УДК 517.53

ПРО МІРУ ХАУСДОРФА МНОЖИНИ ВАЛІРОНІВСЬКИХ ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ ЦІЛОЇ КРИВОЇ

Я. І. Савчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Дано точнішу за відомі раніше метричну характеристику валіронівських дефектних векторів цілої кривої скінченного порядку.

Ключові слова: *ціла крива, характеристика росту, функція наближення, валіронівський дефектний вектор, полярна множина, міра Хаусдорфа.*

Цілою кривою називається голоморфне відображення $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$, де p – натуральне число, більше за одиницю. Отже, p-вимірна ціла крива має вигляд $\vec{G}(z)=\left(g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z)\right)$, де компоненти $g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z)$ – цілі (тобто аналітичні в усій комплексній площині) функції. Вважатимемо їх лінійно незалежними і без спільних нулів.

Для p-вимірної цілої кривої $\vec{G}$ *характеристика росту* $T\left(r, \vec{G}\right)$ та *функція наближення* $m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)$ при $\vec{a}\neq\vec{0}$ визначаються рівностями

$$T\left(r,\vec{G}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi,$$

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{a}\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\cdot\vec{a}\right|}d\varphi.$$

Розглянемо

$$\Delta\left(\vec{a}, \vec{G}\right)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)}{T\left(r, \vec{G}\right)}.$$

Якщо $\Delta\left(\vec{a}, \vec{G}\right)>0$, то $\vec{a}$ називається *валіронівським дефектним вектором.*

Позначимо через $V\left(\vec{G}\right)=\left\{\vec{a}\in\boldsymbol{C}^p\setminus\left\{\vec{0}\right\}:\Delta\left(\vec{a}, \vec{G}\right)>0\right\}$ множину валіронівських дефектних векторів цілої кривої $\vec{G}$.

Порядком цілої кривої $\vec{G}$ називається величина $\rho=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln T\left(r, \vec{G}\right)}{\ln r}$.

Відносно множини $V\left(\vec{G}\right)$ Фаворовим С.Ю. отримано такий результат [2]: перетин $V\left(\vec{G}\right)$ з довільною гіперплощиною з $\boldsymbol{C}^p$, яка не проходить через початок координат, має нульову Γ-ємність. Точніший результат отримав А. Садуллаєв [3]. Перш ніж його сформулювати, нагадаємо, що множина $E \subset \boldsymbol{C}^n$ називається $\boldsymbol{C}^n$-полярною, якщо існує плюрісубгармонічна в $\boldsymbol{C}^n$ функція $\Phi(z) \not\equiv -\infty$, така, що $E \subset \{z : \Phi(z) = -\infty\}$. Результат А. Садуллаєва полягає в наступному (ми його формулюємо в зміненій, але еквівалентній формі): Переріз $V(\vec{G})$ з довільною гіперплощиною, яка не проходить через початок координат, є $\boldsymbol{C}^{p-1}$ – полярною множиною.

Мною отримано такий результат.

Теорема. *Нехай* $L \subset \boldsymbol{C}^p$ *– гіперплощина, яка не проходить через початок координат,* $\vec{G}$ *– p-вимірна ціла крива скінченого порядку. Тоді міра Хаусдорфа* $h^*\left(L \cap V\left(\vec{G}\right)\right) = 0$ *для всіх вимірюючих функцій* $h(t)$*, які задовольняють умові*

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{2p-3}(-\ln t)} dt < \infty . \qquad (1)$$

З результату Садуллаєва випливає, що $h^*\left(L \cap V\left(\vec{G}\right)\right) = 0$ тільки для функцій $h(t)$, які задовольняють умові

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{2p-3}} dt < \infty .$$

Доведення. Позначимо через $\boldsymbol{S}^p$ множину одиничних векторів із $\boldsymbol{C}^p$, перша ненульова компонента яких є додатним числом. Очевидно, $\boldsymbol{C}^p = \left\{\lambda\vec{a} : \vec{a} \in \boldsymbol{S}^p, \lambda \in \boldsymbol{C}\right\}$, і для довільної цілої кривої $\vec{G} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^p$ виконується $\Delta\left(\vec{a}, \vec{G}\right) = \Delta\left(\lambda\vec{a}, \vec{G}\right)$, $\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, $\lambda \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$.

