УДК 517.98

ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДВОХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

А. М. Краснодембський
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

У статті встановлено умови збіжності послідовностей, що визначають розв'язки з періодичними компонентами деякої системи двох нелінійних диференціальних рівнянь третього порядку.

Ключові слова: *система нелінійних диференціальних рівнянь, умови збіжності, періодичність розв'язків.*

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$y_y''' = f_i\left(x, y, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2''\right) \qquad (i = 1,2), \tag{1}$$

де неперервні функції $f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}\right)$ $(i=1,2)$ задовольняють умови:

1. $f_i\left(x+T, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}\right) \equiv f\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}\right)$ $(i=1,2)$;
2. $f_i\left(\alpha - x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}\right) \equiv -f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}\right)$ $(i=1,2)$;
3. $\left|f_i\left(x, u_{02}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, u_{22}^{(1)}, u_{02}^{(2)}, u_{12}^{(2)}, u_{22}^{(2)}\right) - f_i\left(x, u_{01}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, u_{21}^{(1)}, u_{01}^{(2)}, u_{11}^{(2)}, u_{21}^{(2)}\right)\right| \le$
$\le K_0^{(1)}\left|u_{02}^{(1)} - u_{01}^{(1)}\right| + K_1^{(1)}\left|u_{12}^{(1)} - u_{11}^{(1)}\right| + K_2^{(1)}\left|u_{22}^{(1)} - u_{21}^{(1)}\right| + K_0^{(2)}\left|u_{02}^{(2)} - u_{01}^{(2)}\right| +$
$+ K_1^{(2)}\left|u_{12}^{(2)} - u_{11}^{(2)}\right| + K_2^{(2)}\left|u_{22}^{(2)} - u_{21}^{(2)}\right| \quad (i = 1,2).$

Як було вказано раніше $([1],[2])$ диференціальне рівняння

$$y''' = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) \in C$; $\varphi(x+T) \equiv \varphi(x)$; $\int\limits_0^T \varphi(x)\,dx = 0$

має неперервний, періодичний (періоду T) розв'язок $y = \bar{y}(x)$ ($\bar{y}(0) = y_0$), який можна записати у формі

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2T}\int\limits_0^{T} xt(x+T-t)\varphi(t)\,dt + y_0 .$$

Якщо, крім того, $\varphi(\alpha - x) = -\varphi(x)$, то $\bar{y}(\alpha - x) = -\bar{y}(x)$.

Теорема 1. Якщо $\frac{1}{2}K_0T^3 + \frac{13}{12}K_1T^2 + \frac{3}{2}K_2T < 1$ ($K_0 = K_0^{(1)} + K_0^{(2)}$,

$K_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)}$, $K_2 = K_2^{(1)} + K_2^{(2)}$), то система (1) має двох параметричне сімейство розв'язків $y_i = \bar{y}_i(x)$ $(\bar{y}_i(0) = y_{i0};\, i = 1,2)$, що $\bar{y}_i(x) \in C$; $\bar{y}_i(x+T) = \bar{y}_i(x)$; $\bar{y}_i(\alpha - x) = -\bar{y}_i(x)$ $(i = 1,2)$.

Доведення. Складаємо послідовності

$$y_{ik}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y''_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t), y''_{2k-1}(t)\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2T}\int_0^x xt(x+T-t) f\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y''_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t), y''_{2k-1}(t)\right)dt + y_{io}$$

$$(i = 1,2;\ k = 1,2,\ldots);$$

$$y'_{ik}(x) = \int_0^x (x-t) f\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y''_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t), y''_{2k-1}(t)\right)dt +$$

$$+\frac{1}{2T}\int_0^x t(2x+T-t) f\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y''_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t), y''_{2k-1}(t)\right)dt \qquad (2)$$

$$(i = 1,2;\ k = 1,2,\ldots);$$

$$y''_{ik}(x) = \int_0^x f\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y''_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t), y''_{2k-1}(t)\right)dt +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^x t f\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y''_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t), y''_{2k-1}(t)\right)dt \quad (i = 1,2;\ k = 1,2,\ldots);$$

$$y_{i0}(x) = y_{i0};\quad y'_{i0}(x) = 0;\quad y''_{i0}(x) = 0 \qquad (i = 1,2).$$

В силу вказаного вище $y_{ik}(x)$ є неперервними, періодичними (періоду T) функціями, що $y_{ik}(\alpha - x) = -y_{ik}(x)$ $(i = 1,2;\ k = 1,2,\ldots)$.

