Математика та механіка

УДК 517.956

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

І. Д. Пукальський, І. М. Ісарюк
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;
58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2; тел. +380 (372) 58-48-64;
e-mail: difeg@chnu.cv.u; kafedra_DR@mail.ru

У просторах класичних функцій зі степеневою вагою доведено існування та єдиність розв'язку першої параболічної крайової задачі з інтегральною умовою за часовою змінною для лінійного диференціального рівняння із степеневими особливостями на координатних площинах. Одержаний результат використано для дослідження задач оптимального керування.

Ключові слова: *нелокальна крайова задача, послідовні наближення, резольвента, оптимальне керування, лінійне параболічне рівняння з виродженням.*

Вивчення крайових задач для лінійних рівнянь із частинними похідними та задач керування систем, що описуються крайовими задачами з нелокальними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними проводилося багатьма авторами. Зокрема, дослідженню таких задач присвячені праці [1-11] .

Нелокальним крайовим задачам присвячено праці [12-17]. Необхідність вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з нелокальними умовами стимулювалася різними обставинами, зокрема розв'язання зворотних задач для рівнянь теплопровідності [16], задач із теорії фізики плазми [17].

У цій статті розглядається параболічна крайова задача з інтегральною умовою за часовою змінною для лінійного диференціального рівняння із степеневими особливостями на координатних площинах $x_i = 0$, i $\in \{1,2,...,n\}$, довільного порядку. Одержаний результат використано для дослідження задач оптимального керування із внутрішнім і фінальним керуваннями. Критерій якості задається сумою інтегралів.

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $(x_1,...,x_n)$ координати точки x простору $\mathbb{R}^n$, $\Omega_j \equiv \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, D обмежена область з множини $\{x \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0, j \in \{1,...,n\}\}$ з межею ∂D така, що $\partial D \bigcap \Omega_j \neq \emptyset, j \in \{1,...,n\}$, t_0, T – довільно фіксовані додатні числа, $t_0 < T$. Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ задачу знаходження функцій (u, p, q), на яких функціонал

$$I(p,q) = \int_0^T dt \int_D F_1(t, x; u(t, x; p(t,x), q(x)), p(t,x))dx + \\ + \int_D F_2(x; u(T, x; p(T,x), q(x)), q(x))dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі обмежених функцій $(p,q) \in V, V = \{(p,q), p \in C^{\alpha}(Q) | p_1(t,x) \leq p \leq p_2(t,x); q \in C^{2+\alpha}(D), q_1(x) \leq q(x) \leq q_2(x), \alpha \in (0,1)\}$, із яких $u(t, x; p(t,x), q(x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q^{(0)} = Q \setminus Q_{(0)}$, $Q_{(0)} = \{(t,x) \in Q, | t = t_0, x \in D\}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right]u = f(t, x; p(t,x)), \tag{2}$$

нелокальну умову за часовою змінною

$$u(0, x; p(0,x), q(x)) + \int_0^T b(\tau, x)u(\tau, x; p(\tau,x), q(x))d\tau = \varphi(x; q(x)) \tag{3}$$

і на бічній межі $\Gamma = [0,\mathrm{T}) \times \partial D$ крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D}[u(t, x; p(t,x), q(t)) - \psi(t,x)] = 0\,. \tag{4}$$

Нехай $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ – довільні фіксовані дійсні числа. Позначимо через $s_1(a^{(1)},t) = |t - t_0|^{a^{(1)}}$ при $|t - t_0| \leq 1$, $t \in [0,T]$; $s_1(a^{(1)},t) = 1$ при $|t - t_0| \geq 1$; $s_2(a^{(2)},x_i) = x_i^{a^{(2)}}$ при $0 \leq x_i \leq 1$; $s_2(a^{(2)},x_i) = 1$ при $x_i \geq 1$; $p(a^{(2)},x) = \min\{s_2(a^{(2)},x_1),...,s_2(a^{(2)},x_n)\}$; $s(a;P) = s_1(a^{(1)},t)\rho(a^{(2)},x)$, $a = (a^{(1)},a^{(2)})$. Нехай $(x_1^{(1)},...,x_i^{(1)},...,x_n^{(1)})$ – координати точки $x^{(1)}$ області $\overline{D} \equiv D \bigcup \partial D$, $(x_1^{(1)},...,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(1)},x_{i+1}^{(1)},...,x_n^{(1)})$ – координати точки $x^{(2)}$ області $\overline{D}$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$ довільні точки із $\overline{Q} = [0,T) \times \overline{D}$, $\beta_i^{(1)}$, $\beta_i^{(2)}$ – довільні фіксовані дійсні числа, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, l – додатні фіксовані дійсні числа.

Визначимо функціональні простори, в яких буде вивчатися задача (1)-(4).

