УДК 519.217.8

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ВІНЕРОВИМ ПРОЦЕСОМ

М. М. Осипчук

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел. +380 (342) 59-60-47; e-mail: myosyp@gmail.com

Розглядається задача мінімізації моменту першого досягнення початку координат вінеровим процесом шляхом додавання деякого переносу.

Ключові слова: *вінерів процес, стохастична експонента, оптимальна стратегія.*

Вступ

Нехай $(w(t),\mathsf{M}_t,\mathsf{P}_x)_{t\geq 0,x\in\mathsf{R}}$ – вінерів процес в R, для якого $\mathsf{P}_x(w(0)=x)=1$. Розглянемо момент першого досягнення процесом $(w(t))_{t\geq 0}$ початку координат: $\tau=\inf\{s\geq 0: w(s)=0\}$. Зауважимо, що τ є моментом зупинки відносно потоку $(\mathsf{M}_t)_{t\geq 0}$. Розподіл випадкової величини τ залежить від точки x і задається при $x\neq 0$ щільністю $p_x(t)=\frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}$, $t>0$. Легко бачити, що випадкова величина τ не має скінченного математичного сподівання відносно міри P_x при $x\neq 0$.

Метою роботи є встановлення коефіцієнту переносу, який забезпечив би, в певному розумінні, мінімальне значення моменту τ. Коефіцієнт переносу вибиратимемо на множині V прогресивно вимірних процесів $(\alpha(t),\mathsf{M}_t)_{t\geq 0}$ в R, для яких

$$\mathsf{P}_x\left(\int_0^\tau \alpha^2(s)ds<+\infty\right)=1$$

та мають місце умови $\mathsf{E}_x\Psi_\tau^0(\alpha)=1$, $\mathsf{E}_x(\Psi_\tau^0(\alpha))^2<+\infty$, де E_x означає математичне сподівання за мірою P_x, а

$$\Psi_\tau^0(\alpha)=\exp\left\{\int_0^\tau \alpha(s)dw(s)-\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha^2(s)ds\right\}$$

(тут перший з інтегралів є інтегралом Іто). Елементи множини V називатимемо *допустимими стратегіями*. Випадковий процес $(\Psi_t^0(\alpha))_{t\geq 0}$ часто називають *стохастичною експонентою*.

1 Цільова функція та локальна оптимальна стратегія

Нехай функція $f(t)_{t\geq 0}$ додатна неперервна монотонно зростаюча та обмежена. *Цільовою функцією* будемо називати функціонал

$$\Phi(\alpha) = \mathsf{E}_x f(\tau)\Psi_\tau^0(\alpha) \tag{1}$$

заданий на множині V допустимих стратегій. Очевидно, що при виконанні припущень щодо функції f мають місце нерівності $0 \leq \Phi(\alpha) \leq C = \sup_{t\geq 0} f(t)$ на всій множині V. Крім того, існує скінченна дисперсія $\mathsf{D}_x f(\tau)$ випадкової величини $f(\tau)$.

Нас цікавитиме існування та вигляд допустимої стратегії, на якій цільова функція досягала б свого мінімального значення на всьому V чи деякій його підмножині. Деяку відповідь на поставлене питання дає наступна теорема, що є основним твердженням цього параграфу. Подібна задача для локального часу вінерового процесу в нулі розглядалася в роботі [1], ідеї якої знайшли своє застосування і в нашій ситуації.

