УДК 517.98

ГІПЕРЦИКЛІЧНІ ОПЕРАТОРИ НА ВІЛЬНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

А. В. Загороднюк[1], М. В. Марцінків[1], З. Г. Можировська[2]
[1]*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;*
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел.+380 (342) 59-60-50;
e-mail: andriyzag@yahoo.com
[2]*Львівська комерційна академія;*
79005, м. Львів, вул. Тугана-Барановського, 10;
e-mail: mariadubey@gmail.com, nzoriana@yandex.ru

У статті розглянуто умови циклічності та гіперциклічності операторів на вільних бананових просторах над деяким метричним простором.

Ключові слова: *гіперциклічні оператори, вільні банахові простори.*

Нехай X – не порожній метричний простір. Зафіксуємо у ньому деяку точку θ_X. Пару (X, θ_X) будемо називати *простором з відміченою точкою*. Нагадаємо, що відображення f між метричними просторами X та Y називається *ліпшицевим*, якщо існує стала L_f, така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L_f \rho_X(x_1, x_2),$$

де найменша з можливих сталих L_f називається *сталою Ліпшица*. Простір усіх ліпшицевих відображень з метричного простору X з відміченою точкою θ_X у простір Y з відміченою точкою θ_Y, які переводять θ_X у θ_Y позначається $Lip_0(X, Y)$. У випадку, коли Y є лінійним простором, будемо вважати, що $\theta_Y = 0$. Загальна теорія ліпшицевих відображень викладена у монографіях Н. Вівера [1], І. Беніаміні, Ж. Лінденштрауса [2]. У роботі В. Пестова [3] доведено, що для довільного метричного простору X з відміченою точкою θ_X існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму, банахів простір $B(X)$ та оператор вкладення $v : X \to B(X)$такі, що метричний простір X вкладається у банахів простір $B(X)$ і кожне відображення $f(x) \in Lip_0(X, E)$може бути продовжене до лінійного оператора $\tilde{f}(x): B(X) \to E$ для довільного нормованого простору E, причому $\|\tilde{f}\| = L_f$. Позначимо через $span\, X$ лінійну оболонку простору X в $B(X)$ а образ елементів $x \in X$ в $B(X)$ через

$v(x) = \underline{x}$. За побудовою, елементи вигляду $\sum_{k=1}^{n} a_k \underline{x}_k$ є щільними у просторі $B(X)$. Простір $B(X)$ називається *вільним банаховим простором над* X.

Відображення F з метричного простору X в себе називається *топологічно транзитивним*, якщо існує елемент $X \in X$, такий, що орбіта

$$Orb(F, x) = \left\{ F^n(x) = \underbrace{F^\circ \ldots {}^\circ F}_{n}(x) \middle| : n \in N \right\}$$

буде щільною в X. У випадку, коли X – метричний простір з відміченою точкою θ_X будемо вимагати, щоб орбіта $Orb(F, x)$ була щільною в $X \quad \theta_X$. Лінійний неперервний оператор T на просторі Фреше E в себе називається *гіперциклічним*, якщо T є топологічно транзитивним. Вектор $x \in E$ для якого $Orb(T, x)$є щільною в E називається гіперциклічним вектором оператора T. Лінійний неперервний оператор $T : E \to E$ називається *циклічним*, якщо для деякого вектора $x \in E$ (який називається циклічним вектором) лінійна оболонка $spanOrb(T, x)$є щільною в E.

Теорема 1. *Нехай* (X, θ_X) *– повний метричний простір з відміченою точкою* θ_X *і* $F : X \to X$ *є топологічно транзитивним відображенням, таким що* $F(\theta_X) = \theta_X$. *Тоді лінійний оператор* $\widetilde{F} : B(X) \to B(X)$ *буде циклічним.*

Доведення. Нехай $x \in X$ – елемент, для якого $Orb(F, x)$ є щільною в X. Тоді $Orb(\widetilde{F}, x)$ буде щільною в $v(X) = \underline{X}$. За означенням $B(X)$, простір $span\, X = span\, v(X)$ є щільним в $B(X)$, тому простір $spanOrb(F, \underline{x})$ буде щільним в $B(X)$.

Зауважимо, що з топологічної транзитивності F загалом не випливає гіперциклічність оператора $\widetilde{F}$.

Приклад 1. Нехай $X = S^1 \cup \theta$, де S^1 – одинична сфера в R^2 з природною метрикою, $\theta_X = (0,0) \in R^2$. Визначимо F-відображення повороту на ірраціональний кут α. Відомо, що F є топологічно транзитивним і для кожного $x \in S^1$, $Orb(F, x)$є щільною в S^1. Таким чином, $\widetilde{F}$ буде циклічним оператором і для кожного $x \in S^1$, а $\underline{x}$ буде його циклічним вектором. Проте, $\left\|\widetilde{F}\right\| = L_F = 1$, а норма гіперциклічного оператора повинна бути строго більшою за 1.

Для встановлення умов гіперциклічності оператора на вільному банаховому просторі використаємо так званий критерій гіперциклічності (див.[4]).

Нехай E – сепарабельний простір Фреше. Оператор T задовольняє критерій гіперциклічності, якщо існують щільні підмножини $X_0 \subset E$, $Y_0 \subset E$ і відображення $S_n : Y_0 \to E, n \in N$ де N – множина натуральних чисел такі, що:

1. $T^n x \to 0$, при $n \to \infty$ для всіх $x \in X_0$;
2. $S_n y \to 0$, при $n \to \infty$ для всіх $y \in Y_0$;
3. $\left(T^{n_0} S_n\right) y \to y$, при $n \to \infty$ для всіх $y \in Y$.

