

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ ТІЛА

І. В. Цідило¹, К. Г. Левчук²

¹Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: tm@nung.edu.ua

²Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»; 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37;
e-mail: k.levchuk@kpi.ua

Показано, що плоскопаралельний рух твердих тіл має досить цікаві особливості та властивості. Автори розглянули деякі нестандартні методи дослідження динаміки такого руху, які дозволяють замінити розв'язування диференціальних рівнянь руху рівнянням головного моменту відносно центрів коливань миттєвих центрів швидкостей й пришвидшень.

Ключові слова: плоскопаралельний рух, миттєвий центр швидкостей, миттєвий центр пришвидшень, центр коливань, сила тертя, кочення без проковзування, динамічна реакція.

Вступ. Зазвичай, при дослідженні динаміки плоскопаралельного руху твердого тіла складають три диференціальні рівняння. Ці рівняння доповнюють кінематичними залежностями, що пов'язують між собою швидкості й пришвидшення точок з кутовими швидкістю й пришвидшенням тіла [1, 2]. І, як наслідок, для визначення умов руху, статичних та динамічних реакцій доводиться розв'язувати систему зв'язаних диференціальних рівнянь. А у випадку дослідження руху механічної системи з колесами, що здійснюють плоскопаралельний рух, постійно виникає питання про характер сили тертя зчеплення колеса з дорогою – рушійною вона є, чи гальмівною [5].

Але, якщо скористатися цікавими властивостями та деякими особливостями такого руху, можна значно спростити розв'язування і дослідження динаміки тіла, а також за характером зовнішніх сил однозначно визначити напрям сил тертя зчеплення.

Центр коливань миттєвого центра швидкостей. Будь-який рух твердого тіла можна повністю охарактеризувати двома динамічними величинами: головним вектором кількістю руху тіла $\vec{q} = m\vec{v}_C$ і кінетичним моментом $\vec{K}_C = J_C\vec{\omega}$, зведеними до центра мас C . У випадку плоскопаралельного руху зазначені два вектора взаємноперпендикулярні (рис.1,а).

Відомо, що система перпендикулярних векторів зводиться до рівнодійної кількості руху \vec{q}^* [1], що дорівнює головному вектору кількості руху тіла \vec{q} , але прикладеної у новому центрі зведення P^* , що знаходиться на перпендикулярі до \vec{q} , отриманого його поворотом на кут 90° в бік, протилежний повороту кінетичного моменту \vec{K}_C , на відстані

$$CP^* = \frac{K_C}{q} = \frac{J_C \omega}{mv_C} = \frac{mi_C^2 \cdot \omega}{m \cdot \omega \cdot PC} = \frac{i_C^2}{PC}, \quad (1)$$

де P – миттєвий центр швидкостей (МЦШ), що лежить на перпендикулярі до швидкостей (рис.1,б).

Таким чином, точки P , C і P^* лежать на одній прямій, а P^* – точка прикладання головного вектора кількості руху є центром коливань.

Отриманою властивістю зручно досліджувати рух тіл, у яких легко визначається положення МЦШ. Продемонструємо поняттям центра коливань МЦШ на прикладах.

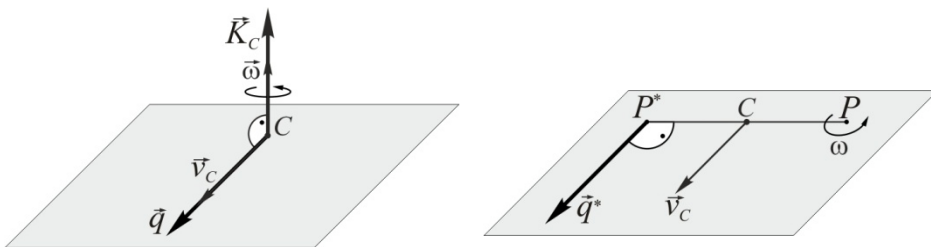


Рис.1. Центр коливань миттєвого центра швидкостей

Приклад 1. Колеса (диск, обруч, кільце) котяться по шорсткій похилій площині. З'ясуємо умови кочення коліс без проковзування (рис.2).