$C^l(\gamma, \beta, a; Q)$ – множина функцій u: $(t,x) \in \overline{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2j + |k| \leq [l]$, для яких скінченна норма $\|u;\gamma,\beta;a;Q\|_l=\|u;\gamma,\beta;a;Q\|_{[l]}+<u;\gamma,\beta;a;Q>_l$, де, наприклад,

$$\|u;\gamma,\beta;a;Q\|_0=\sup_{\overline{Q}}|u|\equiv\|u;Q\|_0,$$

$$<u;\gamma,\beta;a;Q>_l=\sum_{2j+|k|=[l]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_1,H_i)\subset\overline{Q}}\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\{l\}}\times$$
$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)\right|s\left((2j+|k|+a+\{l\})\gamma;\widetilde{P}_1\right)s_2\left(-\{l\}\beta_i^{(2)},\widetilde{x}_i\right)\times$$
$$\times\prod_{m=1}^{n}s_2\left(-k_m\beta_m^{(2)},\widetilde{x}_m\right)+\sum_{2j+|k|=[l]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_2,H_i)\subset\overline{Q}}\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\left\{\frac{l}{2}\right\}}\times$$
$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)-\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)\right|s\left((2j+|k|+a+\{l\})\gamma;\widetilde{P}_2\right)\prod_{m=1}^{n}s_2\left(-k_m\beta_m^{(2)},\widetilde{x}_m\right).$$

Тут позначено $s_2(a,\widetilde{x}_i)=\min\left\{s_2\left(a,x_i^{(1)}\right),s_1\left(a,x_i^{(2)}\right)\right\}$,
$s\left(a,\widetilde{P}_\nu\right)=\min\{s(a,P_\nu),s(a,H_i)\}$, $\nu\in\{1,2\}$.

Щодо задачі (1)–(4) вважаємо виконаними умови:

1. Для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{ij=1}^{n}s_1\left(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)};t\right)s_2\left(\beta_i^{(2)};x_i\right)s_2\left(\beta_j^{(2)};x_j\right)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2, \qquad (5)$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі і $s_1\left(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)};t\right)s_2\left(\beta_i^{(2)};x_i\right)s_2\left(\beta_j^{(2)};x_j\right)A_{ij}\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;Q)$, $s_1\left(\mu_i^{(1)};t\right)s_2\left(\mu_i^{(2)};x_i\right)A_i\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;Q)$, $\rho\left(\mu_0^{(2)};x\right)s_1\left(\mu_0^{(1)};t\right)A_0\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;Q)$, $\mu_i^{(\nu)}\ge0$, $\nu\in\{1,2\}$, $i\in\{0,1,...,n\}$ і виконуються нерівності $\int_0^T|b(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\le\lambda_0<1$, $A_0(t,x)+\lambda<0$ для $(t,x)\in\overline{Q}$.

2. Функції $p_\nu\in C^\alpha(Q)$, $q_\nu\in C^{2+\alpha}(D)$, $\nu\in\{1,2\}$, $b\in C^{2+\alpha}(D)$, $f\in C^\alpha(\gamma,\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi\in C^{2+\alpha}\left(\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\right)$, $\widetilde{\gamma}=\left(0,\gamma^{(2)}\right)$, $\psi(t,x)\in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$, $\gamma^{(\nu)}=\max\left(\max_i\left(1+\beta_i^{(\nu)}\right),\max_i\left(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right),\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\right)$, межа $\partial D\in C^{2+\alpha}$, $\psi(0,x)+\int_0^T b(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau=\varphi(x,q(x))$ для $x\in\partial D$, $\alpha\in(0,1)$, $\gamma=\left(\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}\right)$, $\mu_i=\left(\mu_i^{(1)},\mu_i^{(2)}\right)$, $\mu_0=\left(\mu_0^{(1)},\mu_0^{(2)}\right)$.

3. Функції $F_1(t,x;u(t,x;p(t,x),q(x)),p(t,x))$, $F_2(x;u(T,x;p(T,x),q(x)),q(x))$ як складені функції змінних (t,x) та x належать відповідно до просторів $C^\alpha(Q)$, $C^\alpha(D)$. Крім того, функції $f(t,x;p(t,x))$, $F_1(t,x;u(t,x;p(t,x),q(x)),p(t,x))$, $\varphi(x,q(x))$, $F_2(x;u(T,x;p(T,x),q(x)),q(x))$ мають гельдерові похідні другого порядку за аргументами (u,p,q), неперервні як складені функції змінних (t,x) та x.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови 1, 2. тоді для довільних* $(p,q)\in V$ *існує єдиний розв'язок задачі (2)-(4) із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ *і справджується оцінка*

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\left(\|\varphi;\bar{\gamma},\bar{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha}+\|\psi;\gamma,\beta;0,Q\|_{2+\alpha}\right). \quad (6)$$

Для дослідження задачі (2)-(4) встановимо спочатку коректну розв'язність послідовності допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничним значенням послідовності розв'язків яких буде розв'язок задачі (2)-(4).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $Q_m=Q\cap\left\{(t,x)\in Q\,|\,s_1(1,t)\ge m_1^{-1},s_2(1,x_i)\ge m_2^{-1}\right\}, m=(m_1,m_2)$, $m_1\ge 1$, $m_2\ge 1$ – послідовність областей, яка при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ збігається до $Q^{(0)}$. Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)=\left[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}-\sum_{ij=1}^{n}a_i(t,x)\partial_{x_i}-a_0(t,x)\right]u_m(t,x)=$$
$$=f_m(t,x,p(x)), \quad (7)$$

які задовольняють нелокальну умову

$$u_m(0,x)+\int_0^T b(\tau,x)u_m(\tau,x)d\tau=\varphi(x,q(x)) \quad (8)$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[u_m(t,x)-\psi_m(t,x)\right]=0\,. \quad (9)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m, φ_m, ψ_m при $(t,x)\in Q_m$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0 і f, φ, ψ відповідно, а при $(t,x)\in Q\setminus Q_m$ є продовженням зі збереженням норми і гладкості [18, ст.82].

