УДК 512.53

МОНОТОННІ СІМ'Ї НА ЦИКЛІЧНИХ НАПІВГРУПАХ

В. М. Гаврилків
*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: vgavrylkiv@gmail.com*

У статті вивчаються праві і ліві нулі, одноточкові ліві ідеали, мінімальний ідеал, центральні елементи, скоротні зліва і скоротні справа елементи напівгрупи $\upsilon(S)$ монотонних сімей на циклічній напівгрупі S, а також характеризуються циклічні напівгрупи, розширення $\upsilon(S)$ яких є комутативним.

Ключові слова: *циклічна напівгрупа, монотонна сім'я, компактифікація Стоуна-Чеха.*

Вступ

Дана стаття присвячена вивченню структури напівгруп монотонних сімей на циклічних напівгрупах.

Сім'я M непорожніх підмножин множини X називається *монотонною*, якщо з $B \supset A \in \mathsf{M}$ випливає, що $B \in \mathsf{M}$. Замкнена відносно скінченних перетинів монотонна сім'я F називається *фільтром*. Фільтр $\mathsf{F}_X = \{F \subset X : X \setminus F - \text{скінченна}\}$ називається *фільтром Фреше* на множині X. Фільтр U називається *ультрафільтром*, якщо $\mathsf{U} = \mathsf{F}$ для будь-якого фільтра F, який містить U. Множина всіх монотонних сімей на множині X позначається через $\upsilon(X)$, а сім'я $\beta(X)$ всіх ультрафільтрів на множині X називається *компактифікацією Стоуна-Чеха* множини X, див. [11], [12].

Кожне відображення $f : X \to Y$ продовжується до відображення

$$\upsilon f : \upsilon(X) \to \upsilon(Y), \quad \upsilon f : \mathsf{M} \mapsto \langle f(M) \subset Y : M \in \mathsf{M} \rangle, \qquad \text{див.[9]}$$

Тут для сім'ї B непорожніх підмножин множини Y через $\langle B \subset Y : B \in \mathsf{B} \rangle$ позначено сім'ю

$$\langle B \subset Y : B \in \mathsf{B} \rangle = \{A \subset Y : \exists B \in \mathsf{B}\ (B \subset A)\}.$$

Ультрафільтр $\{x\}$ називається *головним ультрафільтром, породженим множиною* $\{x\}$, $x \in X$. Можна вважати, що $X \subset \beta(X) \subset \upsilon(X)$, якщо ототожнити кожну точку $x \in X$ з головним ультрафільтром $\langle \{x\} \rangle$, породженим множиною $\{x\}$.

В [9] доведено, що кожна асоціативна бінарна операція $* : S \times S \to S$ продовжується до асоціативної бінарної операції $\circ : \upsilon(S) \times \upsilon(S) \to \upsilon(S)$ за формулою

$$\mathsf{L} \circ \mathsf{M} = \langle \bigcup_{a \in L} a * M_a : L \in \mathsf{L},\ \{M_a\}_{a \in L} \subset \mathsf{M} \rangle$$

для монотонних сімей $\mathsf{L},\mathsf{M} \in \upsilon(S)$. В цьому випадку компактифікація Стоуна-Чеха $\beta(S)$ є піднапівгрупою напівгрупи монотонних сімей $\upsilon(S)$.

Непорожня підмножина I напівгрупи $(S,*)$ називається *ідеалом* (відповідно *правим ідеалом*, *лівим ідеалом*), якщо $I * S \cup S * I \subset I$ (відповідно $I * S \subset I$, $S * I \subset I$). Елемент z напівгрупи $(S,*)$ називається *нулем* (відповідно *лівим нулем*, *правим нулем*) в S, якщо $a * z = z * a = z$ (відповідно $z * a = z$, $a * z = z$) для кожного $a \in S$. Це рівносильно тому, що $\{z\}$ є ідеалом (відповідно правим ідеалом, лівим ідеалом) в S. Ідеал $I \subset S$ називається *мінімальним*, якщо кожен ідеал напівгрупи S, що міститься в I, співпадає з I. Аналогічно визначаються мінімальні ліві та мінімальні праві ідеали напівгрупи S. Об'єднання $K(S)$ всіх мінімальних лівих (правих) ідеалів в S співпадає з мінімальним ідеалом напівгрупи S, (див.[11,теор.2.8]). Напівгрупа $(S,*)$ називається *напівгрупою правих нулів*, якщо $a * b = b$ для всіх $a,b \in S$.

