УДК 517.925.3

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДРУГИМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

С. І. Гургула[1], Р. І. Собкович[2]
[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел.+380 (342) 59-60-16; e-mail: algeo@pu.if.ua

Для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на заданих гіперповерхнях розширеного фазового простору одержано критерії стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості тривіального розв'язку, аналогічні тим, які дає другий метод Ляпунова для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *імпульсна дія, стійкість, функція Ляпунова.*

Досліджуватимемо питання стійкості тривіального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією виду

$$\frac{dx}{dt} = f(t\,,\,x), \quad t \ne t_i(x)\,,$$
$$\Delta x\big|_{t=t_i(x)} \equiv x(t+0) - x(t) = I_i(x)\,, \tag{1}$$

де $t \ge t_0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in R^n$, $I_i \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots$. Функція $f(t\,,\,x)$ вважається заданою в області

$$Z = \{t \ge t_0\,,\; x \in \bar{J}_h\}, \tag{2}$$

де $\bar{J}_h = \{x \in R^n\,,\, \|x\| \le h\,,\, h > 0\}$ і $f(t\,,\,0) = 0$, функції $I_i(x)$ визначені і неперервні в кулі $\bar{J}_h$, $I_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Відносно функцій $t_i(x)$ припускаємо, що вони неперервні, $t_{i-1}(x) < t_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, де $t_0(x) \equiv t_0 = const$ і $t_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$. Крім того вважається, що відсутнє явище так званого "биття" розв'язків системи (1) до поверхні $t = t_i(x)$.

Функція Ляпунова $V(t, x)$, про яку йтиметься нижче, вважається скалярною і неперервно диференційовною по всіх своїх аргументах; функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ вважаються неперервними, причому $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(s) > 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, функція $\rho(t)$ – заданою і неперервною при $t \ge t_0$.

Розглянемо достатні умови стійкості і асимптотичної стійкості. Ці умови даються наступними двома теоремами.

Теорема 1. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$, функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \ge 0$ такі, що всюди в області (2) виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad\, V,\ f \rangle \le \rho(t)\varphi(V), \tag{3}$$

$$V(t_i(x),\ x + I_i(x)) \le \psi(V(t_i(x),\ x)), \quad i = 1, 2, \ldots , \tag{4}$$

а також існують константи $\theta_2 > 0$ і $\rho_0 > 0$ такі, що для всіх $i = 1, 2, \ldots$

$$\max_{\|x\| \le h} t_i(x) - \min_{\|x\| \le h} t_{i-1}(x) \le \theta_2 \tag{5}$$

і для всіх $t \ge t_0$

$$\int_t^{t+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \le \rho_0 . \tag{6}$$

Тоді, якщо при деякому $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0,\ a_0]$

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \rho_0 , \tag{7}$$

то розв'язок $x \equiv 0$ системи стійкий за Ляпуновим, а якщо можна вказати $\gamma > 0$ таке, що

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \rho_0 + \gamma , \tag{8}$$

то цей розв'язок асимптотично стійкий.

Доведення. Нехай $0 < \varepsilon < h$ і $l = \inf\limits_{t \ge t_0,\ \|x\| \ge \varepsilon} V(t, x)$, причому можна вважати, що $l \le a_0$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб виконувалась нерівність

$$\int_m^l \frac{ds}{\varphi(s)} > \rho_0 , \tag{9}$$

де $m = \sup\limits_{\|x\| < \delta} V(t_0, x) < l$. В силу (7) це завжди можна зробити; досить взяти δ таким, щоб виконувалась нерівність $m < \psi(l)$. Нехай $x(t)$ – довільний нетривіальний розв'язок системи (1), де $x(t_0) = x_0 \in J_\delta$. Доведемо, що цей розв'язок не вийде за межі кулі J_ε. Для цього досить довести, що $V(t, x(t)) < l$ для всіх $t \ge t_0$. Згідно з (3) для функції $v(t) = V(t, x(t))$ на проміжках неперервності виконана нерівність $v'(t) \le \rho(t)\varphi(v(t))$, $x(t) \in \bar{J}_h$. Припустимо, що цей розв'язок, не досягнувши поверхні $t = t_1(x)$, попаде на сферу радіуса ε в деякий момент часу

t^*. Інтегруючи нерівність $\dfrac{v'(t)}{\varphi(v(t))} \le \rho(t)$ в межах від t_0 до t^* після заміни в лівій частині $s = v(\tau)$ і з урахуванням (5) і (6) одержуємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t^*)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \int_{t_0}^{t^*} \rho(\tau)d\tau \le \int_{t}^{t_0+\theta_2} \rho(\tau)d\tau \le \rho_0 . \tag{10}$$

Але, з іншого боку, враховуючи, що $v(t^*) \ge l$ і $v(t_0) \le m$ із (9), маємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t^*)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \int_{m}^{l} \frac{ds}{\varphi(s)} > \rho_0 .$$