Теорема 1. *Нехай додатна неперервна строго монотонно зростаюча та обмежена функція* $f(t)_{t\geq 0}$ *така, що існують сталі* $u>0$ *та* $r \in \left(\frac{1}{2};1\right]$ *і функція* $(\rho(t))_{t>0}$, *для яких при всіх* $0<t<u$ $f(s+t)-f(s) \leq \rho(s)t^r$, *причому функція* ρ *квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним.*

Тоді існує допустима стратегія $\alpha^*(t) = \dfrac{h'_x(t,w(t))}{h(t,w(t))}$, *на якій функціонал* Φ *досягає свого мінімуму на множині* $W = \left\{\alpha \in V : \mathsf{E}_x(\Psi_\tau^0(\alpha))^2 \leq K\right\}$. *Тут* $K = \dfrac{\mathsf{D}_x f(\tau)}{(C-\mathsf{E}_x f(\tau))^2}+1$, $h(t,x) = C - \mathsf{E}_x f(t+\tau)$, $t\geq 0$, $x \in \mathsf{R}$.

Зауваження. *Очевидно, що множина* W *непорожня, бо* $\Psi_\tau^0(0)\equiv 1$ *і, отже,* $0 \in W$. *Відомо (див. [2, с.244]), що стохастична експонента* $\Psi_t^0(\alpha)$ *задовольняє рівняння* $\Psi_t^0(\alpha) = 1 + \int_0^t \Psi_s^0(\alpha)\alpha(s)dw(s)$, *якщо тільки* $\mathsf{P}_x\left(\int_0^t \alpha^2(s)ds < +\infty\right) = 1$. *Звідси*

$$(\Psi_t^0(\alpha))^2 = 1 + 2\int_0^t \Psi_s^0(\alpha)\alpha(s)dw(s) + \left(\int_0^t \Psi_s^0(\alpha)\alpha(s)dw(s)\right)^2 =$$

$$= 2\Psi_t^0(\alpha) - 1 + \left(\int_0^t \Psi_s^0(\alpha)\alpha(s)dw(s)\right)^2 \geq 2\Psi_t^0(\alpha) - 1$$

і за умови, що $\mathsf{E}_x \Psi_t^0(\alpha) = 1$ *матимемо* $\mathsf{E}_x (\Psi_t^0(\alpha))^2 \geq 1$. *Таким чином,* $\mathsf{E}_x (\Psi_\tau^0(\alpha))^2 \geq 1$.

Перш ніж доводити сформульовану теорему, розглянемо одне допоміжне твердження, яке, цікаве і саме по собі.

Лема. *Нехай функція* $g(t)_{t\geq 0}$ *додатна при* $t > 0$ *і така, що існують сталі* $u > 0$, $r \in \left(\frac{1}{2};1\right]$ *і функція* $(\rho(t))_{t>0}$, *для яких при всіх* $0 < t < u$ *має місце* $|g(s+t) - g(s)| \leq \rho(s) t^r$, *причому функція* ρ *квадратично інтегровна в деякому околі нуля та обмежена поза ним. Тоді існує така допустима стратегія* α_0, *що* $g(\tau) = \Psi_\tau^0(\alpha_0) \mathsf{E}_x g(\tau)$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$k(t,x) = \mathsf{E}_x g(t+\tau) = \int_0^{+\infty} g(t+s) p_x(s) ds ,$$

задану при $t \geq 0$, $x \in \mathsf{R} \setminus \{0\}$, та довизначимо її за неперервністю в точках $(t;0)$. Ця функція диференційовна за обома змінними скрізь крім точок $(t;0)$, причому

$$k_t'(t,x) = \int_0^{+\infty} g'(t+s) \frac{|x|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds = -\int_0^{+\infty} g(t+s) \frac{(x^2 - 3s)|x|}{2\sqrt{2\pi s^7}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds,$$

$$k_x'(t,x) = \operatorname{sign} x \int_0^{+\infty} g(t+s) \left(1 - \frac{x^2}{s}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds,$$

$$k_{xx}''(t,x) = \int_0^{+\infty} g(t+s) \frac{(x^2 - 3s)|x|}{s^2\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} ds.$$