Відображення $\varphi : S \to T$ між двома напівгрупами $(S,*)$ та $(T,\circ)$ називається *гомоморфізмом*, якщо $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ для всіх $a,b \in S$. Гомоморфізм $\varphi : S \to I$ з напівгрупи S в ідеал $I \subset S$ називається *ретракцією*, якщо $\varphi(a) = a$ для будь-якого елемента $a \in I$. Елемент a напівгрупи S називається *скоротним зліва (справа)*, якщо для довільних елементів $x, y \in S$ з рівності $ax = ay$ (відповідно $xa = ya$) випливає, що $x = y$. Це рівносильно тому, що лівий (відповідно правий) зсув $l_a : S \to S$, $l_a : x \mapsto a * x$, (відповідно $r_a : S \to S$, $r_a : x \mapsto x * a$) є ін'єктивним відображенням. Напівгрупа, всі елементи якої є скоротними зліва (справа), називається *напівгрупою з лівими (правими) скороченнями*.

Напівгрупа $\langle a \rangle = \{a^n\}_{n \in \mathsf{N}}$, породжена елементом a, називається *циклічною*. Якщо циклічна напівгрупа є нескінченною, то вона ізоморфна до адитивної напівгрупи N. Скінченна циклічна напівгрупа $S = \langle a \rangle$ також має нескладну структуру [7]. Існують натуральні числа r і m, які називаються *індексом* і *періодом* напівгрупи S, такі що:

- $S = \{a, a^2, \dots, a^{m+r-1}\}$ і $m + r - 1 = |S|$;
- для кожних $i, j \in \omega$ рівність $a^{r+i} = a^{r+j}$ виконується тоді і лише тоді, коли $i \equiv j (\bmod m)$;
- $C_m = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$ є мінімальним ідеалом, циклічною і максимальною підгрупою напівгрупи S з одиницею $e = a^n \in C_m$, де n ділиться на m.

Надалі скінченну циклічну напівгрупу індекса r і періода m позначатимемо через $C_{r,m}$, а її максимальну підгрупу − через C_m.

1 Гомоморфізми, праві, ліві нулі та мінімальні (ліві) ідеали

Твердження 1.1. Для кожного гомоморфізму $\varphi : S \to T$ між напівгрупами $(S,*_1)$ та $(T,*_2)$ індуковане відображення $\upsilon\varphi : \upsilon(S) \to \upsilon(T)$ є гомоморфізмом напівгруп $(\upsilon(S),\circ_1)$ та $(\upsilon(T),\circ_2)$.

Доведення. Зафіксувавши дві монотонні сім'ї $\mathsf{L},\mathsf{M} \in \upsilon(S)$, одержимо

$$\begin{aligned}
\upsilon\varphi(\mathsf{L}\circ_1\mathsf{M}) = {} & \upsilon\varphi(\langle \bigcup_{x\in L} x *_1 M_x : L\in\mathsf{L}, \{M_x\}_{x\in L}\subset\mathsf{M}\rangle) = \\
& = \langle \varphi(\bigcup_{x\in L} x *_1 M_x) : L\in\mathsf{L}, \{M_x\}_{x\in L}\subset\mathsf{M}\rangle = \\
& = \langle \bigcup_{x\in L} \varphi(x) *_2 \varphi(M_x) : L\in\mathsf{L}, \{M_x\}_{x\in L}\subset\mathsf{M}\rangle = \\
& = \langle \bigcup_{x\in\varphi(L)} x *_2 \varphi(M_x) : L\in\mathsf{L}, \{\varphi(M_x)\}_{x\in\varphi(L)}\subset\upsilon\varphi(\mathsf{M})\rangle = \\
& = \langle \varphi(L) : L\in\mathsf{L}\rangle \circ_2 \langle \varphi(M) : M\in\mathsf{M}\rangle = \upsilon\varphi(\mathsf{L})\circ_2\upsilon\varphi(\mathsf{M}).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що для піднапівгрупи T напівгрупи S відображення $i:\upsilon(T)\to\upsilon(S)$, $i:\mathsf{A}\to\langle\mathsf{A}\rangle_S$ є ін'єктивним гомоморфізмом, а тому надалі ми ототожнюємо напівгрупу $\upsilon(T)$ з піднапівгрупою $i(\upsilon(T))\subset\upsilon(S)$.

Лема 1.1. Нехай I − ідеал напівгрупи S. Якщо відображення $\varphi : S\to I$ є ретракцією, то відображення $\upsilon\varphi:\upsilon(S)\to\upsilon(I)$ також є ретракцією.

Доведення. Дійсно, нехай $\mathsf{A}\in\upsilon(I)$, $\mathsf{M}\in\upsilon(S)$, тоді

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}\circ\mathsf{M} &= \langle \textstyle\bigcup_{a\in A} a * M_a : A\in\mathsf{A}, A\subset I,\ \{M_a\}_{a\in A}\subset\mathsf{M}\rangle = \\
&= \langle \textstyle\bigcup_{a\in A} a * M_a : A\in\mathsf{A},\ \{M_a\}_{a\in A}\subset\mathsf{M}, \textstyle\bigcup_{a\in A} a * M_a \subset I\rangle \in \upsilon(I).
\end{aligned}$$

Аналогічно $\mathsf{M}\circ\mathsf{A}\in\upsilon(I)$, а тому $\upsilon(I)$ є ідеалом напівгрупи $\upsilon(S)$.