Встановимо оцінку розв'язків допоміжних крайових задач. розглянемо крайову задачу

$$((L_1-\lambda)v_m)(t,x)=f_me^{\lambda t}\,, \quad (10)$$

$$v_m(0,x)=\varphi_m\,,\qquad \lim_{x\to z\in\partial D}\left[v_m(t,x)-\psi_m(t,x)e^{\lambda t}\right]=0\,, \quad (11)$$

де λ задовольняє умову 1.

Знайдемо оцінку похідних розв'язку $v_m(t,x)$. Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|v_m;\gamma,\beta;a;Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому (m_1,m_2) гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma,\beta;a;Q\|_{2+\alpha}$, тільки замість функції $s_1(a^{(1)},t)$, $s_2(a^{(2)},x_i)$, $p(a^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(a^{(1)},t)$, $d_2(a^{(2)},x_i)$, $d_3(a^{(2)},x)$, де $d_1(a^{(1)},t)=\max\left(s_1(a^{(1)},t),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)}\ge 0$ і $d_1(a^{(1)},t)=\min\left(s_1(a^{(1)},t),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при

$a^{(1)} < 0$; $d_2\left(a^{(2)}, x_i\right) = \max\left(s_2\left(a^{(2)}, x_i\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \geq 0$ і $d_2\left(a^{(2)}, x_i\right) = \min\left(s_2\left(a^{(2)}, x_i\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} < 0$; $d_3\left(a^{(2)}, x\right) = \min\left(\rho\left(a^{(2)}, x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} < 0$ і $d_3\left(a^{(2)}, x\right) = \max\left(\rho\left(a^{(2)}, x\right), m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)} \geq 0$; $d(\gamma; P) = d_1\left(\gamma^{(1)}; t\right) d_3\left(\gamma^{(2)}; x\right)$.

Правильна теорема.

Теорема 2. *Нехай v_m – класичний розв'язок задачі (10), (11) в області Q і виконані умови 1, 2. Тоді для v_m правильна нерівність*

$$|v_m| \leq \max\left\{\|\varphi_m; D\|_0, \left\|f_m e^{\lambda t}(-\lambda - a_0)^{-1}; Q\right\|_0; \left\|\psi_m e^{\lambda t}; Q\right\|_0\right\}. \qquad (12)$$

Доводиться ця теорема за схемою доведення теореми 2.1 із [19, ст.22], тобто береться функція $v_m(t, x)$ і аналізуються всі можливі розміщення її додатного максимуму і від'ємного мінімуму.

Позначимо через $Z_m(t, x, \tau, \xi)$ функцію Гріна першої крайової задачі [19, ст.469]

$$((L_1 - \lambda) v_m)(t, x) = 0, \qquad v_m(0, x) = 1, \qquad \lim_{x \to z \in \partial D} v_m(t, x) = 0, \qquad (13)$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконані умови 1, 2, то існує єдиний розв'язок задачі (7)-(9) в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ для якого правильна оцінка*

$$|u_m| \leq c\left(\|\varphi_m; D\|_0, \left\|f_m e^{\lambda t}; Q\right\|_0; \left\|\psi_m e^{\lambda t}; Q\right\|_0\right). \qquad (14)$$

Доведення. Зробимо в задачі (7)-(9) заміну

$$u_m(t, x) = v_m(t, x) e^{-\lambda t},$$

де λ задовольняє умову 2. Одержимо задачу знаходження розв'язків рівняння (10), які задовольняють нелокальну умову

$$v_m(0, x) + \int_0^T b(\tau, x) e^{-\lambda \tau} v_m(\tau, x) d\tau = \varphi_m(x) \qquad (15)$$

і крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D}\left[v_m(t, x) - \psi_m(t, x) e^{\lambda t}\right] = 0. \qquad (16)$$

Розв'язок задачі (10), (15), (16) шукаємо у вигляді

$$v_m(t, x) = \omega_m(t, x) + \int_D Z_m(t, x, 0, \xi) v_m(0, \xi) d\xi, \qquad (17)$$

де $\omega_m(t, x)$ – розв'язок задачі (10), (11). Задовольняючи нелокальну умову (15), маємо

$$\begin{aligned} v_m(0, x) &= \int_0^T b(\tau, x) e^{-\lambda \tau} d\tau \int_D Z_m(\tau, x, 0, \xi) v_m(0, \xi) d\xi = \\ &= -\int_0^T b(\tau, x) \omega_m(\tau, x) e^{-\lambda \tau} d\tau \equiv F(x). \end{aligned} \qquad (18)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (18) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v_m^{(k)}(0,x)+\int_0^T b(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau\int_D Z_m(\tau,x,0,\xi)v_m^{(k-1)}(0,\xi)d\xi=F(x),$$

$$v_m^{(0)}(0,x)=F(x),\qquad k\in\{1,2,...\}.$$

Оскільки $Z_m(\tau,x,0,\xi)\geq 0$ і $\int_D Z_m(t,x,0,\xi)d\xi\leq 1$, то

$$\int_0^T |b(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\int_D Z_m(\tau,x,0,\xi)\leq\lambda_0<1.$$

Оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержимо

$$\left|v_m^{(k)}(0,x)-v_m^{(k-1)}(0,x)\right|\leq\lambda_0^k\|F;D\|_0.$$

Отже, розв’язок інтегрального рівняння зображується функціональним рядом

$$v_m(0,x)=F(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(v_m^{(k)}(0,x)-v_m^{(k-1)}(0,x)\right)$$

і для нього правильна оцінка

$$|v_m(0,x)|\leq\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\|F;Q\|_0. \tag{19}$$

Враховуючи властивості функції Гріна $Z_m(t,x,0,\xi)$, умови 1, 2 і рівність (18), при кожному фіксованому (m_1,m_2), одержуємо $v_m(0,x)\in C^{2+\alpha}(D)$. Враховуючи зображення (17), маємо $v_m(t,x)\in C^{2+\alpha}(Q)$.

