УДК 517.956.4

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

В. М. Лучко, М. І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича; 58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2; тел. +380 (372) 58-48-64; e-mail: difeg@chnu.cv.u; kafedra_DR@mail.ru

Одержано розв'язок задачі Коші для параболічної псевдодиференціальної системи рівнянь з імпульсним впливом. Псевдо диференціальні оператори трактуються як гіперсингулярні інтегральні оператори. Зв'язок між ними здійснюється за допомогою зображення елементів матричного символу α через сферичні функції.

Ключові слова: *система псевдодиференціальних рівнянь, імпульсна дія, нормальна фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші, неоднорідна задача, оцінка матричного осцилюючого інтеграла.*

Теорія псевдодиференціальних операторів та псевдодиференціальних рівнянь, яка в сучасній формі була створена в середині шістдесятих років, є предметом багатьох досліджень. їх число значно збільшилося після того, як виявилося, що псевдодиференціальні оператори тісно пов'язані з важкими і важливими задачами аналізу та сучасної математичної фізики.

Лінійні параболічні псевдодиференціальні рівняння з негладкими символами були визначені С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем на початку сімдесятих років у працях [1]-[2]. М.В. Федорюком [3] знайдена точна асимптотика фундаментального розв'язку задачі Коші при $x \to \infty$, яка не є експоненціальною, як для диференціальних рівнянь, а степеневою. Важливу роль у подальшому розвитку даної теорії відіграла праця А.Н. Кочубея [4], в якій він вперше звернув увагу на те, що псевдодиференціальні оператори з негладкими символами можуть трактуватися як гіперсингулярні інтегральні оператори. Це дало можливість при дослідженні задачі Коші для таких рівнянь використати добре розвинену теорію гіперсингулярних інтегралів [5].

Найбільш повні та глибокі дослідження задач з імпульсною дією вивчені А.М. Самойленком та М.О. Перестюком. В їх монографії [7] досліджуються основні питання теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Наведена загальна характеристика систем таких рівнянь, вказано подібність та відмінність задач даної теорії, із задачами звичайних диференціальних рівнянь. Основну увагу в роботі приділяється дослідженню періодичних та майже періодичних розв'язків систем з імпульсною дією, інтегральних множин рівнянь, що розглядаються, питання стійкості розв'язку, імпульсному керуванню процесами.

1. Постановка задачі. У шарі $\Pi_E \equiv \{(\mathrm{t}, \mathrm{x}),\ t \in (t_0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$ розглядається задача Коші для параболічної псевдодиференціальної системи рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + (Au)(t,x) = f(t,x), \quad t \neq \tau_j, \tag{1}$$

$$u(t,x)\big|_{t=t_0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\Delta_t u(t,x)\big|_{t=\tau_j+0} = B_j u(\tau_j, x) + a_j(x). \tag{3}$$

Тут A – матричний псевдодиференціальний оператор (ПДО) з символом $a(\sigma)$, який визначається формулою

$$(Au)(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} a(\sigma) V(t,\sigma) d\sigma,$$

$$V(t,\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)} u(t,x) dy,$$

$a(\sigma)$ – матриця розмірності m, f, B_j, a_j – одноколонні матриці, причому a_j, $f(t,x)$ – неперервні по t і абсолютно сумовні за аргументом x, B_j – сталі,

$$\Delta_t u(t,x) = u(\tau_j + 0, x) - u(\tau_j, x), \quad u(\tau_j, x) = \lim_{t \to \tau_j - 0} u(t,x),$$

$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p < T$.

Нехай виконується умови:

1) елементи матриці $a(\sigma)$ є неперервними, а також однорідними по σ порядку $\gamma \geq 1$ функціями;

2) система (1) параболічна в Π_{T}, тобто λ – корені многочлена $\det(a(\sigma) - \lambda E)$, де E одинична матриця, задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda(\sigma) \leq -\delta |\sigma|^{\gamma},$$

з деякою сталою $\delta > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$;

3) елементи матриці $a(\sigma)$ мають $N \geq 2n + 2[\gamma] + 1$, де $[\gamma]$ – ціла частина числа γ, неперервних похідних по σ при $\sigma \neq 0$, для яких правильні оцінки

$$\left\| D_\sigma^\chi a(\sigma) \right\| \leq c_N |\sigma|^{\gamma - |\chi|},$$

$|\chi| \leq N$.