Якщо $\mathsf{A}\in\upsilon(I)$, то

$$\upsilon\varphi(\mathsf{A}) = \langle\varphi(A) : A\subset I, A\in\mathsf{A}\rangle = \langle A\subset I : A\in\mathsf{A}\rangle = \{A\subset I : A\in\mathsf{A}\} = \mathsf{A},$$

а отже, $\upsilon\varphi$ − ретракція.

Лема 1.2. Нехай I − ідеал напівгрупи S і відображення $\varphi : S\to I$ є ретракцією. Напівгрупа S має правий (лівий) нуль тоді і лише тоді, коли напівгрупа I має правий (лівий) нуль, причому всі праві і ліві нулі напівгрупи S містяться в I.

Доведення. Нехай z − правий (лівий) нуль напівгрупи S, тоді $sz = z$ ($zs = z$) для будь-якого $s\in S$. Оскільки φ − гомоморфізм, то $\varphi(s)\varphi(z) = \varphi(z)$ ($\varphi(z)\varphi(s) = \varphi(z)$). Зокрема, для будь-якого $s\in I$ виконується рівність $\varphi(s) = s$, а тому $s\varphi(z) = \varphi(s)\varphi(z) = \varphi(z)$ ($\varphi(z)s = \varphi(z)\varphi(s) = \varphi(z)$). Таким чином, $\varphi(z)$ − правий (лівий) нуль напівгрупи I.

Навпаки, нехай $z \in I$ − правий (лівий) нуль напівгрупи I. Оскільки I − ідеал, то для будь-якого $s \in S$ маємо $sz, zs \in I$, а отже, $sz = \varphi(sz) = \varphi(s)\varphi(z) = \varphi(s)z = z$ ($zs = \varphi(zs) = \varphi(z)\varphi(s) = z\varphi(s) = z$) і z − правий (лівий) нуль напівгрупи S.

Якщо z − правий (лівий) нуль напівгрупи S, то $z = sz \in I$ ($z = zs \in I$), де $s \in I$. Таким чином, всі праві (ліві) нулі напівгрупи S містяться в I.

Нехай e − одиниця максимальної підгрупи C_m циклічної напівгрупи $C_{r,m}$.

Лема 1.3. Відображення $\varphi : C_{r,m} \to C_m$, $\varphi(x) = ex$ є ретракцією, причому $\varphi(x)y = xy$ для будь-яких $x \in C_{r,m}$ і $y \in C_m$.

Доведення. Оскільки підгрупа C_m є ідеалом напівгрупи $C_{r,m}$, то $\varphi(x) = ex \in C_m$. Тоді $\varphi(xy) = exy = eexy = exey = \varphi(x)\varphi(y)$ для будь-яких $x, y \in C_{r,m}$ і $\varphi(x) = ex = x$ при $x \in C_m$. А отже, відображення $\varphi : C_{r,m} \to C_m$ є ретракцією. Далі для будь-яких $x \in C_{r,m}$ і $y \in C_m$ маємо, що $xy \in C_m$, а тому $\varphi(xy) = xy$. З іншого, боку $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x)y$, бо $y \in C_m$.

З лем 1.1.-1.3. випливає наступне:

Твердження 1.2. Напівгрупа $\upsilon(C_{r,m})$ містить правий (лівий) нуль тоді і лише тоді, коли її піднапівгрупа $\upsilon(C_m)$ містить правий (лівий) нуль. Причому кожен правий (лівий) нуль $\upsilon(C_{r,m})$ належить $\upsilon(C_m)$.

Нехай S − напівгрупа. В [9] доведено, що монотонна сім'я $\mathsf{M} \in \upsilon(S)$ є правим нулем в S тоді і лише тоді, коли M є інваріантною в тому сенсі, що $sM, s^{-1}M \in \mathsf{M}$ для будь-якого $s \in S$ і для будь-якого $M \in \mathsf{M}$, де $s^{-1}M = \{a \in S : sa \in M\}$.

Оскільки фільтр Фреше на нескінченній циклічній напівгрупі N є інваріантним, то напівгрупа $\upsilon(\mathsf{N})$ містить правий нуль. Більше того, аналогічними міркуваннями як в теоремі 2.2 з [1] можна показати, що напівгрупа $\upsilon(\mathsf{N})$ містить $2^{\mathfrak{c}}$ правих нулів.

Оскільки для кожної групи G монотонна сім'я $\{G\}$ є інваріантною, а отже, правим нулем напівгрупи $\upsilon(G)$, то з попереднього твердження випливає наступне:

Твердження 1.3. Для кожної циклічної напівгрупи S напівгрупа $\upsilon(S)$ містить правий нуль.

Твердження 1.4. Для скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ напівгрупа $\upsilon(C_{r,m})$ містить (лівий) нуль тоді і тільки тоді, коли період $m = 1$.