Всі інтеграли в правих частинах цих рівностей збігаються локально рівномірно за $t > 0$ та $x \neq 0$. Тому диференціювання інтегралу, що задає функцію $k(t,x)$, по обох параметрах допустиме. Легко бачити, що при всіх $t > 0$ та $x \neq 0$ має місце рівність

$$k_t'(t,x) + \frac{1}{2} k_{xx}''(t,x) = 0. \tag{2}$$

Зауваживши, що $k(0,x) = \mathsf{E}_x g(\tau)$ і $k(t,0) = g(t)$, розглянемо для фіксованого $x \neq 0$ випадковий процес $\xi_x(t) = \mathsf{E}_x\big(g(\tau)/\mathsf{M}_t\big)$, $t \geq 0$. Очевидно, що $\xi_x(0) = \mathsf{E}_x g(\tau) = k(0,x)$ та $\xi_x(\tau) = g(\tau)$.

Враховуючи, що на множині $\{\tau > t\} \in \mathsf{M}_t$ виконується рівність $\theta_t \tau = \tau - t$ (θ_t – оператор зсуву [3, с. 120]), одержимо

$$\xi_x(t) = \mathsf{E}_x\big(g(\tau)\chi_{\{\tau\leq t\}}/\mathsf{M}_t\big) + \mathsf{E}_x\big(g(\tau)\chi_{\{\tau>t\}}/\mathsf{M}_t\big) =$$

$$= g(\tau)\chi_{\{\tau\leq t\}} + \chi_{\{\tau>t\}}\mathsf{E}_x\big(g(t+\theta_t\tau)/\mathsf{M}_t\big) = g(\tau)\chi_{\{\tau\leq t\}} + \chi_{\{\tau>t\}}\mathsf{E}_{w(t)} g(t+\tau) =$$

$$= k(\tau, w(\tau))\chi_{\{\tau\le t\}} + k(t, w(t))\chi_{\{\tau>t\}} = k(t\wedge\tau, w(t\wedge\tau)).$$

Тут і далі χ_A – індикатор множини A.

Доведемо далі, що для обчислення стохастичного диференціалу випадкового процесу $\xi_x(t)$ може бути застосована формула Іто (див. наприклад [2, с. 136]). Для цього досить довести, що P_x-м.н.

$$\int_0^{+\infty}\left(\chi_{\{\tau>t\}}k_x'(t, w(t))\right)^2 dt < +\infty.$$

Розглянемо наступне представлення

$$k_x'(t,x) = \operatorname{sign}x\int_0^{+\infty}(g(t)-g(t+s))\frac{x^2}{\sqrt{2\pi s^5}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}ds -$$

$$-\operatorname{sign}x\int_0^{+\infty}(g(t)-g(t+s))\frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}ds = I_1 - I_2.$$

Оцінюючи I_1 та I_2, маємо

$$|I_1| \le \int_0^u \rho(t)s^r\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi s^5}}ds + \int_u^{+\infty} g(t)\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi s^5}}ds \le$$

$$\le \rho(t)\int_0^u\frac{1}{\sqrt{2\pi s^{3-2\alpha}}}ds + g(t)\int_u^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}}ds \le const(\rho(t)+g(t))$$

Тут враховано очевидні при $s>0$ та $x\in\mathsf{R}$ нерівності

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} < 1, \quad \frac{x^2}{s}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} < 1,$$

а запис *const* означає деяку додатну сталу. Отже, $(k_x'(t,x))^2 \le const(\rho^2(t)+f^2(t))$ і тому

$$\int_0^{+\infty}\left(\chi_{\{\tau>t\}}k_x'(t,w(t))\right)^2 dt \le const\int_0^{\tau}(\rho^2(t)+f^2(t))dt.$$

Оскільки $\mathsf{P}_x(\tau<+\infty)=1$, функція $\rho(t)$ інтегровна з квадратом в околі нуля, $g(t)$ обмежена, то $\int_0^{+\infty}\left(\chi_{\{\tau>t\}}k_x'(t,w(t))\right)^2 dt < +\infty$ P_x-м.н.

