dots, \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\bar{P}_j(z) W(z e^{-i\theta_j}))^{(l-1)} \right],$$

то, з урахуванням (6) та (8), маємо ( $z = r e^{i\varphi}$ ):

$$\bar{G}_l(z) = [\bar{P}_m(z), \bar{P}_m'(z), \dots, \bar{P}_m^{(l-1)}(z)] W^l(z e^{i(\varphi - \theta_m)}) + \\ + O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho\} W^l(r e^{i(\varphi - \theta_m)})) = \{[\bar{P}_m(r e^{i\varphi}), \bar{P}_m'(r e^{i\varphi}), \dots, \bar{P}_m^{(l-1)}(r e^{i\varphi})] + \dots\} \quad (9) \\ + O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\}) W^l(z e^{i(\varphi - \theta_m)}), \quad r \rightarrow \infty,$$

рівномірно відносно  $\varphi$  в  $V_m$ .

У випадку  $m = 0$  неважко перекоонатись, що для довільного  $\bar{a} \in \mathbb{C}^q \setminus \{\bar{0}\}$  виконується

$$Q_0(z, \bar{a}) = [\bar{P}_0(z), \bar{P}_0'(z), \dots, \bar{P}_0^{(l-1)}(z)] \bar{a} \neq 0,$$

Звідки, оскільки  $Q_0(z, \bar{a})$  – многочлен, згідно рівності (8) випливає, що  $\bar{G}_l(z) \bar{a} \neq 0$ , тобто  $\bar{G}_l$  – не вироджена крива в  $\mathbb{C}^q$ .

Розглянемо тепер випадок  $m \neq 0$ . Згідно вибору векторів  $\bar{b}^{(m)}$  та на підставі (9) і (7) для довільного  $\bar{a} \in A_m \setminus \{\bar{0}\}$  маємо

$$\bar{G}_l(r e^{i\varphi}) \bar{a} = W^l(r e^{i(\varphi - \theta_m)}) \{ \bar{b}^{(m)} \bar{a} + O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\}) \} = \\ = W^l(r e^{i(\varphi - \theta_m)}) \cdot O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\}), \quad r \rightarrow \infty,$$

рівномірно в  $V_m$ .

Тоді рівномірно в  $V_m$  виконується

$$\left| \frac{\bar{G}_l(r e^{i\varphi}) \bar{a}}{\|\bar{G}_l(r e^{i\varphi})\|} \right| = \frac{O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\})}{\|\bar{b}^{(m)} + O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\})\|} \leq \exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\}, \\ r \rightarrow \infty,$$

звідки випливає, що

$$m(r, \bar{a}, \bar{G}_l) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{E_m} \ln \left| \frac{\bar{G}_l(r e^{i\varphi})}{\bar{G}_l(r e^{i\varphi}) \bar{a}} \right| d\varphi + O(1) \geq \frac{1}{2\pi} \cdot \text{mes } E_m \cdot A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho) \geq \\ \geq \frac{1}{2\pi} ((\theta_{m+1} - \theta_{m-1})/2 - 2\eta - \mu) A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty, \quad (10)$$

де  $E_m = \{\varphi : r e^{i\varphi} \in V_m\}$ .

Співставляючи (3) з (10), отримуємо, що  $\rho(\bar{G}_l) = \rho$  і  $\delta(\bar{a}, \bar{G}_l) > 0$ .

Тепер покажемо, що для довільного  $\vec{a} \notin A$  виконується  $\delta(\vec{a}, \vec{G}_l) = 0$ . Очевидно,  $\vec{b}^{(j)}\vec{a} \neq 0$  для всіх  $j$ . Тому для кожного  $j$  рівномірно в  $V_j$  виконується

$$\frac{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\vec{a}|} = \frac{\|\vec{b}^{(j)} + O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\})\|}{|\vec{b}^{(j)}\vec{a} + O(\exp\{-A_m(\eta)r^\rho + o(r^\rho)\})|} = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Для довільного  $\mu > 0$  існує  $n_0$  таке, що

$$(\pi - \theta_{n_0}) + (\theta_{-n_0} + \pi) < \mu/3. \quad (12)$$

Виберемо  $\eta(s)$  ( $-n_0 \leq s \leq n_0$ ) такими, щоб виконувалось

$$\sum_{s=-n_0}^{n_0} \eta(s) < \mu/6. \quad (13)$$

Розглянемо множину

$$E = E(\mu) \cup \left\{ \bigcup_{s=-n_0}^{n_0} [(\theta_{s+1} + \theta_s)/2 - \eta(s), (\theta_{s+1} + \theta_s)/2 + \eta(s+1)] \right\}.$$

Згідно вибору  $E(\mu)$  та (12), (13), (4) маємо:

$$mes E < 2\mu; \quad \{z = re^{i\varphi} : \varphi \in [-\pi, \pi] \setminus E\} \subset \bigcup_{s=-n_0}^{n_0} V_s.$$