Доведення. Якщо період $m=1$, то напівгрупа $\upsilon(C_1)$ містить єдиний елемент, який, очевидно, є її нулем. Тоді згідно з твердженням 1.2 напівгрупа $\upsilon(C_{r,1})$ також містить (лівий) нуль. У випадку $m>1$ напівгрупа $\upsilon(C_m)$ містить принаймні два правих нулі $\mathsf{Z}_1=\{C_m\}$ і $\mathsf{Z}_2=\langle\{g\}:g\in C_m\rangle$. Таким чином, $\upsilon(C_m)$ не містить жодного лівого нуля, і з твердження 1.2 випливає, що напівгрупа $\upsilon(C_{r,m})$ не містить (лівих) нулів.

Далі ми охарактеризуємо циклічні напівгрупи S, для яких напівгрупа $\upsilon(S)$ містять одноточкові мінімальні ліві ідеали.

Монотонна сім'я $\mathsf{Z}\in\upsilon(S)$ є правим нулем напівгрупи $\upsilon(S)$ тоді і тільки тоді, коли одноточкова множина $\{\mathsf{Z}\}$ є мінімальним лівим ідеалом у $\upsilon(S)$. Оскільки всі мінімальні ліві ідеали ізоморфні між собою і об'єднання $K(\upsilon(S))$ всіх мінімальних лівих ідеалів в $\upsilon(S)$ співпадає з мінімальним ідеалом напівгрупи $\upsilon(S)$ (див.[11,теор.2.8]), то з тверджень 1.3 і 1.4 випливає наступна

Теорема 1. Для циклічної напівгрупи S всі мінімальні ліві ідеали напівгрупи $\upsilon(S)$ є одноточковими множинами. В цьому випадку мінімальний ідеал $K(\upsilon(S))$ напівгрупи $\upsilon(S)$ є її піднапівгрупою правих нулів. Циклічна напівгрупа містить одноточкові мінімальні праві ідеали тоді і лише тоді, коли вона є скінченною циклічною напівгрупою періода 1.

2 Комутативність та центральні елементи

Теорема 2. Для циклічної напівгрупи S напівгрупа $\upsilon(S)$ є комутативною тоді і лише тоді, коли S є скінченною циклічною напівгрупою періода $m=1$ і індекса $r\in\{1,2,3\}$.

Доведення. Якщо період m скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ більший одиниці, то з доведення твердження 1.4 відомо, що напівгрупа $\upsilon(C_{r,m})$ містить принаймні два правих нулі, а тому не може бути комутативною.

Нехай індекс циклічної напівгрупи S, породженої елементом a, більший за 3 або вона є нескінченною циклічною напівгрупою. Розглянемо монотонні сім'ї $\mathsf{A}=\langle\{a\},\{a^2\}\rangle$ та $\mathsf{B}=\langle\{a,a^2\}\rangle$. Оскільки $\mathsf{A}\circ\mathsf{B}=\langle\{a^2,a^3\},\{a^3,a^4\}\rangle$, а $\mathsf{B}\circ\mathsf{A}=\langle\{a^3\}\rangle$, то дані сім'ї не комутують, і напівгрупа $\upsilon(S)$ не є комутативною.

Напівгрупа $\upsilon(C_{1,1})$ є одноточковою. Для циклічної напівгрупи $C_{2,1}=\{a,a^2\mid a^3=a^2\}$ добуток будь-яких монотонних сімей напівгрупи

$\upsilon(C_{2,1})$ дорівнює головному ультрафільтру $\langle\{a^2\}\rangle$. Таким чином, напівгрупи $G(C_{1,1})$ і $G(C_{2,1})$ комутативні.

Розглянемо циклічну напівгрупу $C_{3,1}=\{a,a^2,a^3 \mid a^4=a^3\}$. З формули множення

$$\mathsf{A}\circ\mathsf{B}=\langle\bigcup_{a\in A} a*B_a : A\in\mathsf{A},\ \{B_a\}_{a\in A}\subset\mathsf{B}\rangle$$

випливає, що головні ультрафільтри комутують з усіма монотонними сім'ями. Якщо A і B не є головними ультрафільтрами, але всі їх елементи містять елемент a, то $\mathsf{A}\circ\mathsf{B}=\mathsf{B}\circ\mathsf{A}=\langle\{a^2,a^3\}\rangle$. У випадку, коли A або B містить елемент $M\subset C_{3,1}\setminus\{a\}$, добуток $MA=AM=\{a^3\}$ для будь-якого $A\in\mathsf{A},\mathsf{B}$. І якщо при цьому $\{a\}\in\mathsf{A}$ і $\{a\}\in\mathsf{B}$, то $\mathsf{A}\circ\mathsf{B}=\mathsf{B}\circ\mathsf{A}=\langle\{a^2\},\{a^3\}\rangle$, в іншому випадку $\mathsf{A}\circ\mathsf{B}=\mathsf{B}\circ\mathsf{A}=\langle\{a^3\}\rangle$. Таким чином, всі елементи $\upsilon(C_{3,1})$ комутують.