Термін "критерій гіперциклічності" є загально прийнятим, проте сформульована умова не є критерієм. Кожен оператор, що задовольняє критерію гіперциклічності, є гіперциклічним, і всі "класичні" гіперциклічні оператори задовольняють критерію гіперциклічності. Довший час було відкритим питання: чи кожен гіперциклічний оператор на сепарабельному просторі Фреше задовольняє критерію гіперциклічності? У 2008 році ця проблема була розв'язана з негативною відповіддю Де Ла Роза та Рідом [5]. Відомо (див. [4]), що оператор T задовольняє критерію гіперциклічності тоді і тільки тоді, коли $T \oplus T$ є гіперциклічним на $E \oplus E$

Теорема 2. Нехай (X, θ_X) – сепарабельний повний метричний простір і відображення $F : X \to X$ є ліпшицевим відображенням з ліпшицевою константою рівною 1 і $F(\theta_X) = \theta_X$.

Припустимо, що X можна подати у вигляді зліченного об'єднання непорожніх попарно різних множин $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, таких, що $A_0 = \theta_X$, $F(A_n) = A_{n-1}$ для довільного $n > 0$ і звуження F на A_n ін'єктивне для кожного $n > 1$. Тоді оператор $T = \lambda F$ буде гіперциклічним оператором на $B(X)$ для довільного числа $\lambda, |\lambda| > 1$.

Доведення. Визначимо $Y_0 = X_0 = span(X\ \theta_X)$ – щільна підмножина в $B(X)$, для кожного $z = \sum a_i \underline{x}_i \in X_0$,

$$S(z) = \sum a_i \frac{F^{-1}}{\lambda}(\underline{x}_i), \qquad S_n(z) = S^n(z).$$

Оскільки $span(X \setminus \theta_X)$ складається із формальних скінченних сум, то для кожного $z \in span(X\ \theta_X)$, $T^m(z) = 0$, починаючи з деякого номера m. Тому умова 1 виконується.

Оскільки $|\lambda| > 1$, то

$$S^n(z) \le \frac{1}{|\lambda|^n} \|z\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Отже, умова 2 виконується. Крім того, $\left(T^n \circ S^n\right) = Id$ – тотожній оператор, тому умова 3 також виконується.

Приклад 2. Нехай $X = N \cup 0$ з дискретною метрикою і відміченою точкою $\theta_X = 0$. Відомо [1], що $B(X) = l_1(N)$. Визначимо $F : N \to N$, $F(n) = n - 1$ для $n \neq 0$ і $F(0) = 0$. Нехай $A_n = \{n\}$, тоді F задовольняє умовам теореми. Зауважимо, що

$$\lambda F(a_0, ..., a_n, ...) = \lambda(a_0, ..., a_n, ...) \ –$$

зважений зсув вліво. Гіперциклічність такого оператора добре відома, якщо $|\lambda| > 1$ [6].

Теорема 3. *Нехай E – сепарабельний простір Фреше. Якщо $T : E \to E$ – гіперциклічний оператор, який задовольняє критерій гіперциклічності, то $\widetilde{T} : B(E) \to B(E)$ — також гіперциклічний оператор і задовольняє критерію гіперциклічності.*

Доведення. Оскільки Т задовольняє критерію гіперциклічності, то існують простори X_0, Y_0 та послідовність відображень S_n як у критерії. Оскільки X_0, Y_0 щільні в E, то $span\, X_0$ і $span\, Y_0$ будуть щільними множинами в $B(E)$. Визначимо $\widetilde{S}_n(z) = \sum a_k S_n(x_k)$ для кожного $z = \sum a_k \underline{x}_n \in spanY_0$. Легко бачити, що для $\widetilde{T}$, $\widetilde{S}_n$, $span\, X_0$, $span\, Y_0$ виконуються умови критерію, тому задовольняє критерію гіперциклічності.

Література

1. Weaver N. Lipschitz Algebras / N. Weaver. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1999. – 323 p.
2. Benyamini Y. Geometric Nonlinear Functional Analysis, I / Y.Beniamini, J.Lindenstrauss. – Providence, Rhode Island: AMS Colloquium Publications, 2000. – V.48.
3. Pestov V. Free Banach spaces and representation of topo- logical groups / V.Pestov // Functional Anal. Appl. – 1986. – V.20. – P. 70-72.
4. B`es J. Hereditarily hypercyclic operators / J.B´es, A.Peris // J. Func. Anal. – 1999. – V.167, №1. – P. 94-112.
5. De La Rosa M. A hypercyclic operator whose direct sum is not hypercyclic / M. De La Rosa, C.J.Read // J. Operator Theory. – 2009. – V.62, №2. – P. 369-380.
6. Carando D. Hypercyclic convolution operators on Fr´echet spaces of analytic functions / D.Carando, V.Dimant, S.Muro // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – 336, №2. – P. 1324-1340.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.10.2012 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., доцентом **Никифорчиним О.Р.**,*
*д.ф.-м.н., професором **Лопушанським О.В** (м. Львів)*

HYPERCYCLIC OPERATORS ON FREE BANACH SPACES

A. V. Zagorodnyuk[1], M. V. Martsinkiv[1], Z. G. Mozhyrovska[2]
[1]Vasyl Stefanyc Precarpathian National University;
76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
ph. +380 (3422) 59-60-50; e-mail: andriyzag@yahoo.com
[2]Lviv Commercial Academy;
79005, Lviv, Tuhan-Baranovsky str., 10;
e-mail: mariadubey@gmail.com, nzoriana@yandex.ru

We considersome condition of cyclicity and hypercyclicity of operators on free Banach space over a metric spaces.

Key words: *hypercyclic operator, free Banach space.*