2. Гіперсингулярні інтеграли і псевдо диференціальні оператори

Для подальших міркувань особливо важливим є запропоноване в працях [4, 6] тлумачення псевдо диференціальних операцій (ПДО) як гіперсигулярних інтегралів (ГСІ) [5]. У випадку системи псевдодиференціальних рівнянь аналогічні результати отримані а [8]. Наведемо деякі з них.

Вираз вигляду

$$\left\| D_{\Omega}^{\alpha}(x) \right\| \equiv d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(x, \frac{h}{|h|} \right) \left(\Delta_h^l f \right)(x) |h|^{-(n+\alpha)} dh, \tag{4}$$

де $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \in C(\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$ – задані комплексно значні функції, $f \in \mathbb{R}^n$, S^{n-1} – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < l \in \mathbb{N}$, d – деяка стала, що залежить від чисел n, l, α, яку виберемо пізніше, називається матричним ГСІ порядку α з характеристикою Ω.

Нехай $f_{\xi}(x) = e^{i(x,\xi)}$ – матриця-стовпчик, тоді

$$\left(D_{\Omega}^{\alpha} f_{\xi} \right)(x) = d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(x, \frac{h}{|h|} \right) \left(1 - e^{i(x,\xi)} \right)^l e^{i(x,\xi)} |h|^{-(n+\alpha)} dh \equiv \widetilde{\Omega}(x,\xi) f_{\xi}(x),$$

де

$$\widetilde{\Omega}(x,\xi) = d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(x, \frac{h}{|h|} \right) \left(1 - e^{i(x,\xi)} \right)^l |h|^{-(n+\alpha)} dh$$

називається символом матричного ГСІ D_{Ω}^{α}.

Якщо $\Omega(x,\xi) \equiv E$, то сталу можна вибрати так, щоб $\widetilde{\Omega}(x,\xi) \equiv E|\xi|^{\alpha}$. Покладемо в (4)

$$d = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 - e^{i\xi_1} \right)^l |\xi|^{-(n+\alpha)} d\xi, \qquad \xi_1 \equiv (\vec{e}, \xi),$$

$\vec{e}_1 = (1,0,...,0)$.

Правильні такі твердження.

1^0. Матричний ГСІ з сталою характерною $\Omega \equiv E$

$$D_E^{\alpha} f = d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} E\left(\Delta_y^l f \right)(x) |h|^{-(n+\alpha)} dy \tag{6}$$

не залежить від вибору $l > \alpha$ і є означенням операції

$$F_{\xi \to x}^{-1}\left[E|x|^{\alpha} F_{x \to \xi}[f] \right],$$

$f \in S(\mathbb{R}^n)$, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір основних функцій, $F_{x \to \xi}$ та $F_{\xi \to x}^{-1}$ – відповідно пряме та обернене перетворення Фур'є.

2^0. Функція d є аналітичною функцією аргументу $\alpha > 0$ і обчислюється за формулою

$$d = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma\left(\mathrm{n} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} C_l^k k^{\alpha}$$

для непарних α і

$$d = \frac{(-1)^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\alpha-1} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma\left(\mathrm{n} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} C_l^k k^{\alpha}$$

у випадку парних α. Зауважимо, що $d = 0$ при $\alpha = 1,2,...,l-1$ [5].

3^0. Матричний ГСІ (4) збігається абсолютно при $l > \alpha$ (α – неціле число) і за умови, що функція f має обмежені ГСІ, як і в [5], є матричним диференціальним оператором α. Якщо α – непарне, то при $l > \alpha$ інтеграл в (4) дорівнює нулеві для довільної функції f [5].