Нехай

$$\max_{0 \le x \le T}\left|f_i(x, y_{10}, 0, 0, y_{20}, 0, 0)\right| = M \qquad (i = 1,2).$$

Приймаючи до уваги періодичність (періоду T) послідовностей (2), отримаємо:

$$\left|y_{i1} - y_{i0}\right| \le \frac{1}{2}MT^3;\quad \left|y'_{i1}\right| \le \frac{13}{12}MT^2;\quad \left|y''_{i1}\right| \le \frac{3}{2}MT \qquad (i = 1,2);$$

$$\left|y_{i2} - y_{i1}\right| \le \left(K_0^{(1)}\frac{1}{2}MT^3 + K_1^{(1)}\frac{13}{12}MT^2 + K_2^{(1)}\frac{3}{2}MT + K_0^{(1)}\frac{1}{2}MT^3 + \right.$$

$$\left. + K_1^{(2)}\frac{13}{12}MT^2 + K_2^{(1)}\frac{3}{2}MT\right)\frac{1}{2}T^3 = \frac{1}{2}MT^3\left(\frac{1}{2}K_0T^3 + \frac{13}{12}K_1T^2 + \frac{3}{2}K_2T\right)(i = 1,2);$$

$$\left|y'_{i2} - y'_{i1}\right| \le \frac{13}{12}MT^2\left(\frac{1}{2}K_0T^3 + \frac{13}{12}K_1T^2 + \frac{3}{2}K_2T\right);$$

$$\left|y''_{i2} - y''_{i1}\right| \le \frac{3}{2}MT\left(\frac{1}{2}K_0T^3 + \frac{13}{12}K_1T^2 + \frac{3}{2}K_2T\right) \quad (i = 1,2).$$

Використовуючи позначення

$$\frac{1}{2}K_0T^3+\frac{13}{12}K_1T^2+\frac{3}{2}K_2T=q\,,$$

запишемо:

$$|y_{i2}-y_{i1}|\le\frac{1}{2}MT^3q^k\,;\;|y'_{i2}-y'_{i1}|\le\frac{13}{12}MT^2q^k\,;\;|y''_{i2}-y''_{i1}|\le\frac{3}{2}MTq^k\quad(i=1,2).$$

Тоді

$$|y_{ik+2}-y_{ik+1}|\le\left(K_0^{(1)}\frac{1}{2}MT^3q^k+K_1^{(1)}\frac{13}{12}MT^2q^k+K_1^{(2)}\frac{3}{2}14Tq^k+K_0^{(2)}\frac{1}{2}MT^3q^k+\right.$$

$$\left.+K_1^{(2)}\frac{13}{12}MT^2q^k+K_2^{(2)}\frac{3}{2}MTq^k\right)\frac{1}{2}T^3=\frac{1}{2}MT^3q^{k+1}\qquad(i=1,2);$$

$$|y'_{ik+2}-y'_{ik+1}|\le\frac{13}{12}MT^2q^{k+1};\;\;|y''_{ik+2}-y''_{ik+1}|\le\frac{3}{2}MTq^{k+1}\quad(i=1,2).$$

Згідно з методом математичної індукції, ряди

$$|y_{i0}|+|y_{i1}-y_{i0}|+|y_{i2}-y_{i1}|+\ldots+|y_{ik+1}-y_{ik}|+\ldots\quad(i=1,2)$$

мажоруються геометричною прогресією з знаменником q.

Значить, послідовності (2) збігаються рівномірно, тобто існують границі

$$\lim_{k\to\infty}y_{ik}(x)=\bar{y}_i(x)\quad(i=1,2),$$

де $\bar{y}_i(x)\,(i=1,2)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $\bar{y}_i(\alpha-x)\equiv\bar{y}_i(x)\,(i=1,2)$.