Тому, враховуючи (11), робимо висновок, що

$$\begin{aligned} m(r, \vec{a}, \vec{G}_l) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus E} \ln \frac{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\vec{a}|} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_E \ln \frac{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\vec{a}|} d\varphi + O(1) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-n_0}^{n_0} \int_{re^{i\varphi} \in V_s} \ln \frac{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\vec{a}|} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_E \ln \frac{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\vec{a}|} d\varphi + O(1) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_E \ln \frac{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\vec{a}|} d\varphi + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

З (3) та (10) видно, що  $T(r, \vec{G}_l) = O(r^\rho)$  і  $r^\rho = O(T(r, \vec{G}_l))$ ,  $r \rightarrow \infty$ , звідки, згідно леми в [4], випливає, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_E \ln \frac{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|}{|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\vec{a}|} d\varphi \leq C(2\mu)T(r, \vec{G}_l),$$

де  $C(2\mu) \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Тому, враховуючи (14), робимо висновок, що  $\delta(\vec{a}, \vec{G}_l) \leq C(2\mu)$ . Спрямувавши  $\mu \rightarrow 0$ , одержуємо  $\delta(\vec{a}, \vec{G}_l) = 0$ .

Легко переконались, що якщо  $\vec{L}(z) = \vec{G}(z^n)$ , то  $\rho(\vec{L}) = n \cdot \rho(\vec{G})$  і  $\rho(\vec{L}_l) = n \cdot \rho(\vec{G}_l)$ . Враховуючи це та розглядаючи цілі криві  $\vec{G}_l(z^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , можна отримати приклади цілих кривих з множиною неванліннівських дефектних векторів, що співпадає з  $A \setminus \{\vec{0}\}$ , і довільним порядком  $0 < \rho < n/2$ .

*Зауваження.* Ми довели теорему 1 для випадку, коли  $A$  можна подати у вигляді зліченного об'єднання підпросторів  $A_j$  з  $\dim A_j = q - 1$ . Для випадку  $A = \bigcup_{j=1}^k A_j$  ( $k < \infty$ ) можемо взяти  $A_j = \{\vec{0}\}$  при  $j \in \mathbf{Z} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$  і для кожного такого  $j$  розглянути многочлени  $\vec{P}_j(z)$  такого ж вигляду, як і многочлен  $\vec{P}_0(z)$  в щойно наведеному доведенні теореми 1.

**Теорема 2.** Нехай  $A^{(s)}$  – не більше ніж зліченне об'єднання підпросторів  $A_j^{(s)}$  із  $C^{q_s}$  ( $q_s = C_p^s$ ) розмірності не вище  $q_s - 1$ , причому кожний з підпросторів  $A_j^{(s)}$  має ортогональний спеціальний вектор. Тоді для довільного  $0 < \rho < \infty$  існує  $p$  – мірна ціла крива порядку  $\rho$  така, що  $A^{(s)} \subset D(\vec{G}_l) \cup \{\vec{0}\}$  при всіх  $s = 1, 2, \dots, p - 1$ .

*Доведення.* Можемо вважати, що  $A^{(s)} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(s)}$ ,  $A_0^{(s)} = \{\vec{0}\}$  для всіх  $s = 1, 2, \dots, p - 1$ . Нехай

$$\vec{b}_m^{(s)} = [\vec{b}_{m,1}^{(s)}, \vec{b}_{m,2}^{(s)}, \dots, \vec{b}_{m,s}^{(s)}] \perp A_m^{(s)}; \quad \sum_{v=1}^s \|\vec{b}_{m,v}^{(s)}\| \leq 2^{-m};$$

$$\vec{P}_j(z) = \vec{b}_{m,s}^{(j)} + \frac{1}{1!} \vec{b}_{m,s-1}^{(j)} z + \dots + \frac{1}{(l-1)!} \vec{b}_{m,1}^{(j)} z^{l-1},$$

де  $j = m(p-1) + s$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $s = 1, 2, \dots, p - 1$ .

Повторюючи міркування, наведені в доведенні теореми 1, неважко переконались, що крива

$$\vec{G}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vec{P}_j(z) W(z e^{-i\theta_j}),$$

де многочлен  $\vec{P}_0(z)$  такий же, як і в теоремі 1, задовольняє потрібним умовам.

### Література

1. Савчук Я.І. Структура дефектних векторів для приєднаних цілих кривих / Я.І.Савчук // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2010. – №1(9). – С. 46-50.

2. Петренко В.П. Целые кривые / В.П.Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.
3. Гольдберг А.А. Распределение значений мероморфных функций / А.А.Гольдберг, И.В.Островский. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
4. Савчук Я.И. О множестве дефектных векторов целых кривых / Я.И.Савчук // Укр. мат. журн. – 1983. – Т.35, №3. – С. 385-389.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 01.12.2011 р.*

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.*

### **CONSTRUCTION OF THE ADDED WHOLE CURVE WITH BEFOREHAND BY THE SET GREAT NUMBER OF IMPERFECT VECTORS**

**Ya. I. Savchuk**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians st., 15;  
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua*

*For the beforehand set great number of vectors of certain structure the whole curve of complete positive order, for which the structure of imperfect vectors of the proper added whole curve coincides with this great number, is built.*

**Key words:** *whole curve, special vector, added whole curve, nevanlinna imperfect vector, meromorf function.*