УДК 517.925.3

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

С. І. Гургула[1], Р. І. Собкович[2]

[1]*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@ nung.edu.ua*

[2]*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел.+380 (342) 59-60-16; e-mail: algeo @ pu.if.ua*

Для системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу одержані достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості тривіального розв'язку, подібні до тих, які дає другий метод Ляпунова для систем диференціальних рівнянь без імпульсної дії.

Ключові слова: *імпульсна дія, стійкість, функція Ляпунова.*

Розглядається система звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,\, x), \quad t \neq t_i\,, \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} \equiv x(t_i+0) - x(t_i) = I_i(x)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \geq t_0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in R^n$, $I_i \in R^n$, $i = 1, 2, \dots$.

Функція $f(t,\, x)$ вважається заданою в області

$$Z = \{t \geq t_0\,,\ x \in \bar{J}_h\}, \tag{2}$$

де $\bar{J}_h = \{x \in R^n\,, \|x\| \leq h,\, h > 0\}$ і $f(t,\, 0) = 0$, $t \geq t_0$, функції $I_i(x)$ визначені і неперервні в кулі $\bar{J}_h$, $I_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Відносно послідовності моментів часу $\{t_i\}$ припускаємо, що $t_i > t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, і $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Досліджуватимемо питання стійкості тривіального розв'язку такої системи.

Функція Ляпунова, яка фігурує нижче, вважається скалярною і неперервно диференційовною по всіх своїх аргументах; функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ вважаються заданими і неперервними при $s \geq 0$, причому $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(s) > 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, функція $\rho(t)$ – заданою, неперервною і невід'ємною при $t \geq t_0$.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 1. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$, така, що всюди в області Z виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad\, V\,,\, f \rangle \le -\rho(t)\varphi(V)\,, \tag{3}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \le \psi(V(t_i, x))\,, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots\,, \tag{4}$$

а також існують константи $\theta_1 > 0$ і $\rho_0 > 0$ такі, що для всіх $i = 1,\, 2,\, \ldots$, і при $t \ge t_0$ виконані нерівності

$$t_i - t_{i-1} \ge \theta_1\,, \tag{5}$$

$$\int_t^{t+\theta_1} \rho(\tau)d\tau \ge \rho_0\,. \tag{6}$$

Тоді, якщо при деякому $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0,\, a_0]$

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0\,, \tag{7}$$

то тривіальний розв'язок системи (1) стійкий за Ляпуновим. Причому, якщо існує $\gamma > 0$ таке, що

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0 - \gamma\,, \tag{8}$$

то цей розв'язок асимптотично стійкий.

Доведення. Нехай $0 < \varepsilon < h$ і $l = \inf\limits_{t \ge t_0,\, \|x\| \ge \varepsilon} V(t, x) \le a_0$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб виконувалась нерівність $m = \sup\limits_{\|x\| < \delta} V(t_0, x) < l$, і нехай $x(t),\ x(t_0) = x_0 \in J_\delta$ – довільний нетривіальний розв'язок системи (1). Доведемо, що $x(t) \in J_\varepsilon$ при $t \ge t_0$. Розглянемо функцію $v(t) = V(t, x(t))$. Із (3) випливає, що $v'(t) \le -\rho(t)\varphi(v(t)),\ t \ne t_i\,,\ x(t) \in \bar{J}_h$, що свідчить про те, що $v(t)$ спадає на кожному проміжку $(t_i\,,\, t_{i+1}]$, тому якщо $v(t_i + 0) < l$, то $v(t) < l$ для всіх $t \in (t_i\,,\, t_{i+1}]$. Отже, досить показати, що послідовність $\{v(t_i + 0)\},\ i = 0, 1, 2, \ldots,$ незростаюча. Із нерівності $v'(t) \le -\rho(t)\varphi(v(t)),\ \ t \ne t_i$ маємо

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{v'(\tau)d\tau}{\varphi(v(\tau))} \le -\int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho(\tau)d\tau\ \ ,$$

або, після заміни $v(\tau) = s$, для $i = 1,\, 2,\, \ldots$ одержуємо:

$$\int_{v(t_{i-1}+0)}^{v(t_i)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le -\int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho(\tau)d\tau\ \ ,$$