Оскільки циклічна напівгрупа S є комутативною, то з формули множення

$$\mathsf{A}\circ\mathsf{B}=\langle\bigcup_{a\in A} a*B_a : A\in\mathsf{A},\ \{B_a\}_{a\in A}\subset\mathsf{B}\rangle$$

випливає, що всі головні ультрафільтри є центральними в напівгрупі $\upsilon(S)$. В статті [9] доведено, що для групи G монотонна сім'я є центральною в $\upsilon(G)$, тоді і тільки тоді, коли вона є головним ультрафільтром. Ми покажемо, що для скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ напівгрупа $\upsilon(C_{r,m})$ містить центральні елементи, які не є головними ультрафільтрами.

Лема 2.1. Нехай $\varphi: S\to I$ − ретракція напівгрупи S на ідеал I. Якщо a є центральним елементом у напівгрупі S, то $\varphi(a)$ є центральним елементом у напівгрупі I

Доведення. Дійсно, для будь-якого $x\in I$ маємо

$$\varphi(a)x=\varphi(a)\varphi(x)=\varphi(ax)=\varphi(xa)=\varphi(x)\varphi(a)=x\varphi(a).$$

Теорема 3. Для кожної скінченної циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ центр напівгрупи $\upsilon(C_{r,m})$ містить монотонні сім'ї, які не є головними ультрафільтрами. Центр напівгрупи $\upsilon(C_{2,m})$ містить $m+2$ елементи.

Доведення. Оскільки за лемами 1.3 і 1.1 відображення $\varphi: C_{r,m}\to C_m$, $\varphi(x)=ex$ і $\upsilon\varphi:\upsilon(S)\to\upsilon(I)$ є ретракціями, а центральними елементами напівгрупи $\upsilon(C_m)$ є тільки головні ультрафільтри, то з леми 2.1 випливає, що якщо монотонна сім'я $\mathsf{M}\in\upsilon(C_{r,m})$ є центральною, то $\mathsf{M}\subset\langle(\upsilon\varphi)^{-1}(\langle\{x\}\rangle)\rangle, x\in C_m$. Нехай a − твірний елемент напівгрупи $C_{r,m}$. Розглянемо елементи a^{r-1} та

$\varphi(a^{r-1}) = ea^{r-1}$. Ми стверджуємо, що монотонні сім'ї $\mathsf{A} = \langle\{a^{r-1}, ea^{r-1}\}\rangle$ і $\mathsf{B} = \langle\{a^{r-1}\},\{ea^{r-1}\}\rangle$ є центральними в напівгрупі $\upsilon(C_{r,m})$.

Оскільки $a^{r-1}x \in C_m = \{a^r, \ldots a^{r+m-1}\}$ для будь-якого $x \in C_{r,m}$, то $a^{r-1}x = \varphi(a^{r-1}x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$. З іншого боку, оскільки C_m − ідеал $C_{r,m}$, то $\varphi(a^{r-1})x \in C_m$ і $\varphi(a^{r-1})x = \varphi(\varphi(a^{r-1})x) = \varphi(\varphi(a^{r-1}))\varphi(x) = \varphi(a^{r-1})\varphi(x)$. Таким чином, $\varphi(a^{r-1})x = a^{r-1}x$ для будь-якого $x \in$ $C_{r,m}$. Тоді

$\mathsf{A} \circ \mathsf{M} = \langle\{\varphi(a)\}\rangle \circ \mathsf{M} = \mathsf{M} \circ \langle\{\varphi(a)\}\rangle = \mathsf{M} \circ \mathsf{A}$ і
$\mathsf{B} \circ \mathsf{M} = \langle\{\varphi(a)\}\rangle \circ \mathsf{M} = \mathsf{M} \circ \langle\{\varphi(a)\}\rangle = \mathsf{M} \circ \mathsf{B}$ для будь-якого $\mathsf{M} \in \upsilon(C_{r,m})$, а тому A і B є центральними елементами напівгрупи $\upsilon(C_{r,m})$.

Розглянемо циклічну напівгрупу $C_{2,m} = \{a, a^2, \ldots, a^{m+1} \mid a^{m+2} = a^2\}$. Одиницею максимальної підгрупи C_m є елемент $e = a^m$. Оскільки $\varphi(a) = ea = a^m a = a^{m+1}$, то єдиний елементом групи C_m з неодноточковим прообразом при ретракції $\varphi : C_{2,m} \to C_m$ є a^{m+1}. Таким чином, центральними елементами в напівгрупі $\upsilon(C_{2,m})$, які не є головними ультрафільтрами, є лише монотонні сім'ї $\langle\{a\},\{a^{m+1}\}\rangle$ та $\langle\{a, a^{m+1}\}\rangle$, які ми розглянули вище.

3 Скоротні справа (зліва) елементи

В цьому підрозділі ми опишемо скоротні зліва (справа) елементи розширення $\upsilon(S)$ циклічної напівгрупи S.

