УДК 517.94

ПРО ОДИН АПРОКСИМАЦІЙНИЙ МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА

І. В. Федак

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника;
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

Запропонований один новий метод наближеного розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Ключові слова: *лінійне інтегральне рівняння Вольтерра, апроксимаційний метод.*

Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

та різницеву схему Рунге-Кутта

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i}{h} = p_1 k_1 + p_2 k_2, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \overline{y}_0 = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

де

$$k_1 = f\left(x_i, \overline{y}_i\right), \quad k_2 = f\left(x_i + \alpha h,\, \overline{y}_i + \alpha h k_1\right), \quad 0 < \alpha \le 1 .$$

Якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні третього порядку за обома змінними, то для розв'язку $y(x)$ задачі (1) за формулою Тейлора одержуємо

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i'' h^2}{2} + \frac{y_i''' h^3}{6} + O(h^4) .$$

Підставляючи точний розв'язок у перші n рівнянь схеми (2), знаходимо різницю між її лівою і правою частинами у вигляді

$$\Delta_i\left(h\right) = y_i' + \frac{1}{2} y_i'' h + \frac{1}{6} y_i''' h^3 + O\left(h^3\right) - p_1 f_i -$$

$$- p_2 \left(f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \alpha h + \frac{\partial f_i}{\partial y} \alpha h f_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} f_i^2 \right) \left(\alpha h\right)^2 + O\left(h^3\right) \right),$$

де позначено

$$f_i \equiv f(x_i, y_i).$$

Оскільки з (1) випливають рівності

$$y_i' = f_i, \quad y_i'' = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} f_i,$$

$$y_i''' = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} f_i^2 + \frac{\partial f_i}{\partial y} y_i'',$$

то

$$\Delta_i(h) = (1 - p_1 - p_2) y_i' + \left(\frac{1}{2} - \alpha p_2\right) y_i'' h +$$

$$+\left(\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha^2 p_2\right) y_i''' + \frac{1}{2}\alpha^2 p_2 \frac{\partial f_i}{\partial y} y_i''\right) h^2 + O(h^3).$$

Отже, третій порядок апроксимації отримаємо лише тоді, коли

$$\begin{cases} 1 - p_1 - p_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2} - \alpha p_2 = 0, \\ \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}\alpha^2 p_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\alpha^2 p_2 \dfrac{\partial f_i}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Із системи (3) знаходимо

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Таким чином, якщо права частина рівняння (1) не залежить від змінної y, то, поклавши $x_0 = a,\ y_0 = 0,$ одержуємо задачу Коші

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = 0. \tag{5}$$

Звідси маємо

$$y(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{6}$$

і якщо функція $f(x)$ тричі неперервно диференційована на відрізку $[a,b]$, то враховуючи (4), з точністю до $O(h^3)$ знаходимо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{4}\cdot\left(f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)\right), \tag{7}$$

де

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \ i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Зрозуміло, що при цьому

$$y(x_i) = \int_a^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad y(x_n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Застосуємо отриманий результат до наближеного розв'язування одного класу інтегральних рівнянь Вольтерра II роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s) y(s) ds + f(x), \quad a \le x \le b. \tag{9}$$

Припустимо, що $K(x,s) \equiv k(s)$, і функції $y(x)$, $k(s)$, $f(x)$ тричі неперервно диференційовані на відрізку $[a,b]$. Тоді з інтегрального рівняння (9) отримаємо рівність

$$y(x_i) = \lambda \int_a^{x_i} k(s) y(s) ds + f(x_i), \quad i = 0,1,...,n. \tag{10}$$

Позначимо $k_i = k(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Якщо $\overline{y}_i$ – наближені значення шуканої функції у вузлах x_i, то, використовуючи для наближеного обчислення інтеграла у формулі (10) рекурентну формулу (7) з кроком $3h$, з врахуванням рівняння (9) приходимо до рівності

$$\overline{y}_{i+3} = \lambda \left(\frac{\overline{y}_i - f_i}{\lambda} + \frac{3h}{4}\left(k_i \overline{y}_i + 3k_{i+2}\overline{y}_{i+2}\right) \right) + f_{i+3} =$$

$$= \overline{y}_i + \frac{3\lambda h}{4}\left(k_i \overline{y}_i + 3k_{i+2}\overline{y}_{i+2}\right) + f_{i+3} - f_i, \; i = 0,1,...,n-3.$$

При цьому $\overline{y}_0 = f_0$, а значення $\overline{y}_1$ та $\overline{y}_2$ можна знайти за формулами

$$\overline{y}_1 = \left(1 - \frac{h}{2}\lambda k_1\right)^{-1} \left(f_1 + \frac{h}{2}\lambda k_0 \overline{y}_0\right),$$

$$\overline{y}_2 = \left(1 - \frac{h}{2}\lambda k_2\right)^{-1} \left(f_2 + \frac{h}{2}\lambda k_0 \overline{y}_0 + h\lambda k_1 \overline{y}_1\right).$$

Зауважимо, що описана тут методика може бути застосована і до наближеного розв'язування рівносильної заданому інтегральному рівнянню задачі Коші:

$$y'(x) = \lambda k(x) y(x) + f'(x), \;\; y(a) = f(a).$$

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.10.2011 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Артемовичем О.Д.***

ON ONE APPROXIMATION METHOD OF THE APPROACH SOLVING OF VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

I. V. Fedak
PreCarpathian National University by V. Stefanyc;
76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko st., 57;
e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

One new method of the approach solving of Volterra second kin linear integral equations have proposed.

Key words: *Volterra linear integral equation, approximation method.*