Це суперечність, отже $x(t)$ попадає на поверхню $t = t_1(x)$ в деякій точці $(t_1(x_1), x_1)$ і $x_1 \in J_\varepsilon$, причому, як випливає із (10) при $t^* = t_1(x_1)$,

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_1(x_1))} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0 .$$

Із нерівностей (4) і (7) одержуємо

$$\int_{v(t_1(x_1)+0)}^{v(t_1(x_1))} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \int_{\psi(v(t_1(x_1)))}^{v(t_1(x_1))} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \rho_0 .$$

Із двох останніх нерівностей легко одержати

$$\int_{v(t_1(x_1)+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge 0 ,$$

що означає, що $v(t_1(x_1)+0) \le v(t_0)$. Для завершення доведення твердження про стійкість досить застосувати метод математичної індукції по числу поверхонь, пройдених розв’язком.

Нехай тепер виконана нерівність (8). Оскільки має місце стійкість тривіального розв’язку системи, то розглядуваний розв’язок $x(t) \in J_\varepsilon$, $t \ge t_0$. Цей розв’язок буде асимптотично стійким, якщо $\lim\limits_{t\to\infty} V(t,\, x(t)) = 0$. Нехай $x(t)$ попадає на поверхні $t = t_i(x)$ в точках $(t_i(x_i), x_i)$ і нехай $t_i(x_i) < t \le t_{i+1}(x_{i+1})$. Як і при виведенні нерівності (10), легко одержати для довільного i

$$\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0 .$$

Із нерівностей (4) і (7) випливає, що

$$\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \int_{\psi(v(t_i(x_i)))}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \rho_0 + \gamma .$$

Почленно віднявши ці нерівності, одержуємо

$$\int_{v(t)}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \gamma . \tag{11}$$

Звідси випливає, що $v(t) < v(t_i(x_i))$, а поклавши $t = t_{i+1}(x_{i+1})$, маємо $v(t_{i+1}(x_{i+1})) < v(t_i(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Сукупність цих двох умов приводить до нерівності $v(t) < v(t_i(x_i))$ при $t > t_i(x_i)$. Для завершення доведення досить показати, що $\lim\limits_{i\to\infty} v(t_i(x_i)) = 0$. Припустивши, що це не так, в силу додатності і монотонності послідовності $\{v(t_i(x_i))\}$, ми повинні зробити висновок, що $\lim\limits_{i\to\infty} v(t_i(x_i)) = \alpha > 0$. Позначимо $\min\limits_{\alpha\le s\le l} \varphi(s) = c > 0$. Тоді із (11) при $t = t_{i+1}(x_{i+1})$ одержуємо

$$\gamma \le \int\limits_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{v(t_i(x_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \frac{1}{c} \int\limits_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{v(t_i(x_i))} ds = \frac{1}{c}\left(v(t_i(x_i)) - v(t_{i+1}(x_{i+1}))\right),$$

або $v(t_i(x_i)) - v(t_{i+1}(x_{i+1})) \ge \gamma c = const$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, що суперечить тому, що послідовність $\{v(t_i(x_i))\}$ збіжна. Теорему доведено.

Аналогічно може бути доведена друга теорема.

Теорема 2. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$, функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \le 0$ такі, що всюди в області (2) виконані нерівності (3) і (4), а також існують константи $\theta_1 > 0$ і $\rho_0 > 0$ такі, що для всіх $i = 1, 2, \ldots$

$$\min_{\|x\|\le h} t_i(x) - \max_{\|x\|\le h} t_{i-1}(x) \ge \theta_1 \tag{12}$$

і для всіх $t \ge t_0$

$$\int\limits_t^{t+\theta_1} \rho(\tau) d\tau \le -\rho_0 .$$

Тоді, якщо при деякому $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$

$$\int\limits_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0 ,$$

то тривіальний розв’язок системи (1) буде стійким, а якщо існує $\gamma > 0$, таке , що

$$\int\limits_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0 - \gamma ,$$

то цей розв’язок буде асимптотично стійким.

Переходимо до теорем про нестійкість. Достатні умови нестійкості тривіального розв’язку системи (1) передбачають існування функції Ляпунова $V(t, x)$, яка володіє властивостями:

а) область додатності $V(t, x)$ $D = \{(t, x) \in Z,\ V(t, x) > 0\}$ при всякому $t \ge t_0$ має непорожній відкритий переріз гіперплощиною $t = const$, який дотикається до початку координат;

б) в області D $V(t, x)$ обмежена; позначимо $a_0 = \sup\limits_{(t, x) \in D} V(t, x)$.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 3. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t, x)$, наділена властивостями а) і б), функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \le 0$ такі, що в області D виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad\, V, f \rangle \ge \rho(t)\varphi(V), \tag{13}$$

$$V(t_i(x), x + I_i(x)) \ge \psi(V(t_i(x), x)), \quad i = 1, 2, ..., \tag{14}$$

функції $t = t_i(x)$ задовольняють умову (5), а функція $\rho(t)$ така, що для всіх $t \ge t_0$

$$\int_t^{t+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \ge -\rho_0, \quad \rho_0 > 0. \tag{15}$$

Тоді, якщо при деякому $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$ виконана нерівність

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge \rho_0 + \gamma, \tag{16}$$

то розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) нестійкий.