Твердження 3.1. Напівгрупа $\upsilon(C_{r,m})$ містить скоротні (зліва, справа) елементи тоді і лише тоді, коли індекс r циклічної напівгрупи $C_{r,m}$ дорівнює 1.

Доведення. Нехай індекс $r > 1$ і a − твірний елемент напівгрупи $C_{r,m}$. В доведенні теореми 3 ми показали, що $\varphi(a^{r-1})x = a^{r-1}x$ для будь-якого $x \in C_{r,m}$.

Нехай M − довільна монотонна сім'я на напівгрупі $C_{r,m}$, тоді

$$\langle\{a^{r-1}\}\rangle \circ \mathsf{M} = \langle \bigcup_{a \in \{a^{r-1}\}} a * M_a : \{M_a\}_{a \in L} \subset \mathsf{M}\rangle = \langle a^{r-1}M : M \in \mathsf{M}\rangle =$$
$$= \langle \varphi(a^{r-1})M : M \in \mathsf{M}\rangle = \{\varphi(a^{r-1})\}\rangle \circ \mathsf{M} \quad \text{і}$$
$$\mathsf{M} \circ \langle\{a^{r-1}\}\rangle = \langle \bigcup_{a \in M} a * \{a^{r-1}\} : M \in \mathsf{M}\rangle = \langle Ma^{r-1} : M \in \mathsf{M}\rangle =$$
$$= \langle M\varphi(a^{r-1}) : M \in \mathsf{M}\rangle = \mathsf{M} \circ \langle\{\varphi(a^{r-1})\}\rangle.$$

Оскільки $a^{r-1} \neq \varphi(a^{r-1})$, то монотонна сім'я M не є ні скоротною зліва, ні скоротною справа.

Якщо $r=1$, то циклічна напівгрупа $C_{1,m}=C_m$ є групою. Нехай e − одиниця групи C_m. Тоді $\langle\{e\}\rangle\circ \mathsf{M}=\mathsf{M}=\mathsf{M}\circ\langle\{e\}\rangle$ для будь-якого $\mathsf{M}\in\upsilon(C_m)$ і з рівностей $\mathsf{X}\circ\langle\{e\}\rangle=\mathsf{Y}\circ\langle\{e\}\rangle$ та $\{e\}\circ\mathsf{X}=\{e\}\circ\mathsf{Y}$ випливає, що $\mathsf{X}=\mathsf{Y}$. Таким чином, головний ультрафільтр $\langle\{e\}\rangle$ є скоротним елементом напівгрупи $\upsilon(C_{1,m})$.

Якщо G − група, то з формули множення

$$\mathsf{L}\circ\mathsf{M}=\langle \bigcup_{a\in L} a*M_a : L\in\mathsf{L},\ \{M_a\}_{a\in L}\subset\mathsf{M}\rangle$$

в напівгрупі $\upsilon(G)$ випливає, що добуток $\mathsf{L}\circ\mathsf{M}$ двох монотонних сімей L і M є головним ультрафільтром тоді і тільки тоді, коли одночасно L і M є головними ультрафільтрами. Таким чином, одержуємо наступне

Твердження 3.2. Для довільної групи G множина $\upsilon(G)\setminus\{\langle\{g\}\rangle : g\in G\}$ є ідеалом в $\upsilon(G)$.

Лема 3.1. Напівгрупа S є напівгрупою з лівими (правими) скороченнями тоді і лише тоді, коли всі головні ультрафільтри є скоротними зліва (справа) елементами в розширенні $\upsilon(S)$.

Доведення. Якщо елемент $a\in S$ не є скоротним зліва (справа) в напівгрупі S, то й головний ультрафільтр, породжений елементом a, не є скоротним в $\upsilon(S)$.

Нехай S є напівгрупою з лівими (правими) скороченнями, $a\in S$ і $\mathsf{X},\mathsf{Y}\in\upsilon(S)$, $\mathsf{X}\neq\mathsf{Y}$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $X\in\mathsf{X}\setminus\mathsf{Y}$ для деякого $X\in\mathsf{X}$. Тоді $(S\setminus X)\cap Y\neq\varnothing$ для для будь-якого $Y\in\mathsf{Y}$. Оскільки всі елементи напівгрупи S є скоротними зліва (справа), то $(S\setminus aX)\cap aY\neq\varnothing$ ($(S\setminus Xa)\cap Ya\neq\varnothing$), а тому $\langle\{a\}\rangle\circ\mathsf{X}\neq\langle\{a\}\rangle\circ\mathsf{Y}$ ($\mathsf{X}\circ\langle\{a\}\rangle\neq\mathsf{Y}\circ\langle\{a\}\rangle$). Таким чином, лівий $l_{\langle\{a\}\rangle}$ (правий $r_{\{a\}}$) зсув є ін'єктивним відображенням і головний ультрафільтр $\langle\{a\}\rangle$ є скоротним зліва (справа).