Запишемо розв’язок інтегрального рівняння (17) у вигляді

$$v_m(0,x)=F(x)+\int_D G_m(x,y)F(y)dy, \tag{20}$$

де $G_m(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\begin{aligned}G_m(x,\xi)=&\int_0^T b(\tau,x)e^{-\lambda\tau}Z_m(\tau,x,0,\xi)d\tau+\int_0^T b(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau\times\\&\times\int_D Z_m(\tau,x,0,y)G_m(y,\xi)dy,\end{aligned} \tag{21}$$

звідки випливає оцінка

$$\left|\int_D G_m(x,\xi)d\xi\right|\leq\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Встановимо формулу для зображення розв’язку задачі (10), (15), (16).

Теорема 4. *Нехай виконані умови теореми 3 і* $\psi(t,x)\equiv 0$. *Тоді існує функція Гріна однорідної задачі (10), (15), (16)* (Z_m,Γ_m,E_m), *і правильна формула*

$$\begin{aligned}v_m(\mathrm{t},x)=&\int_0^t d\tau\int_D Z_m(t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi+\int_0^T d\tau\int_D \Gamma_m(T,t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi+\\&+\int_D E_m(T,t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)d\xi.\end{aligned} \tag{21}$$

Доведення. Підставляючи в рівність (20) замість $F(x)$ значення

$$F(x)=\int_0^T b(\tau,x)e^{-\lambda\tau}\left[\int_D Z_m(\tau,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau d\beta\int_D Z_m(\tau,x,\beta,y)f_m(\beta,y)e^{\lambda\tau}dy\right]d\tau,$$

і змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$v_m(0,x)=\int_0^T d\beta\int_D \Phi_m(T,x,\beta,y)f_m(\beta,y)e^{\lambda\beta}dy+\int_D \Phi_m(T,x,0,y)\varphi_m(y)dy\,, \quad (22)$$

де

$$\Phi_m(\mathrm{T},x,\beta,y)=-\int_\beta^T b(\tau,x)e^{-\lambda\tau}Z_m(\tau,x,0,\mathrm{y})d\tau-$$

$$-\int_\beta^T b(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau\int_D G_m(x,\xi)Z_m(\tau,\xi,0,y)d\xi.$$

Підставляючи (22) у інтеграл з рівності (17) і помінявши порядок інтегрування, одержимо зображення (21), де

$$\Gamma_m(T,t,x,\tau,y)=\int_D Z_m(t,x,0,\xi)\Phi_{\mathrm{m}}(T,\xi,\tau,y)d\xi\,,$$

$$E_m(T,t,x,0,y)=Z_m(t,x,0,y)+\Gamma_m(T,t,x,0,y).$$

В задачі (7)-(9) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m(t,x)e^{-\lambda t}+\psi_m(t,x)$, де λ задовольняє умову 2. Одержимо задачу знаходження розв'язків рівняння

$$((L_1-\lambda)v_m)(t,x)=f_m(t,x)e^{\lambda t}+(L_1\psi_m)(t,x)\equiv F_m(t,x), \quad (23)$$

які задовольняють нелокальну умову

$$\begin{gathered} v_m(0,x)+\int_0^T b(\tau,x)e^{-\lambda\tau}v_m(\tau,x)d\tau=\varphi_m(x)- \\ -\int_0^T b(\tau,x)\psi_m(\tau,x)d\tau-\psi_m(0,x)\equiv\Phi_m(x). \end{gathered} \quad (24)$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D} v_m(t,x)=0\,. \quad (25)$$

Правильна така теорема.

Теорема 5. *Нехай виконані умови 1, 2. Тоді для розв'язку задачі (23)-(25) правильна оцінка*

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\left(\|F_m;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha+\|\Phi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+\|v_m;Q\|_0\right). \quad (26)$$

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [14] маємо

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le\left(1+\varepsilon^\alpha\right)<v_m;\gamma,\beta;0;Q>_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|v_m;Q\|_0\,,$$

де $(\varepsilon \in 0{,}1)$, ε – довільне дійсне число. Тому досить оцінити пів норму $< v_m;\gamma,\beta;0;Q >_{2+\alpha}$. Із визначення норми випливає існування в Q точок P_1, H_i, P_2, для яких правильна одна з нерівностей:

$$\mu\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le E_m, \quad k \in \{1,2,3,4\}, \tag{27}$$

$$E_1 = \sum_{i,j,l=1}^{n} \left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)};t\right\| \partial_{x_i}\partial_{x_l} v_m(P_1) - \partial_{x_i}\partial_{x_l} v_m(H_i)\Big| d_1\big((2+\alpha)\gamma;\widetilde{P}_1\big)\times$$
$$\times d_2\big(-\beta_i^{(2)};\widetilde{x}_j\big) d_2\big(-\beta_l^{(2)};\widetilde{x}_l\big) d_2\big(-\alpha;\widetilde{x}_i\big);$$