Розглянемо довільну гіперплощину $L = \boldsymbol{C}^{p-1}(\vec{c}, \lambda) = \left\{\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p : \vec{a} \cdot \vec{c} = \lambda\right\}$, $\vec{c} \in \boldsymbol{C}^p$, $\|\vec{c}\| = 1$, $\lambda \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$. Нехай $\vec{b} \in \boldsymbol{S}^p$, $\delta > 0$, $r > |\lambda|$. Покажемо, що множина $\Theta_r = \boldsymbol{C}^{p-1}(\vec{c}, \lambda) \cap S^*\left(\vec{b}, \delta\right) \cap \left\{\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p : \|\vec{a}\| \le r\right\}$, де $S^*\left(\vec{b}, \delta\right) = \left\{\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p : \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{\|\vec{a}\|} < \delta\right\}$, покривається $\left(\left[\frac{1}{\delta}\right] + 1\right)^{2p-4}$ $2p$-вимірними кубами зі сторонами довжиною $\frac{4\delta r^2}{|\lambda|}$. Нас цікавитимуть досить малі $\delta > 0$.

Подамо
$$\vec{c} = \beta\vec{b} + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_c \perp \vec{b} . \qquad (2)$$

Очевидно, $|\beta| \le 1$. Відповідно до (1) для довільного $\vec{a} \in \Theta_r$ виконується

$$|\lambda| = |\vec{a}\vec{c}| = \left|\beta\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\,\vec{a}_c\right| \le \left|\vec{a}\vec{b}\right| + \left|\vec{a}\,\vec{a}_c\right| \le \delta\|\vec{a}\| + \|\vec{a}_c\| \cdot \|\vec{a}\| \le \delta \cdot r + \|\vec{a}_c\| \cdot r ,$$

звідки

$$\|\vec{a}_c\| \geq \frac{|\lambda|}{r} - \delta . \tag{3}$$

Отже, якщо вектор $\vec{b} \in \boldsymbol{S^p}$ такий, що не виконується (2), то $\Theta_r = \varnothing$. Оскільки нас цікавлять досить малі $\delta > 0$, то розглядаємо тільки такі $S^*\left(\vec{b}, \delta\right)$ ($\delta < \frac{|\lambda|}{2r}$), щоб виконувалось

$$\|\vec{a}_c\| \geq \frac{|\lambda|}{2r}, \tag{4}$$

де $\vec{a}_c$ визначається умовою (2).

Нехай $\tilde{\Theta}_r = \left\{ \vec{a} :\ \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \in \Theta_r \right\}$. Тоді для довільного вектора $\vec{a} \in \tilde{\Theta}_r$ маємо:

$$\|\vec{a}\| \leq \left\| \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right\| + \left\| \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right\| \leq r + |\lambda|, \tag{5}$$

$$\vec{a}\vec{c} = \left(\vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right) \vec{c} - \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \vec{c} = \lambda - \lambda = 0, \tag{6}$$

$$\left| \vec{a}\vec{b} \right| = \left| \left(\vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right) \vec{b} \right| \leq \delta \left\| \vec{a} + \lambda \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \right\| \leq \delta r . \tag{7}$$

Позначимо $\vec{d} = \frac{\vec{a}_c}{\|\vec{a}_c\|} \in \boldsymbol{S^p}$. Тоді $\vec{d} \perp \vec{b}$, і, відповідно до (2), (4), (6) та (7) для довільного $\vec{a} \in \tilde{\Theta}_r$ виконується

$\left| \vec{a}\vec{d} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a}_c|}{\|\vec{a}_c\|} = \frac{|\beta| \cdot |\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}_c\|} \leq \frac{\delta r}{\|\vec{a}_c\|} \leq \frac{2\delta r^2}{|\lambda|} = \sigma$. Оскільки $r > |\lambda|$, то, відповідно до (7), виконується $\left| \vec{a}\vec{b} \right| \leq \sigma$.