4^0. Нехай задано матричний ГСІ, тоді запишемо його у вигляді матричного ПДО, припустимо, що $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Тоді

$$\left(D_\Omega^\alpha f\right)(\xi) = \frac{(2\pi)^{-n}}{d} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(x, \frac{h}{|h|}\right)|h|^{-(n+\alpha)} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \left(1 - e^{i(x,\xi)}\right)^l \widetilde{f}(\xi) d\xi \right) dh = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widetilde{\Omega}(x,\xi) \widetilde{f}(\xi) d\xi.$$

Розглянемо ПДО вигляду

$$(Au)(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} a(\xi) \widetilde{u}(t,\xi) d\xi. \tag{8}$$

Зв'язок між ПДО та ГСІ здійснюється за допомогою зображення елементів матричного символу α через сферичні функції [4, 5].

3. <u>Основний результат</u>. В образах Фур'є задачі (1)-(3) відповідає задача з імпульсною дією і параметром $\sigma \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{dV(t,\sigma)}{dt} + a(\sigma)V(t,\sigma) = \widetilde{f}(t,\sigma), \quad (t \neq \tau_j) \tag{9}$$

$$V(t,\sigma)\big|_{t=t_0} = \widetilde{\varphi}(\sigma), \tag{10}$$

$$\Delta_t V(t,\sigma)\big|_{t=\tau_j+0} = B_j V(\tau_j,\sigma) + \widetilde{a}_j(\sigma). \tag{11}$$

Для неоднорідної задачі (9)-(11) розглянемо відповідну однорідну задачу

$$\frac{dV(t,\sigma)}{dt} + a(\sigma)V(t,\sigma) = 0, \quad (t \neq \tau_j) \tag{12}$$

$$V(t,\sigma)\big|_{t=t_0} = \widetilde{\varphi}(\sigma), \tag{13}$$

$$\Delta_t V(t,\sigma)\big|_{t=\tau_j+0} = B_j V(\tau_j,\sigma). \tag{14}$$

Нехай $Q(t-\tau,\sigma)$ – нормальна фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші

$$\frac{dQ}{dt} + a(\sigma)Q = 0, \qquad Q\big|_{t=\tau} = E.$$

Матриця $Q(t-\tau,\sigma)$ має вигляд

$$Q(t-\tau,\sigma) = e^{-a(\sigma)(t-\tau)}. \tag{15}$$

Тоді матрицант $M(t,t_0,\sigma)$ задачі (12)-(14) визначається формулою [7]

$$M(t,t_0,\sigma) = Q(t-\tau,\sigma) \prod_{p=j}^{1} \left(E + B_p\right) Q\left(\tau_p - \tau_{p-1},\sigma\right). \tag{16}$$

де $\tau_j < t \le \tau_{j+1}$, причому M не вироджена матриця, якщо такі $E + B_p$.

Розв'язок задачі (12)-(14) визначається за формулою

$$V(t,\sigma) = M(t,t_0,\sigma)\widetilde{\varphi}(\sigma). \tag{17}$$

Для розв'язку неоднорідної задачі (9)-(11) отримуємо зображення

$$\begin{aligned} V(t,\sigma) = M(t,t_0,\sigma)\widetilde{\varphi}(\sigma) + \int_{t_0}^{t} M(t,\tau,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau + \\ + \sum_{t_0<\tau_j<t} M(t,\tau_j,\sigma)\widetilde{a}_j(\sigma), \qquad (t>t_0). \end{aligned} \tag{18}$$

Застосувавши до обох частин формули (18) обернене перетворення Фур'є і скориставшись теоремою про перетворення Фур'є згортки, отримаємо зображення розв'язку задачі (1)-(3)

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,t_0,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi + \\ + \sum_{t_0<\tau_j<t} \int_{\mathbb{R}^n} G(t,\tau_j,x-\xi)a_j(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{19}$$

Тут $G(t,\tau,x)$ – функція Гріна задачі (1)-(3), яка визначається як обернене перетворення Фур'є матриканта

$$G(t,\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} M(t,\tau,\sigma)d\sigma,$$

$$\Delta_t G(t,t_0,x)\big|_{t=\tau_j} = B_j G(\tau_j,t_0,x),$$

де $t_0 < \tau_1 < ... < \tau_j < t < T$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Для подальших міркувань, важливу роль відіграє точна оцінка матричного осцилюючого інтеграла вигляду

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} P(\sigma)e^{i(z,\sigma)-a(\sigma)}d\sigma,$$

де $P(\sigma)$ – матриця, елементи якої є однорідними многочленами степеня $\nu \in \mathbb{N}$.