$$E_2 = \sum_{i,j,l=1}^{n} |t_1 - t_2|^{-\frac{\alpha}{2}} \left|\partial_{x_j}\partial_{x_l} v_m(H_i) - \partial_{x_i}\partial_{x_l} v_m(P_2)\right| d_1\big((2+\alpha)\gamma;\widetilde{P}_2\big)\times$$
$$\times d_2\big(-\beta_j^{(2)};\widetilde{x}_j\big) d_2\big(-\beta_l^{(2)};\widetilde{x}_l\big);$$

$$E_3 = \sum_{i=1}^{n} \left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right|^{-\alpha} d\big((2+\alpha)\gamma;\widetilde{P}\big) d_2(-\alpha;x_i) \left|\partial_t v_m(H_i) - \partial_t v_m(P_1)\right|;$$

$$E_4 = \sum_{i=1}^{n} |t_1 - t_2|^{-\frac{\alpha}{2}} \left|\partial_t v_m(H_i) - \partial_t v_m(P_2)\right| d\big((2+\alpha)\gamma;\widetilde{P}_2\big);$$

$$\mu \in \left(\frac{1+\lambda_0}{2}, 1\right), d\big(a,\widetilde{P}_v\big) \equiv \min\{d(a,P_v), d(a,H_i)\}, v \in \{1,2\}.$$

Розглянемо випадки $\left|x_j^{(1)} - x_j^{(2)}\right| \le n^{-1} d\big(\gamma;\widetilde{P}_v\big) d_2\big(-\beta_j^{(2)};\widetilde{x}_j\big)\frac{r}{4} \equiv T_2$, або $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le d\big(2\gamma;\widetilde{P}_v\big)\frac{r^2}{16} \equiv T_1$, r – довільна стала, $r \in (0,1)$. Вважаємо, що $\widetilde{P}_v = P_1$. Запишемо задачу (23)-(25) у вигляді

$$(L_2 v_m)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right] v_m = \sum_{ij=1}^{n} \left[a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)\right]\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i} v_m + (a_0(P) - \lambda)v_m + F_m(P) \equiv F(t,x,v_m), \tag{28}$$

$$v_m(0,x) = \Phi_{\mathrm{m}}(x) - \int_0^T b(\tau,x) v_m(\tau,x) e^{-\lambda\tau} d\tau = g_m(x). \tag{29}$$

$$v_m\big|_{\Gamma} = 0. \tag{30}$$

Нехай V_δ – куб з центром в точці P_1, $\mathrm{V}_\delta = \big\{(t,x) \in Q, 0 \le |t - t_1| \le \delta^2 T_1,$ $\left|x_j - x_j^{(1)}\right| \le \delta T_2, j \in \{1,...,n\}\big\}$. Зробимо в задачі (28)-(30) заміну $v_m(\mathrm{t},x) = \omega_{\mathrm{m}}(t,z)$, $z_i = d_2\big(\beta_i^{(2)};x_i^{(1)}\big) d_1\big(\beta_i^{(1)};t^{(1)}\big) x_i$,

$$(L_3\omega_m)(t,z) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) d_1\big(\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)};t\big)\times\right.$$
$$\left.\times d_2\big(\beta_i^{(2)};x_i^{(1)}\big) d_2\big(\beta_j^{(2)};x_j^{(1)}\big)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right]\omega_m \equiv F(t,Z,\omega_m),$$

$$\omega_m(0,z) = g_m(Z), \quad \omega_m\big|_{\Gamma} = 0,$$

де $Z=(z_1,...,z_n)=\left(d_1\left(\beta_i^{(1)};t^{(1)}\right)d_2\left(\beta_j^{(2)};x_1^{(1)}\right)x_1,...,d_1\left(\beta_n^{(1)};t^{(1)}\right)d_2\left(\beta_n^{(2)};x_n^{(1)}\right)x_n\right)$.

Позначимо через $z_i^{(1)}=d_1\left(\beta_i^{(1)};t^{(1)}\right)d_2\left(\beta_j^{(2)};x_i^{(1)}\right)x_i$, $\mathrm{H}_\delta^{(1)}=\{(t,\tau);|t-t_1|\le$ $\le\delta^2T_1,\left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le\delta n^{-1}d(\gamma_1;P_1)\frac{r}{4}T_2, i\in\{1,2,...,n\}\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\eta(t,z)$, яка задовольняє умови

$$\eta(\tau,y)=\begin{cases}1, & (t,z)\in H_{1/4}^{(1)},\ 0\le\eta(t,z)\le 1;\\ 0, & (t,z)\notin H_{3/4}^{(1)},\ \left|\partial_t^k\partial_z^l\eta\right|\le c_{kl}d(-(2k+|l|)\gamma;P_1).\end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z)=\omega(t,z)\eta(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\begin{gathered}(L_3W_m)(t,z)=\omega_m\partial_t\eta-\sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1)d_1\left(\beta_i^{(1)}+\beta_j^{(1)};t\right)d_2\left(\beta_i^{(2)};x_i^{(1)}\right)d_2\left(\beta_j^{(2)};x_j^{(1)}\right)\times\\ \times\left[\partial_{z_i}\omega_m\partial_{z_j}\eta+\partial_{z_j}\omega_m\partial_{z_i}\eta+\omega_m\partial_{z_i}\partial_{z_j}\eta\right]+F(t,Z,\omega_m)\eta(t,z)\equiv F(t,z,\omega_m),\\ W_m(0,z)=g_m(Z)\eta(0,z)\equiv g_m^{(1)}(t,z),\quad W_m(t,z)|_\Gamma=0.\end{gathered}\tag{31}$$