що з урахуванням (5) і (6) приводить до нерівності

$$\int_{v(t_{i-1}+0)}^{v(t_i)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le -\rho_0\,. \tag{9}$$

Далі із (4) і (7) випливає, що

$$\int\limits_{v(t_i)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0 .$$

Додавши почленно дві останні нерівності, одержуємо:

$$\int\limits_{v(t_{i-1}+0)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le 0 ,$$

що свідчить про те, що $v(t_{i-1}+0) \ge v(t_i+0)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Для доведення твердження теореми про асимптотичну стійкість досить показати, що $v(t_n+0) \to 0$ при $n \to \infty$. В цьому випадку із нерівностей (4) і (8) слідує, що

$$\int\limits_{v(t_i)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0 - \gamma .$$

Разом із (9) це приводить при $i = 1, 2, \ldots$ до нерівності

$$\int\limits_{v(t_i+0)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \gamma .$$

Просумувавши такі нерівності по i від 1 до n, отримуємо

$$\int\limits_{v(t_n+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge n\gamma ,$$

що свідчить про те, що $v(t_n+0) \to 0$ при $n \to \infty$. Теорему доведено.

Як видно із нерівності (3), тривіальний розв'язок відповідної системи без імпульсної дії був стійким. Для того, щоб він залишився таким і в системі з імпульсною дією, необхідно щоб імпульсні збурення були досить рідкими і досить слабкими, про що говорять умови (4)–(7) теореми. Достатні умови стійкості і асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (1) у випадку, коли цей розв'язок міг бути нестійким у відповідній системі без імпульсної дії, даються наступною теоремою.

Теорема 2. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$, така, що всюди в області Z виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad\, V , f \rangle \le \rho(t)\varphi(V) , \tag{10}$$

а також існують константи $\theta_2 > 0$ і $\rho_0 > 0$ такі, що для всіх $i = 1, 2, \ldots$, і при $t \ge t_0$ виконані нерівності

$$t_i - t_{i-1} \le \theta_2 , \tag{11}$$

$$\int\limits_t^{t+\theta_2} \rho(\tau)d\tau \le \rho_0 . \tag{12}$$

Тоді, якщо при деякому $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \rho_0 , \tag{13}$$

то тривіальний розв'язок системи (1) стійкий за Ляпуновим. Причому, якщо існує $\gamma > 0$ таке, що

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0 + \gamma , \tag{14}$$

то цей розв'язок асимптотично стійкий.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1. Зміст умов теореми полягає в тому, що імпульсні збурення повинні бути досить частими і досить сильними.

Переходимо до теорем про нестійкість. Вважається, що функція Ляпунова $V(t, x)$, яка фігурує в цих теоремах, наділена такими властивостями:

а) область додатності $V(t, x)$ $D = \{(t, x) \in Z,\ V(t, x) > 0\}$ при всякому $t \geq t_0$ має непорожній відкритий переріз гіперплощиною $t = const$, який дотикається до початку координат;

б) в області D $V(t, x)$ обмежена; позначимо $a_0 = \sup\limits_{(t,\, x) \in D} V(t, x)$.

Теорема 3. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t, x)$, яка володіє властивостями а) і б), така, що в області D виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad\, V ,\ f \rangle \geq -\rho(t)\varphi(V) , \tag{15}$$

$$V(t_i ,\ x + I_i(x)) \geq \psi(V(t_i ,\ x)) , \quad i = 1, 2, \ldots , \tag{16}$$

виконана умова (11), а також можна вказати константу $\rho_0 > 0$ таку, що при $t \geq t_0$

$$\int_{t}^{t+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \leq \rho_0 . \tag{17}$$

Тоді, якщо при деякому $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$ виконана нерівність

$$\int_{a}^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0 + \gamma , \tag{18}$$

то тривіальний розв'язок системи (1) нестійкий.

Доведення. Нехай $\delta > 0$ як завгодно мале. За умовою знайдеться $x_0 \in J_\delta$ таке, що $V(t_0 , x_0) > 0$. Покажемо, що розв'язок $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, з часом вийде за межі кулі $\overline{J}_h$. Припустимо супротивне: $x(t) \in \overline{J}_h$, $t \geq t_0$. Тоді $(t , x(t)) \in D$. Справді, нехай $v(t) = V(t, x(t))$ і $t^* \in (t_i , t_{i+1}]$ – момент часу, коли вперше виконається рівність $v(t) = 0$.