Отже, $\tilde{\Theta}_r$ міститься в множині $\left\{ \vec{a} \in \boldsymbol{C^p} : \left| \vec{a}\vec{b} \right| \leq \sigma,\ \left| \vec{a}\vec{d} \right| \leq \sigma,\ \|\vec{a}\| \leq r + |\lambda| \right\}$, де $\vec{b} \perp \vec{d}$ та $\|\vec{b}\| = \|\vec{d}\| = 1$. Зрозуміло, що таку множину можна покрити $\left(\left[\frac{r + |\lambda|}{\sigma} \right] + 1 \right)^{2p-4} = \left(\left[\frac{(r + |\lambda|)|\lambda|}{2\delta r^2} \right] + 1 \right)^{2p-4}$ $2p$-вимірними кубами зі сторонами довжиною 2σ. Те ж саме можна сказати і про множину $\Theta_r = \lambda \vec{d} + \tilde{\Theta}_r$. Нехай тепер $h(t)$ – довільна вимірююча функція, яка задовольняє умові (1). Але $h^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} h^*\left(E_j\right)$, і для і для довільної цілої кривої $\vec{G} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C^p}$ скінченного порядку виконується $V\left(\vec{G}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{s=1}^{\infty} \left(U_{\alpha_k} \cap \left\{ \vec{a} \in \boldsymbol{C^p} : \|\vec{a}\| \leq s \right\} \right) \right)$ де U_{α_k} – множини із $\boldsymbol{C^p}$, кожна з яких задовольняє умові: існують $\alpha_k > 0$ і вектори $\vec{b}_{kn} \in \boldsymbol{S^p}$, $n = 1, 2, \ldots$, такі, що для довільного $\vec{a} \in U_{\alpha_k}$ виконується $\vec{a} \in \left\{ \vec{c} \in \boldsymbol{S^p} : \left| \vec{c} \cdot \vec{b}_{kn} \right| \le \exp\left(-e^{n\alpha}\right) \right\}$ для нескінченної множини значень n. Тому нам досить довести, що для довільних $\alpha > 0$ та $r > 0$ виконується

$$h^*\left(U_\alpha \cap \left\{ \vec{a} \in \boldsymbol{C^p} : \|\vec{a}\| \le r \right\} \cap \boldsymbol{C^{p-1}}\left(\vec{c}, \lambda\right) \right) = 0 .$$

Нехай $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots$ – вектори із $\boldsymbol{S^p}$, що відповідають U_α. Тоді для довільного $N \in \boldsymbol{N}$ виконується

$$\Gamma = U_\alpha \cap \boldsymbol{C^{p-1}}\left(\vec{c}, \lambda\right) \cap \left\{ \vec{a} \in \boldsymbol{C^p} : \|\vec{a}\| \le r \right\} \subset \bigcup_{j=N}^{\infty} \Theta_r\left(\vec{b}_j, \exp\left(-e^{j\alpha}\right) \right). \qquad (8)$$

Умова (1) рівносильна умові $-\int\limits_0 \frac{h(t)}{t^{2p-4}} d\left(\ln\left(\ln \frac{1}{t} \right) \right) < \infty$, з якої випливає, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h\left(t'_j\right)}{\left(t'_j\right)^{2p-4}} \left(\ln\left(\ln \frac{1}{t_j} \right) - \ln\left(\ln \frac{1}{t_{j-1}} \right) \right) < \infty , \qquad (9)$$

де t'_j – точка мінімуму функції $\frac{h(t)}{t^{2p-4}}$ на відрізку $\left[t_j, t_{j-1} \right]$.