На підставі теореми 5.2 із [19, с.364] для розв'язку задачі (31) і довільних точок M_1 та $M_2\in H_{1/4}^{(1)}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^k\partial_z^j\omega_m(M_1)-\partial_t^k\partial_z^j\omega_m(M_2)\right|\le c\left(|F_1|_{C^\alpha\left(H_{3/4}^{(1)}\right)}+\left|g_m^{(1)}\right|_{C^{2+\alpha}\left(H_{3/4}^{(1)}\right)}\right),\tag{32}$$

$d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2.
Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$, знаходимо

$$\begin{gathered}|F_1|_{C^\alpha\left(H_{3/4}^{(1)}\right)}\le cd(-(2+\alpha)\gamma;P_1)\Big(\left\|F;\gamma,0;2\gamma;H_{3/4}^{(1)}\right\|_\alpha+\\ +\left\|\omega_m;\gamma,0;0;H_{3/4}^{(1)}\right\|_2+\left\|\omega_m;H_{3/4}^{(1)}\right\|_0\Big),\\ \left|g_m^{(1)}\right|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4})}\le cd(-(2+\alpha)\gamma;P_1)\|g_m;\gamma,0;0;H_{3/4}\|_{2+\alpha}.\end{gathered}\tag{33}$$

Підставляючи (33) в (32) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо

$$E_k\le c\left(\|F_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}\|_\alpha+\|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\|_2+\|v_m;V_{3/4}\|+\|g_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha}\right).\tag{34}$$

Знайдемо оцінки норм виразів F і g_m. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити пів норму кожного доданка. Наприклад,

$$\begin{gathered}<a_0v_m;\gamma,\beta;2\gamma,V_{3/4}>_\alpha\le\sum_{j=1}^n\sup_{\{A_1,B_j,A_2\}\subset V_{3/4}}\left\{|v_m|\left[\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2}}d\left((2+\alpha)\gamma;\tilde{A}_1\right)\times\right.\right.\\ \times|a_0(A_2)-a_0(B_j)|+\sum_{l=1}^n d\left(2\gamma;\tilde{A}\right)d_1\left(\alpha\gamma^{(1)};\tilde{\tau}\right)d_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_l^{(2)}\right);\tilde{\xi}_l\right)\left|\xi_l^{(1)}-\xi_l^{(2)}\right|^{-\alpha}\times\\ \left.\left.\times|a_0(A_2)-a_0(B_l)|\right]\right\}+\sum_{j=1}^n\sup_{\{A_1,B_j,A_2\}\subset V_{3/4}}d\left(2\gamma;\tilde{A}_2\right)|a_0(A_2)|\left[\left|\tau^{(1)}-\tau^{(1)}\right|^{-\frac{\alpha}{2}}\times\right.\\ \times|v_m(A_2)-v_m(B_i)|d\left(\alpha\gamma;\tilde{A}_2\right)+\sum_{l=1}^n d_1\left(\alpha\gamma^{(1)};\tilde{\tau}\right)d_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_l^{(2)}\right);\tilde{\xi}_l\right)\times\\ \left.\times\left|\xi_l^{(1)}-\xi_l^{(2)}\right|^{-\alpha}|v_m(A_1)-v_m(B_l)|\right]\le c\left(\|v_m;\gamma,\beta;0,V_{3/4}\|_1+\|v_m;V_{3/4}\|_0\right).\end{gathered}$$

Аналогічно одержуються оцінки інших доданків функцій F і g_m.

Отже, для F і g_m отримаємо оцінки

$$\|F;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}\|_{\alpha} \le c\left(\|F_m;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha} + \|v_m;Q\|_0\right) + \varepsilon_1\|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha},$$

$$\|g_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha} \le c\|\varPhi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \left(\lambda+\varepsilon^{\alpha}\right)\|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}\|_{2+\alpha} + \tag{35}$$

$$+c(\varepsilon)\|v_m;V_{3/4}\|_0,$$

де $\varepsilon_1 = n^2r^2 + \varepsilon^{\alpha} + nr$.

Підставляючи (35) в (34), одержимо

$$\begin{aligned} E_k \le c\left(\|F_m;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha} + \|\varPhi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|v_m;Q\|_0\right) + \\ + \left(\lambda_0+\varepsilon_1+\varepsilon^{\alpha}\right)\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}. \end{aligned} \tag{36}$$

Якщо $\left|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right| \ge T_2$, то використовуючи інтерполяційні нерівності для $k \in \{1,3\}$, маємо

$$E_k \le \varepsilon^{\alpha}\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;Q\|_0. \tag{37}$$

Якщо $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \ge T_1$, то використовуючи інтерполяційні нерівності для $k \in \{2,4\}$, маємо

$$E_k \le \varepsilon^{\alpha}\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m;Q\|_0. \tag{38}$$

Скориставшись нерівностями (27), (36)-(38) і вибравши r та ε досить малими, одержуємо нерівність (26).