Далі, застосувавши до $\xi_x(t) = k(t\wedge\tau, w(t\wedge\tau))$ формулу Іто, з врахуванням (2) матимемо

$$\xi_x(t) = k(0,x) + \int_0^{t\wedge\tau}k_x'(s,w(s))dw(s) = k(0,x) + \int_0^t k_x'(s,w(s))\chi_{\{\tau>s\}}dw(s).$$

Зауважимо, що при $0\le t<\tau$

$$\xi_x(t) = k(t,w(t)) = \int_0^{+\infty} g(t+s)\frac{|w(t)|}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left\{-\frac{w^2(t)}{2s}\right\}ds,$$

а при $t \geq \tau \quad \xi_x(t) = k(\tau, w(\tau)) = k(\tau, 0) = g(\tau) > 0$.

Крім того, $\xi_x(t)$ P_x-м.н. неперервна по t. Тому P_x-м.н. $\inf\limits_{0 \leq t \leq \tau} \xi_x(t) > 0$ і можемо записати

$$\xi_x(t) = k(0,x) + \int_0^t k_x'(s, w(s)) \frac{\chi_{\{\tau > s\}}}{\xi_x(s)} \xi_x(s) dw(s) = \mathsf{E}_x g(\tau) + \int_0^t \hat{\alpha}_0(s) \xi_x(s) dw(s),$$

де позначено $\hat{\alpha}_0(s) = k_x'(s, w(s)) \dfrac{\chi_{\{\tau > s\}}}{\xi_x(s)} = \dfrac{k_x'(s, w(s))}{k(s, w(s))} \chi_{\{\tau > s\}}$.

Покладемо $\alpha_0(t) = \dfrac{k_x'(t, w(t))}{k(t, w(t))}$. Враховуючи, що на множині $\{t < \tau\}$

$$k(t, w(t)) = \mathsf{E}_{w(t)} g(t + \tau) = \mathsf{E}_x \left(g(\tau) / \mathsf{M}_t \right) > 0,$$

можемо стверджувати, що $(\alpha_0(t))_{t \geq 0}$ є допустимою стратегією.

Крім того, $\xi_x(t) = \Psi_t^0(\hat{\alpha}_0) \mathsf{E}_x g(\tau) = \Psi_{t \wedge \tau}^0(\alpha_0) \mathsf{E}_x g(\tau)$ і $g(\tau) = \xi_x(\tau) = \Psi_\tau^0(\alpha_0) \mathsf{E}_x g(\tau)$, що і потрібно було довести.

Перейдемо тепер до доведення основного твердження роботи.

Доведення теореми 1. Позначимо $\left\| \Psi_\tau^0(\alpha) \right\| = \left(\mathsf{E}_x (\Psi_\tau^0(\alpha))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ та розглянемо функціонал $\hat{\Phi}(\alpha) = \dfrac{\mathsf{E}_x (C - f(\tau)) \Psi_\tau^0(\alpha)}{\left\| \Psi_\tau^0(\alpha) \right\|}$.

Легко бачити, що

$$\Phi(\alpha) = C - \hat{\Phi}(\alpha) \left\| \Psi_\tau^0(\alpha) \right\|. \tag{3}$$

Далі, функція $C - f(t)$ задовольняє умови леми. Тому існує така допустима стратегія $\alpha^*(t) = \dfrac{h_x'(t, w(t))}{h(t, w(t))}$, де $h(t,x) = C - \mathsf{E}_x f(t + \tau)$, $t \geq 0$, $x \in \mathsf{R}$, що $C - f(\tau) = \Psi_\tau^0(\alpha^*)(C - \mathsf{E}_x f(\tau))$ і, отже,

$$\hat{\Phi}(\alpha) = (C - \mathsf{E}_x f(\tau)) \frac{\mathsf{E}_x \Psi_\tau^0(\alpha^*) \Psi_\tau^0(\alpha)}{\left\| \Psi_\tau^0(\alpha) \right\|}.$$