В силу (15) $v'(t) \geq -\rho(t)\varphi(v(t))$, $t \neq t_i$, тоді

$$\int_{t_i}^{t^*}\frac{v'(\tau)d\tau}{\varphi(v(\tau))}\geq -\int_{t_i}^{t^*}\rho(\tau)d\tau\ .$$

Звідси після заміни $s=v(\tau)$ і з урахуванням (17) випливає

$$\int_{v(t^*)}^{v(t_i+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}\leq\rho_0\,,$$

що неможливо, бо $v(t^*)=0$, а в силу (18) невласний інтеграл $\int_{0}^{v(t_i+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}$ розбіжний. Отже $(t,\,x(t))\in D$, що означає що $v(t)$ – обмежена функція. Аналогічно, як при доведенні другої частини теореми 1, легко одержати, що при $i=1,\,2,\,...$ виконані нерівності

$$\int_{v(t_{i-1}+0)}^{v(t_i+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}\geq\gamma\,.$$

Додаючи такі нерівності, для будь-якого натурального n отримуємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_n+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}\geq n\gamma\,,$$

що означає, що $v(t_n+0)\to\infty$ при $n\to\infty$ і суперечить обмеженості функції $v(t)$. Теорему доведено.

Як видно із умов теореми, тривіальний розв’язок відповідної системи без імпульсної дії міг бути стійким, чи навіть асимптотично стійким. Щоб в системі (1) він став нестійким, імпульсні збурення повинні бути досить частими і досить сильними, про що свідчать умови (11), (16)–(18) теореми 3. Що ж стосується ситуації, коли розв’язок $x\equiv 0$ системи без імпульсної дії був нестійким, то в цьому випадку справедливе наступне твердження.

Теорема 4. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t,\,x)$, наділена властивостями а) і б), така, що в області D виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\langle grad\,V\,,\,f\rangle\geq\rho(t)\varphi(V)\,, \tag{19}$$

і (16), має місце умова (5), а також можна вказати константу $\rho_0>0$ таку, що при $t\geq t_0$

$$\int_{t}^{t+\theta_1}\rho(\tau)d\tau\geq\rho_0\,. \tag{20}$$

Тоді, якщо при деякому $\gamma>0$ для всіх $a\in(0,\,a_0]$

$$\int_{\psi(a)}^{a}\frac{ds}{\varphi(s)}\leq\rho_0-\gamma\,, \tag{21}$$

то розв’язок $x\equiv 0$ системи (1) нестійкий.

Як видно із умов (16), (5), (20), (21) теореми імпульсні збурення в цьому випадку повинні бути не надто частими і не надто сильними.

Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Демидович Б.П. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Гургула С.І. Про стійкість розв'язків імпульсних систем / С.І. Гургула, М.О.Перестюк // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип.23. – С. 33-40.
3. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова в системах з імпульсною дією / С.І.Гургула, І.Й.Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2008. – №1(1). – С. 9-15.
4. Гургула С.І. Про стійкість в системах з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2009. – №1(5). – С. 24-29.
5. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова для диференціальних рівнянь з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович, І.Й.Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2010. – №1(9). – С. 14-20.

Стаття надійшла до редакційної колегії 13.10.2011 р.
Рекомендовано до друку академіком НАН України,
професором ***Перестюком М.О.***

STABILITY OF SOLUTIONS OF SYSTEMS WITH IMPULSIVE ACTIONS

S. I. Gurgula[1], R. I. Sobkovych[2]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka st., 15;
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]PreCarpathian National University by Vasil Stefanic;
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko st., 57;
ph. +380 (342) 59-60-16; e-mail: algeo@pu.if.ua

Criteria's of stability, asymptotic stability and non-stability of simple solution in an analogy to those according to the secondary Liapunov's method for differential equations without impulses, were issued for system of ordinary differential equations with impulsive action in the fixed moments of time.

Key words: *impulsive action, stability, function of Liapunov.*