Доведення теореми 1. Враховуючи нерівності (14) і (26) маємо нерівність

$$\|u_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c_1\left(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|\psi;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\right), \tag{39}$$

права частина якої не залежить від m. Крім того, послідовності $\{W_m^{(0)}\} = \{u_m(P)\}$, $\{W_m^{(1)}\} = \{d_1(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)};t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)};x_i)\partial_{x_i}u_m(P)\}$, $\{W_m^{(2)}\} = \{d(2\gamma;P)\times \times\partial_t u_m(P)\}$, $\{W_m^{(3)}\} = \{d_1(2\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}-\beta_j^{(1)};t)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)};x_i)d_2(\gamma^{(2)}-\beta_j^{(2)};x_j)\times \times\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P)\}$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні в області $\overline{Q}$. За теоремою Арчела існують послідовності $\{W_{m_k}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в $\overline{Q}$ до $W^{(\nu)}$, $\nu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m_k \to \infty$ в задачі (7)-(9) одержуємо, що $u(t,x) = W^{(0)}$ єдиний розв'язок задачі (2)-(4), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$.

Теорема 6. *Якщо $f \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і виконані умови 1, 2, то єдиний розв'язок задачі (2)-(4) в просторі $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ визначається інтеграли Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(\mathrm{t},x)=\int\limits_{Q}E_1(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi)+\int\limits_{D}E_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi)+$$
$$+\int\limits_{\Gamma}E_3(t,x;d\tau;d_{\xi}S)\psi(\tau,\xi). \tag{40}$$

Доведення. Оскільки $C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\subset C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, то для $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$ правильна нерівність $\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha}\le c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha}$. За умов теореми 1 для розв'язку задачі (2)-(4), маємо

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\left(\|f;\gamma,\beta;0;Q\|_{\alpha}+\|\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+\|\psi;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\right). \tag{41}$$

Розглядаючи $u(t,x)$ при фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f,\varphi,\psi)$ на нормованому просторі $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (41), згідно з теоремою Рісса, оскільки $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\subset C(Q)$, можна вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $\mathrm{E}(t,x;Z)$, яка визначена на σ-алгебрі множин Z області $\overline{Q}$, включаючи Q і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (41).

Задача оптимального керування. Для встановлення існування розв'язку задачі (1)-(4) потрібно встановити розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m,p,q), на яких функціонал

$$I(p,q)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D F_1(t,x;u_m(t,x;p(t,x),q(x)),p(t,x))dx+$$
$$+\int\limits_D F_2(x;u_m(T,x;p(T,x),q(x)),q(x))dx \tag{42}$$

досягає мінімуму в класі функцій $(p,q)\in V$, із яких u_m є розв'язком задачі

$$(L_1u_m)(t,x)=f_m(t,x,p(t,x)), \tag{43}$$

$$u_m(0,x;p(0,x),q(x))+\int\limits_0^T b(\tau,x)u_m(\tau,x;p(\tau,x),q(x))d\tau=\varphi_m(x,q(x)), \tag{44}$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}[u_m(t,x;p(t,x),q(x))-\psi_m(t,x)]=0\,. \tag{45}$$

При обмеженнях 1, 2 для будь-яких $(p,q)\in V$ існує єдиний розв'язок задачі (43) і для нього правильна оцінка (39).

Позначимо

$$\mu(\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{T}d\beta\int\limits_D Z_m(\beta,x,0,\xi)\frac{\partial F_1(\beta,x,u_m,p)}{\partial u_m}e^{-\lambda(\beta-\tau)}dx+$$
$$+\int\limits_0^T d\beta\int\limits_D \Gamma_m(T,\beta,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_1(\beta,x,u_m,p)}{\partial u_m}e^{-\lambda(\beta-\tau)}dx+\int\limits_D E_m(T,\tau,x,0,\xi)\frac{\partial F_2(x;u_m,q)}{\partial u_m}dx,$$

$$\eta(\xi)=\int_0^T dt\int_D E_m(T,t,x,0,\xi)\frac{\partial F_1(t,x;u_m,p)}{\partial u_m}dx+$$
$$+\int_D E_m(T,T,x,0,\xi)\frac{\partial F_2(x;u_m,q)}{\partial u_m}dx,$$
$$H_1(\mu;u_m,p)=F_1(t,x;u_m,p)+\mu(t,x)f_m(t,x,p),$$
$$H_2(\eta;u_m,q)=F_2(x;u_m,q)+\eta(x)\varphi_m(x,q).$$

Правильні такі теореми.

Теорема 7. *Якщо* $\partial_p H_1(\mu;u_m,p)>0$ *і* $\partial_2 H_2(\eta;u_m,q)>0$, *то оптимальним є керування* (p_2,q_2), *а оптимальним розв'язком задачі (42), (43) є* $u_m^{(0)}(t,x;p,q)=u_m(t,x;p_2,q_2)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu;u_m,p)<0$ *і* $\partial_2 H_2(\eta;u_m,q)>0$, *то оптимальним є керування* (p_1,q_2), *а оптимальним розв'язком задачі (42), (43) є* $u_m(t,x;p_1,q_2)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu;u_m,p)>0$ *і* $\partial_2 H_2(\eta;u_m,q)<0$, *то оптимальним є керування* (p_2,q_1), *а оптимальним розв'язком задачі (42), (43) є* $u_m(t,x;p_2,q_1)$.

Якщо $\partial_p H_1(\mu;u_m,p)<0$ *і* $\partial_2 H_2(\eta;u_m,q)<0$, *то оптимальним є керування* (p_1,q_1), *а оптимальним розв'язком задачі (42), (43) є* $u_m(t,x;p_1,q_1)$.