Зауважимо, що $\Psi_\tau^0(\alpha^*) = \dfrac{C - f(\tau)}{C - \mathsf{E}_x f(\tau)}$. Звідси

$$\left\| \Psi_\tau^0(\alpha^*) \right\|^2 = \frac{\mathsf{E}_x (C - f(\tau))^2}{(C - \mathsf{E}_x f(\tau))^2} = K,$$

а це дає підстави стверджувати, що $\alpha^* \in W$, причому, для всіх $\alpha \in W$

$$\left\| \Psi_\tau^0(\alpha) \right\| \leq \left\| \Psi_\tau^0(\alpha^*) \right\|. \tag{4}$$

Нерівність Коші, застосована до $\mathsf{E}_x \Psi_\tau^0(\alpha^*) \Psi_\tau^0(\alpha)$, дозволяє записати:

$$\max_{\alpha\in V}\hat{\Phi}(\alpha)=\hat{\Phi}(\alpha^*)=(C-\mathsf{E}_x f(\tau))\left\|\Psi_\tau^0(\alpha^*)\right\|.$$

З (3) і (4) випливає нерівність $\Phi(\alpha)\ge C-\hat{\Phi}(\alpha^*)\left\|\Psi_\tau^0(\alpha^*)\right\|=\Phi(\alpha^*)$ при всіх $\alpha\in W$, яка доводить твердження теореми 1.

Зауважимо, що нескладні обчислення приводять до рівності

$$\min_{\alpha\in W}\Phi(\alpha)=\mathsf{E}_x f(\tau)-\frac{\mathsf{D}_x f(\tau)}{C-\mathsf{E}_x f(\tau)}.$$

Цікавим є наступний приклад, в якому вдається знайти оптимальну стратегію в явному вигляді. Розглянемо функціонал (1) з функцією $f(t)=1-e^{-mt}$, де $m>0$ – деяка стала. Оскільки при всіх $s>0$, $t>0$ має місце нерівність $e^{-ms}(1-e^{-mt})\le me^{-ms}t$, то умови теореми 1 виконані і, отже, існує допустима стратегія, яка мінімізує функціонал (1) на множині W. Множина допустимих стратегій W задається нерівністю $\mathsf{E}_x(\Psi_\tau^0(\alpha))^2\le e^{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{m}|x|}$. Оптимальна стратегія має вигляд $\alpha^*(t)=-\sqrt{2m}\,\mathrm{sign}(w(t))$.

2 Глобальна ε-оптимальна стратегія

Поставимо питання про існування оптимальної, в сенсі мінімізації функціоналу Φ, стратегії на всій множині допустимих стратегій V. Зауважимо насамперед, що для кожної $\alpha\in V$ має місце очевидна нерівність $\Phi(\alpha)>0$. Наступні обчислення показують, що можна одержати як завгодно мале додатне значення функціоналу Φ на V.

Розглянемо однопараметричну множину функцій $\{(\phi_\lambda(x))_{x\in\mathsf{R}}:\lambda>0\}$, в якій $\phi_\lambda(x)=-\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{sign}(x)$, та відповідну множину допустимих стратегій $\alpha_\lambda(t)=\phi_\lambda(w(t))$. Формула Танака (див., наприклад, [4, с. 83]) дозволяє записати

$$\int_0^\tau \mathrm{sign}(w(s))dw(s)=|w(\tau)|-|w(0)|-\eta(\tau)=-|w(0)|,$$

де $\eta(t)$ – локальний час в нулі вінерового процесу до моменту часу t і враховано, що для кожного $x\in\mathsf{R}$ P_x-м.н. $w(\tau)=0$, $\eta(\tau)=0$. Звідси маємо

$$\Psi_\tau^0(\alpha_\lambda)=\exp\left\{-\sqrt{2\lambda}\int_0^\tau\mathrm{sign}\,(w(s))dw(s)-\lambda\tau\right\}=\exp\left\{\sqrt{2\lambda}\,|w(0)|-\lambda\tau\right\}$$