Доведення. Нехай $\delta > 0$ як завгодно мале. За умовою знайдеться $x_0 \in J_\delta$ таке, що $V(t_0, x_0) > 0$. Покажемо, що розв'язок $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, з часом вийде за межі кулі $\overline{J}_h$. Припустимо супротивне: $x(t) \in \overline{J}_h$ при $t \ge t_0$. Тоді $(t, x(t)) \in D$. Справді, нехай, як і вище, $v(t) = V(t, x(t))$, $x(t)$ попадає на поверхні $t = t_i(x)$ в точках $(t_i(x_i), x_i)$ і $t^* \in (t_i(x_i), t_{i+1}(x_{i+1})]$ – момент часу, коли вперше виконається рівність $v(t) = 0$. В силу (13) на проміжках неперервності $v'(t) \ge \rho(t)\varphi(v(t))$, тоді, з урахуванням (5) і (15), маємо

$$\int_{t_i(x_i)}^{t^*} \frac{v'(\tau)}{\varphi(v(\tau))} d\tau \ge \int_{t_i(x_i)}^{t^*} \rho(\tau) d\tau \ge \int_{t_i(x_i)}^{t_i(x_i)+\theta_2} \rho(\tau) d\tau \ge -\rho_0,$$

або, після заміни $s = v(\tau)$,

$$\int_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t^*)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge -\rho_0. \tag{17}$$

Оскільки $v(t^*) = 0$, то ми приходимо до нерівності $\int_0^{v(t_i(x_i)+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \rho_0$, що неможливо, бо, як легко одержати із (16), невласний інтеграл

$\int\limits_{0}^{v(t_i(x_i)+0)} \frac{ds}{\varphi(s)}$ є розбіжним. Отже $(t,\, x(t)) \in D$, що означає, що $v(t)$ – обмежена функція. Із (17) при $t^* = t_{i+1}(x_{i+1})$ одержуємо

$$\int\limits_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t_{i+1}(x_{i+1}))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq -\rho_0 .$$

В силу (14) і (16) маємо

$$\int\limits_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{v(t_{i+1}(x_{i+1})+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int\limits_{v(t_{i+1}(x_{i+1}))}^{\psi(v(t_{i+1}(x_{i+1})))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \rho_0 + \gamma .$$

Із двох останніх нерівностей випливає, що $\int\limits_{v(t_i(x_i)+0)}^{v(t_{i+1}(x_{i+1})+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \gamma$. Додаючи почленно такі нерівності, для будь-якого натурального n, отримуємо

$$\int\limits_{v(t_0)}^{v(t_n(x_n)+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq n\gamma ,$$

звідки випливає, що $v(t_n(x_n)+0) \to \infty$ при $n \to \infty$, а це суперечить тому, що $v(t)$ – обмежена функція. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 4. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t,\, x)$, наділена властивостями а) і б), функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \geq 0$ такі, що в області D виконані нерівності (13) і (14), функції $t = t_i(x)$ задовольняють умову (12), а функція $\rho(t)$ така, що для всіх $t \geq t_0$

$$\int\limits_{t}^{t+\theta_1} \rho(\tau) d\tau \geq \rho_0 , \quad \rho_0 > 0 .$$

Тоді, якщо існує $\gamma > 0$ таке, що для всіх $a \in (0,\, a_0]$ має місце нерівність

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0 - \gamma ,$$

то нульовий розв’язок системи (1) нестійкий.

Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Гургула С.І. Про стійкість розв’язків імпульсних систем / С.І.Гургула, М.О.Перестюк // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип.23. – С. 33-40.

3. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова в системах з імпульсною дією / С.І.Гургула, І.Й.Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2008. – №1(1). – С. 9-15.
4. Гургула С.І. Про стійкість в системах з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2009. – №1(5). – С. 24-29.
5. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова для диференціальних рівнянь з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович, І.Й.Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2010. – №1(9). – С. 14-20.

Стаття надійшла до редакційної колегії 5.09.2012 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором, академіком НАН України ***Перестюком М.О.*** *(м. Київ), д.ф.-м.н., доцентом* ***Королем І.І.*** *(м. Ужгород)*

INVESTIQATION OF THE STABILITY OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE ACTION BU THE SECOND LIAPUNOV'S METHOD

S. I. Gurgula[1], R. I. Sobkovych[2]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]PreCarpathian National University by Vasil Stefanic;
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;
ph. +380 (342) 59-60-16; e-mail: algeo@pu.if.ua

Criteries of stability, asymptotic stability and non-stability of simple solution in an analogy to those according to secondary Liapunov's method for systems of ordinary differential equations, were issued for a system of differential equations with impulsive action on the given hyperplanes of extended phase spase.

Key words: *impulsive action, stability, function of Liapunov.*