Нехай умови теореми 7 не виконані. Тоді правильна така теорема.

Теорема 8. *Для того, щоб* $(p^{(0)},q^{(0)})$ *і відповідний розв'язок задачі (43)* $u_m^{(0)}(t,x;p^{(0)},q^{(0)})$ *були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

а) функція $H_1(\mu;u_m,p)$ *за аргументом* p *має в точці* $p^{(0)}$ *мінімальне значення;*

б) функція $H_2(\eta;u_m,q)$ *за аргументом* q *має в точці* $q^{(0)}$ *мінімальне значення;*

в) для довільного вектора $(e_1,e_2)\neq 0$ *і* $(t,x)\in Q$ *виконується нерівність*
$$\partial_{u_m}^2 F_1(t,x;u_m^{(0)},p^{(0)})e_1^2+2\partial_p\partial_{u_m}F_1(t,x;u_m^{(0)},p^{(0)})e_1e_2+\partial_p^2 F_1(t,x;u_m^{(0)},p^{(0)})e_2^2>0;$$

г) для довільного вектора $(v_1,v_2)\neq 0$ *і* $x\in D$ *виконується нерівність* $\partial_{u_m}^2 F_2(x;u_m^{(0)},q^{(0)})v_1^2+2\partial_p\partial_{u_m}F_2(x;u_m^{(0)},q^{(0)})v_1v_2+\partial_p^2 F_2(x;u_m^{(0)},q^{(0)})e_2^2>0$.

Доведення теорем 7, 8 проводиться за допомогою методики праці [15]. Переходячи до границі в задачі (42)-(45) при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ одержимо оптимальний розв'язок задачі (1)-(4).

Література

1. Вигак В.М. Управление температурними напряжениями и перемещениями / В.М.Вигак. – Киев: Наук, думка, 1988. – 312 с.
2. Дюва Г. Неравенства в механике и физике / Г.Дюва, Ж.-Л.Лионе. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Ильин В.А. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени Т управлення упругими граничними силами на двух концах струны / В.А. Ильин, К.И. Мойсеев // Докл. РАН. – 2007. – 417, №4. – С. 456-463.
4. Лионе Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л.Лионе. – М,: Мир, 1972. – 414 с.
5. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математичеекой физики / К.А.Лурье. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
6. Eidelman S.D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D.Eidelman, S.D.Ivasyshen, A.N.Kochubei. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. And Appl. – Vol. 152).
7. Majewski M. On the existence of optimal solutions to an optimal control problem / M.Majewski // J.Optimiz. Theory and Appl. – 2006. – 126, No 3. – P. 635-651.
8. Rösch A. Existence of regular Lagrange multipliers for a nonlinear elliptic optimal control problem with pointwise control-state constraints / A.Rösch, F.Tröltzch // SIAM J. Contr. And Optimiz. – 2006. – 45, No 2. – P. 548-564.
9. Genngsheng Wang. Shade optimization of an elliptic equation in an exterior domain / Wang Genngsheng, Wand Lijuon, Yang Donghui // SIAM J. Contr. And Optimiz. – 2006. – 45, No 2. – P. 532-547.
10. Yanlei Kou. Solutions of Ginzbung-Landau equations with weight and minimizers of the renormalized energy / Yanlei Kou, Shijin Ding // Appl. Math J. Chin. Univ. B. – 2007. – 22, No 1. – P. 48-60.
11. Lange H. Controltability of the nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state / H.Lange, H.Teismann // Math. Meth. Appl. Sei. – 2007/ – 30, No 13. – P. 1438-1515.
12. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б.И.Пташник, В.С.Ільків, І.Я.Кміть, В.М.Поліщук. – К.: Наук, думка, 2002. – 416 с.
13. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі з особливостями / М.І.Матійчук. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
14. Пукальський І.Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія / І.Д.Пукальський. – Чернівці, 2008. – 253 с.
15. Пукальський І.Д. Параболічна крайова задача і задача оптимального керування / І.Д.Пукальський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №4. – С. 1-8.

16. Вабищев Н.Н. Нелокальная параболическая задача и обратная задача теплопроводности / Н.Н.Вабищев // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т.17, №7. – С. 1193-1199.
17. Бицадзе А.В. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач / А.В.Бицадзе, А.А.Самарский // Докл. АН СССР, 1969. – 185, №4. – С. 739-740.
18. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А.Фридман. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
19. Ладыженекая О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А.Ладыженекая, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 13.10.2011 р.
Рекомендовано до друку академіком НАН України,
*професором **Перестюком М.О.***

REGIONAL TASK WITH UNLOCAL CONDITION AND TASK OF OPTIMUM MANAGEMENT FOR LINEAR PARABOLIC EQUALIZATIONS WITH DEGENERATION

I. D. Pukal'skyy, I. M. Isariuk
Chernivetsy National University by Y. Fedkovych;
58012, Chernivtsy, Kotsiubynsky st., 2; ph. +380 (372) 58-48-64;
e-mail: difeg@chnu.cv.u; kafedra_DR@mail.ru

In spaces of classic functions with sedate weight the existence and unique of decision of the first parabolic regional task is led to with an integral condition after a sentinel variable for linear differential equalization with sedate features on co-ordinate planes. Got result is drawn on for research of tasks of optimum management.

Key words: *unlocal regional task, progressive approximations, rezolventa, optimum management, linear parabolic equalization with degeneration.*