Виберемо деяке $\varepsilon>0$ та знайдемо таке $\delta>0$, що для всіх $0\le t\le\delta$ має місце $f(t)\le\varepsilon$. Тоді, використовуючи рівність $\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}p_x(t)dt=e^{-\sqrt{2\lambda}|x|}$, яку легко перевірити, запишемо

$$\Phi(\alpha_\lambda)=\mathsf{E}_x f(\tau)\Psi_\tau^0(\alpha_\lambda)=$$

$$= \mathsf{E}_x f(\tau)\exp\left\{\sqrt{2\lambda}\,|\,w(0)\,|-\lambda\tau\right\} = e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\mathsf{E}_x f(\tau)e^{-\lambda\tau} =$$

$$= e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}p_x(t)dt \le \varepsilon e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\int_0^{\delta} e^{-\lambda t}p_x(t)dt + e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta}\int_\delta^{+\infty} f(t)p_x(t)dt \le$$

$$\le \varepsilon e^{\sqrt{2\lambda}|x|}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}p_x(t)dt + e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta}\int_0^{+\infty} f(t)p_x(t)dt = \varepsilon + e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta}\mathsf{E}_x f(\tau).$$

Далі той факт, що $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\sqrt{2\lambda}|x|-\lambda\delta} = 0$ при кожних $x \in \mathsf{R}$ та $\delta > 0$, означає можливість зробити значення функціоналу Φ як завгодно малим вибором допустимої стратегії α_λ з достатньо великим значенням λ, якщо тільки $\mathsf{E}_x f(\tau) < +\infty$.

Множину $V^* \subset V$ назвемо ε*-оптимальною стратегією* для задачі мінімізації функціоналу Φ на множині допустимих стратегій V, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така допустима стратегія $\alpha^* \in V^*$, що $\Phi(\alpha^*) < \inf\limits_{\alpha\in V}\Phi(\alpha) + \varepsilon$.

Наведені вище міркування дозволяють сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай функція* $(f(t))_{t\ge0}$ *зі значенням* $f(0)=0$ *неперервна та невід'ємна. Нехай існує скінченне* $\mathsf{E}_x f(\tau)$, *де* τ *– момент першого досягнення процесом* $(w(t))_{t\ge0}$ *початку координат. Тоді для задачі мінімізації функціоналу* Φ, *що задається рівністю (1), існує* ε*-оптимальна стратегія. Елементи цієї стратегії утворюють однопараметричну множину і задаються рівністю* $\alpha_\lambda(t) = -\sqrt{2\lambda}\,\mathrm{sign}(w(t))$.

На завершення хочу з великою вдячністю згадати мого вчителя професора Портенка М. І., чия увага та поради значною мірою посприяли покращенню цієї роботи.

Література

1. Osypchuk M.M. An extremum problem for some class of Brownian motions with drift / M.M.Osypchuk, M.I.Portenko // Journal of Mathematical Sciences. – V.179, Issue 1. – P. 164-173.
2. Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов / Р.Ш.Липцер, А.Н.Ширяев. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы / Е.Б.Дынкин. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
4. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальние уравнения. Введение в теорию и приложения; пер. с англ. / Б.Оксендаль. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 408 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 24.09.2012 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором,
чл.-кореспондентом НАН України ***Портенком М.І.*** *(м. Київ),*
д.ф.-м.н., доцентом ***Никифорчиним О.Р.***

A PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL WIENER PROCESS

M. M. Osypchuk
Precarpathian National University named by Vasil Stefanic;
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;
ph. +380 (342) 59-60-47; e-mail: myosyp@ukr.net

We consider the problem of minimizing the time of the first visit to origin of coordinates by Wiener process with drift.

Key words: *Wiener process, stochastic exponent, optimal strategy*