Лема. *Якщо* $N \ge 2n + \nu + [\gamma]$ *та виконуються умови 1)–3), то існує стала* $c > 0$ *така, що*

$$\|\Phi(z)\| \le c(1+|z|)^{-n-\gamma-\nu}.$$

Доведення леми приведене в праці [8]. На її основі для функції $G(t,\tau,x)$ та її похідних правильними є оцінки

$$\|D_x^{\chi} G(t,\tau,x)\| \le c(t-\tau)\prod_{j=1}^{p}\|E+B_j\|\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{-n-\gamma-|\chi|},$$

$$\|D_t G(t,\tau,x)\| \le c\prod_{j=1}^{p}\|E+B_j\|\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{-n-\gamma},$$

$|\chi| \le N - 2n - [\gamma]$.

Теорема. Нехай виконуються умови 1)-3), рівняння (1) є параболічним; 2) вирази $\det(E+B_j) \ne 0$, $j = \overline{1,p}$; тоді розв'язок задачі (1)-(3) для будь-яких функцій $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^{\alpha}(\Pi_T)$ визначається формулою (19) та для його похідної правильна оцінка

$$\|D_t u(t,x)\| \le c(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)\|\varphi\|_C + \|f\|_\alpha .$$

Доведення теореми проводиться розповсюдженням міркувань із праці [9].

Література

1. Эйдельман С.Д. Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д.Эйдельман, Я.М.Дринь // Приближенные методи математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60-69.
2. Эйдельман С.Д. Построение и исследование класических фундаментальних решений задачи Коши для равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д.Эйдельман, Я.М.Дринь // Математические исследования. – Кишинев, 1981. – Вып. 63. – С. 18-33.
3. Федорюк М.В. Асимптотика функции Грина псевдодифференциального уравнения / М.В.Федорюк // Дифференц. уравнения. – 1978. – №7. – С. 1296-1301.
4. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А.Н.Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. мат. – Т.52, №5. – С. 909-934.
5. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения / С.Г.Самко. – Ростов-на-Дону: Ростовский ун-т, 1984. – 208 с.
6. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А.Н.Кочубей // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т.25, №8. – С. 1359-1368.
7. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М.Самойленко, М.А.Перестюк. – К.: Вища школа, 1987. – 258 с.
8. Дрінь Я.М. Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами / Я.М.Дрінь, С.Д.Ейдельман // "Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями", Зб. наук. праць. – Чернівці, 1990. – С. 21-31.
9. Лучко В.М. Задача Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння вищого порядку / В.М.Лучко // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2008. – Вип.2. – С. 19-25.

Стаття надійшла до редакційної колегії 13.10.2011 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Пукальським І.Д.***

CAUCHY PROBLEM OF PARABOLIC SYSTEM OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUALIZATIONS WITH IMPULSIVE BY INFLUENCING

V. M. Luchko, M. I. Matiychuk
Chernivetsy National University by Y. Fedkovych;
58012, Chernivtsy, Kotsiubynsky st., 2; ph. +380 (372) 58-48-64;
e-mail: difeg@chnu.cv.u; kafedra_DR@mail.ru

The decision of task Cauchy is got for the parabolic pseudo differential system of equalizations with the impulsive influencing. Pseudo differential operators are interpreted as gipersingular integral operators. Communication between them is carried out by the image of elements of matrix character through spherical functions.

Key words: *system of pseudo differential equalizations, impulsive action, normal fundamental matrix of decisions of task Cauchy, heterogeneous task, estimation of matrix octillion integral.*