Виберемо $t_j = \exp\left(-e^{j\alpha}\right)$. Тоді із (9) отримаємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h\left(t'_j\right)}{\left(t'_j\right)^{2p-4}} < \infty , \qquad (10)$$

де $\exp\left(-e^{j\alpha}\right) \le t'_j \le \exp\left(-e^{(j-1)\alpha}\right)$.

Очевидно, $\Theta_r\left(\vec{b}_j, \exp\left(-e^{j\alpha}\right) \right) \subset \Theta_r\left(\vec{b}_j, t'_j \right)$, а множину $\Theta_r\left(\vec{b}_j, t'_j \right)$, як показано вище, можна покрити $\left(\left[\frac{1}{t'_j} \right] + 1 \right)^{2p-4}$ кубами зі сторонами довжиною $\frac{4 t'_j r^2}{|\lambda|}$, або $\left[\frac{4r^2}{|\lambda|} + 1 \right]^{2p} \cdot \left(\left[\frac{1}{t'_j} \right] + 1 \right)^{2p-4}$ кубами зі сторонами t'_j.

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$, відповідно до (8) та (10), маємо

$h^*(\Gamma) \le \sum_{j=N}^{\infty} \left[\frac{4r^2}{|\lambda|} + 1 \right]^{2p} \cdot \left(\left[\frac{1}{t'_j} \right] + 1 \right)^{2p-4} h\left(t'_j\right) < \varepsilon$ при $N = N(\varepsilon)$, звідки $h^*(\Gamma) = 0$.

Теорема доведена.

Приклад. *Існує C^{p-1} – полярна множина E та вимірююча функція $h(t)$, яка задовольняє умові (1), така, що $h^*(E) = \infty$.*

Дійсно, розглянемо $K(t) = 2(-\log t)^{\alpha} - \alpha(-\log t)^{\alpha-1}$, де $\alpha < 1$; $\widetilde{h}_1(t) = (-\log t)^{-1}$. За теоремою 4 із [4, с.41] знайдеться множина $\widetilde{E} \subset C$ – така, що

$$\widetilde{h}_1^*\left(\widetilde{E}\right) = 0 . \qquad (11)$$

З теореми 1 із [4, с.35] випливає, що

$$\widetilde{h}^*\left(\widetilde{E}\right) = \infty , \qquad (12)$$

де $\widetilde{h}(t) = (-\log t)^{\alpha}$.

Розглянемо множину $E = \widetilde{E} \times C^{p-2}$. Вона C^{p-1} – полярна, оскільки, відповідно до (11) та теореми 5.14 із [5] множина $\widetilde{E}$ буде C – полярною.

Із (12) випливає, що $\widetilde{h}^*(E) = \infty$, де $h(t) = t^{2p-4}(-\log t)^{\alpha}$. Разом з тим, $h(t)$ задовольняє умові (1).

Література

1. Петренко В.П. Целые криве / В.П.Петренко. – Ч.: В.школа, 1984. – 136 с.
2. Фаворов С.Ю. Об одном свойстве целых кривих / С.Ю.Фаворов // Функц. анализ и его прилож. – 1975. – Т.9, №1. – С. 87-88.
3. Садуллаев А. Дефектные дивизоры в смысле Валирона / А.Садуллаев // Матем. сб. – 1979. – В.108(150). – №4. – С. 567-580.
4. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств / Л.Карлесон. – М.: Мир, 1971. – 128 с.
5. Хейман У. Субгармонические функции / У.Хейман, П.Кеннеди. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.05.2012 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Лопушанським О.В*** *(м. Львів)*

ABOUT HAUSDORF'S MEASURE OF GREAT NUMBER OF VALIRON DEFECTIVE VECTORS OF WHOLE CURVE

Ya. I. Savchuk
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

More precisely metrical description of Valiron imperfect vectors of whole curve of continuity order is given than known earlier.

Key words: *whole curve, description of growth, function of approaching, Valiron imperfect vector, arctic great number, measure Hausdorf.*