Переходячи в перших двох рівностях послідовностей (2) до границі при $k\to0$, отримаємо:

$$\bar{y}_i(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f\left(t,\bar{y}_1(t),\bar{y}'_1(t),\bar{y}''_1(t),\bar{y}_2(t),\bar{y}'_2(t),\bar{y}''_2(t)\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2T}\int_0^x xt(x+T-t)f_i\left(t,\bar{y}_1(t),\bar{y}'_1(t),\bar{y}''_1(t),\bar{y}_2(t),\bar{y}'_2(t),\bar{y}''_2(t)\right)dt+y_{io}\;(i=1,2).$$

Отже $y_i=\bar{y}_i(x)\,(i=1,2)$ є розв'язком системи (1).

Теорема доведена.

Теорема 2. Якщо $q=\frac{1}{2}K_0T^3+\frac{13}{12}K_1T^2+\frac{3}{2}K_2T<1$ і $y_i=\bar{y}_i(x)$, $z_i=\bar{z}_i(x)$ $(i=1,2)$ є неперервні, періодичні (періоду T) розв'язки системи (1), що $\bar{y}_i(0)=\bar{z}_i(0)=y_{i0}$ $(i=1,2)$, то $\bar{y}_i(x)=\bar{z}_i(x)$ $(i=1,2)$.

Доведення. Згідно з попереднім, розв'язок $z_i=\bar{z}_i(x)$ системи (1) можна записати у вигляді

$$\bar{z}_i(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f\left(t,\bar{z}_1(t),\bar{z}_1'(t),\bar{z}_1''(t),\bar{z}_2(t),\bar{z}_2'(t),\bar{z}_2''(t)\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2T}\int_0^x xt(x+T-t)f_i\left(t,\bar{z}_1(t),\bar{z}_1'(t),\bar{z}_1''(t),\bar{z}_2(t),\bar{z}_2'(t),\bar{z}_2''(t)\right)dt\ (i=1,2).$$

Нехай

$$\max_{0\le x\le T}\left(K_0^{(1)}\left|y_{11}-\bar{z}_1\right|+K_1^{(1)}\left|y_{11}'-\bar{z}_1'\right|+K_2^{(1)}\left|y_{11}''-\bar{z}_1''\right|+K_0^{(2)}\left|y_{21}-\bar{z}_2\right|+\right.$$

$$\left.+K_1^{(2)}\left|y_{21}'-\bar{z}_2'\right|+K_2^{(2)}\left|y_{21}''-\bar{z}_2''\right|\right)=L.$$

Тоді з врахуванням введених раніше позначень, дістанемо:

$$\left|y_{i2}-\bar{z}_i\right|\le\frac{1}{2}LT^3;\ \left|y_{i2}'-\bar{z}_i'\right|\le\frac{13}{12}LT^2;\ \left|y_{i2}''-\bar{z}_i''\right|\le\frac{3}{2}LT\quad(i=1,2);$$

$$\left|y_{i3}-\bar{z}_i\right|\le\frac{1}{2}LT^3q;\ \left|y_{i3}'-\bar{z}_i'\right|\le\frac{13}{12}LT^2q;\ \left|y_{i3}''-\bar{z}_i''\right|\le\frac{3}{2}LTq\quad(i=1,2).$$

Аналогічно попередньому, знаходимо:

$$\left|y_{ik}-\bar{z}_i\right|\le\frac{1}{2}LT^3q^{k-2}\quad(i=1,2;\ k=1,2,\ldots).$$

Оскільки $q<1$, то

$$\lim_{k\to\infty}y_{ik}(x)=\bar{z}_i(x);\quad \bar{y}_i(x)=\bar{z}_i(x)\quad(i=1,2).$$

Теорему доведено.

Література

1. Краснодембський А.М. ДАН УРСР / А.М.Краснодембский. – 10. – 1962.
2. Краснодембский А.М. Записки мех.-математического ф-та ХГУ и Харьковского матем. Общества / А.М.Краснодембский. – 1964. – Т.XXX, сер.4.

Стаття надійшла до редакційної колегії 08.09.2011 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.***

PERIODICITY OF DECISIONS OF SYSTEM OF TWO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF THE THIRD ORDER

A. M. Krasnodembskyy
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, *Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka st.,* 15;
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

The terms of meeting of sequences, which determine the upshots with the periodic components of some system of two nonlinear differential equalizations of the third order are set in the article.

Key words: *system of nonlinear differential equalizations, terms of meeting, periodicity of decisions.*