Твердження 3.3. Елемент $\mathsf{M}\in\upsilon(C_{1,m})$ є скоротним зліва (справа), тоді і лише тоді, коли M є головним ультрафільтром.

Доведення. Оскільки в будь-якій групі, зокрема циклічній $C_{1,m}$, всі елементи є скоротними, то за лемою 3.1 всі головні ультрафільтри є скоротними елементами в розширенні $\upsilon(C_{1,m})$.

Припустимо, що деяка монотонна сім'я $\mathsf{M}\in\upsilon(C_{1,m})\setminus\{\langle\{g\}\rangle : g\in C_{1,m}\}$ є скоротною зліва. Це означає, що лівий зсув $l_{\mathsf{M}}:\upsilon(C_{1,m})\to\upsilon(C_{1,m})$, $l_{\mathsf{M}}:\mathsf{A}\mapsto\mathsf{M}\circ\mathsf{A}$ є ін'єктивним. Згідно з твердженням 3.2 множина $\upsilon(C_{1,m})\setminus\{\langle\{g\}\rangle : g\in C_{1,m}\}$ є ідеалом в $\upsilon(C_{1,m})$.

Отже, $l_{\mathsf{M}}(\upsilon(C_{1,m}))=\mathsf{M}\circ\upsilon(C_{1,m})\subset\upsilon(C_{1,m})\setminus\{\langle\{g\}\rangle : g\in C_{1,m}\}$. Оскільки $\upsilon(C_{1,m})$ є скінченною, то l_{M} не може бути ін'єктивним.

Для скоротних справа елементів доведення аналогічне.

Нескінченна підмножина $T \subset \mathsf{N}$ називається *тонкою*, якщо перетин $(m+T)\cap(n+T)$ є скінченним для будь-яких $m,n \in \mathsf{Z}, m \neq n$. Прикладом тонкої множини є множина $T = \{2^n : n \in \mathsf{N}\}$. Для підмножин $A, B \in \mathsf{N}$ будемо писати, що $A \subset^* B$, якщо $A \setminus B$ є скінченною, та $A =^* B$, якщо $A \subset^* B$ і $B \subset^* A$.

Теорема 4. Монотонна сім'я є скоротною зліва в напівгрупі $\upsilon(\mathsf{N})$ тоді і лише тоді, коли вона є головним ультрафільтром.

Доведення. Оскільки нескінченна циклічна напівгрупа N є напівгрупою з лівими і правими скороченнями, то з леми 3.1 випливає, що всі головні ультрафільтри є скоротними елементами в напівгрупі $\upsilon(\mathsf{N})$.

Припустимо, що монотонна сімя M є скоротною зліва в $\upsilon(\mathsf{N})$. Спершу покажемо, що M містить одноточкову множину. Припустимо протилежне, що $|M| \geq 2$ для будь-якого $M \in \mathsf{M}$. Нехай $T \subset \mathsf{N}$ − деяка тонка множина. Розглянемо фільтри Фреше F_{N} і $\mathsf{F}_{\mathsf{N}\setminus T}$ на множинах N і $\mathsf{N}\setminus T$ відповідно. Очевидно, що $\mathsf{F}_{\mathsf{N}} \subset \mathsf{F}_{\mathsf{N}\setminus T}$. Оскільки F_{N} є інваріантним на множині N, то F_{N} є правим нулем напівгрупи $\upsilon(\mathsf{N})$. Таким чином, $\mathsf{F}_{\mathsf{N}} = \mathsf{M}\circ\mathsf{F}_{\mathsf{N}} \subset \mathsf{M}\circ\mathsf{F}_{\mathsf{N}\setminus T}$. Покажемо, що $\mathsf{M}\circ\mathsf{F}_{\mathsf{N}\setminus T} \subset \mathsf{F}_{\mathsf{N}}$. Нехай $\bigcup_{m\in M}(m+F_m) \in \mathsf{M}\circ\mathsf{F}_{\mathsf{N}\setminus T}$, де $M \in \mathsf{M}, F_m \in \mathsf{F}_{\mathsf{N}\setminus T}$. Зафіксуємо деякі $a, b \in M$, $a \neq b$. Тоді

$$\mathsf{N}\setminus\bigcup_{m\in M}(m+F_m) = \bigcap_{m\in M}(\mathsf{N}\setminus(m+F_m)) \subset (\mathsf{N}\setminus(a+F_a))\cap(\mathsf{N}\setminus(b+F_b)) =^*$$
$$(a+(\mathsf{N}\setminus F_a))\cap(b+(\mathsf{N}\setminus F_b)) =^* (a+T)\cap(b+T).$$

Оскільки перетин $(a+T)\cap(b+T)$ є скінченним, то й множина $\mathsf{N}\setminus\bigcup_{m\in M}(m+F_m)$ є скінченною, а отже, $\bigcup_{m\in M}(m+F_m) \in \mathsf{F}_{\mathsf{N}}$. Таким чином, $\mathsf{M}\circ\mathsf{F}_{\mathsf{N}} = \mathsf{M}\circ\mathsf{F}_{\mathsf{N}\setminus T}$, що протирічить тому, що M є скоротною зліва монотонною сім'єю напівгрупи $\upsilon(\mathsf{N})$.

Отже, M містить деяку одноточкову множину $\{c\}$. Ми стверджуємо, що M збігається з головним ультрафільтром, породженим $\{c\}$. Припустивши протилежне, отримуємо, що $\mathsf{N}\setminus\{c\} \in \mathsf{M}$. Нехай A − монотонна сім'я всіх нескінченних підмножин множини N, а B − монотонна сім'я всіх нескінченних підмножин множини N, які не містяться в тонкій множині T. Тоді $\mathsf{M}\circ\mathsf{B} \subset \mathsf{M}\circ\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$. Покажемо, що $\mathsf{A} \subset \mathsf{M}\circ\mathsf{B}$. Нехай $A \in \mathsf{A}$. Покладемо $B = (A-c)\cap\mathsf{N}$. Якщо B не є підмножиною множини T, то

$$\mathsf{M}\circ\mathsf{B} \ni \{c\}+B = c+((A-c)\cap\mathsf{N}) \subset c+(A-c) = A.$$

Звідки випливає, що $A \in \mathsf{M}\circ\mathsf{B}$. В іншому випадку, якщо $B = (A-c)\cap\mathsf{N} \subset T$, то для кожного $x \in \mathsf{N}\setminus\{c\} \in \mathsf{M}$ покладемо

$B_x = (A-x)\cap \mathsf{N}$. Маємо, що $B_x =^* A-x = A-c+(c-x) \subset^* T+(c-x)$ і $B_x \cap T \subset^* (T+(c-x))\cap T$. Оскільки множина T є тонкою, то перетин $B_x \cap T$ є скінченним і B_x не є підмножиною множини T. Отже, $B_x \in \mathsf{B}$, $\mathsf{M}\circ\mathsf{B} \ni \bigcup_{x\in(\mathsf{N}\setminus\{c\})}(x+B_x) \subset A$ і $A \in \mathsf{M}\circ\mathsf{B}$. Таким чином, $\mathsf{M}\circ\mathsf{B} = \mathsf{M}\circ\mathsf{A} = \mathsf{A}$, що суперечить вибору M як скоротної зліва монотонної сім'ї в $\upsilon(\mathsf{N})$.

Література

1. Banakh T. Algebra in superextensions of groups, I: zeros and commutativity / T.Banakh, V.Gavrylkiv, O.Nykyforchyn // Algebra Discrete Math. – 2008. – No.3. – P. 1-29.
2. Banakh T. Algebra in superextension of groups, II: cancelativity and centers / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 2008. – No.4. – P. 1-14.
3. Banakh T. Algebra in superextension of groups: minimal left ideals / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 31 (2009). – P. 142-148.
4. Banakh T. Algebra in the superextensions of twinic groups / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Dissert. Math. – 473 (2010). – 74 pp.
5. Banakh T. Algebra in superextensions of semilattices / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 13:1 (2012). – P. 26-42.
6. Banakh T. Algebra in superextensions of inverse semigroups, / T.Banakh, V.Gavrylkiv // Algebra Discrete Math. – 13:2 (2012). – P. 147-168.
7. Clifford A.H. The algebraic theory of semigroups. Vol. I. / A.H.Clifford, G.B.Preston / Mathematical Surveys. – 7. AMS, Providence, RI, 1961.
8. Gavrylkiv V. The spaces of inclusion hyperspaces over noncompact spaces / V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 28:1 (2007). – P. 92-110.
9. Gavrylkiv V. Right-topological semigroup operations on inclusion hyperspaces / V.Gavrylkiv // Mat. Stud. – 29:1 (2008). – P. 18-34.
10. Gavrylkiv V. On representation of semigroups of inclusion hyperspaces / V.Gavrylkiv // Carpathian Mathematical Publication. – 2:1 (2010). – P. 24-34.
11. Hindman N. Algebra in the Stone-Čech compactification, de Gruyter / N.Hindman, D.Strauss. – Berlin, New York, 1998.
12. Teleiko A. Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces A.Teleiko, M.Zarichnyi. – VNTL, Lviv, 1999.

Стаття поступила в редакційну колегію 24.12.2012 р.
*Рекомендовано до друку д.ф-м.н., доцентом **Заторським Р.А.**,*
*д.т.н., професором **Обжеріним Ю.Є.** (м. Севастополь)*

MONOTONE FAMILIES ON CYCLIC SEMIGROUPS

V. M. Gavrylkiv
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;
e-mail: vgavrylkiv@gmail.com

Given a cyclic semigroup S we study right and left zeros, singleton left ideals, the minimal ideal, central elements, left cancelable and right cancelable elements of extensions $\upsilon(S)$ *and characterize cyclic semigroups whose superextensions are commutative.*

Key words: *cyclic semigroup, monotone family, Stone-Čech extension.*