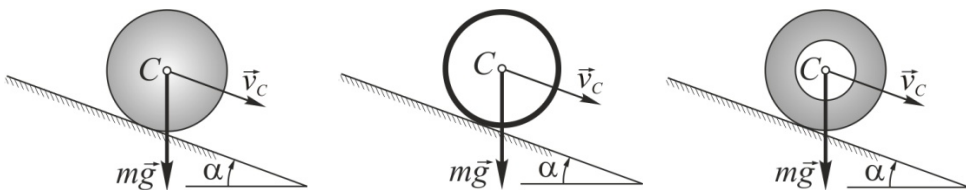


Рис.2. Колесо котиться по шорсткій площині

Оскільки колеса не проковзують, то МЦШ P знаходиться у кожний момент часу в точці контакту колеса з нерухомою площиною (рис.3). З урахуванням моменту інерції коліс отримаємо їхні радіуси інерції:

- 1) для диска – $J_{1C} = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow i_{1C}^2 = \frac{1}{2}mR^2$;
- 2) для обруча – $J_{2C} = mR^2 \Rightarrow i_{2C}^2 = R^2$;
- 3) для кільця – $J_{3C} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2) \Rightarrow i_{3C}^2 = \frac{1}{2}(R^2 + r^2)$.

Отже, згідно (1) центр коливань колеса знаходиться вище центра мас C на відстані (рис.3):

- 1) для диска – $CP_1^* = \frac{1}{2}R$;
- 2) для обруча – $CP_2^* = R$;
- 3) для кільця – $CP_3^* = \frac{R^2 + r^2}{2R}$,

і сила тертя зчеплення з площиною спрямована протилежно руху – гальмівна.

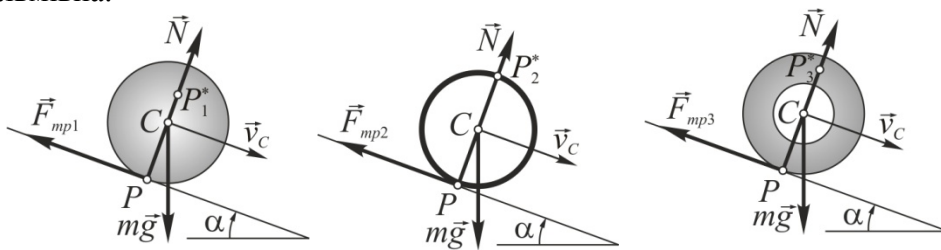


Рис.3. Центр коливань колеса, що котиться шорсткою площиною

З рівняння моментів відносно центра коливань МЦШ визначимо силу тертя зчеплення з площиною

- 1) для диска –

$$\sum_{i=1}^n M_{P_1^*} = mg \sin \alpha \cdot \frac{1}{2}R - F_{mp1} \cdot \frac{3}{2}R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{mp1} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha ;$$

- 2) для обруча –

$$\sum_{i=1}^n M_{P_2^*} = mg \sin \alpha \cdot R - F_{mp2} \cdot 2R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{mp2} = \frac{1}{2}mg \sin \alpha ;$$

- 3) для кільця –

$$\sum_{i=1}^n M_{P_3^*} = mg \sin \alpha \cdot \frac{R^2 + r^2}{2R} - F_{mp3} \cdot \left(R + \frac{R^2 + r^2}{2R} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_{mp3} = \frac{R^2 + r^2}{3R^2 + r^2} mg \sin \alpha .$$

Щоб колесо котилось без проковзування, сила тертя повинна задовольняти умові

$$F_{mp} \leq fN, \quad N = mg \cos \alpha, \quad (2)$$

або для диска $f \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$; для обруча $f \geq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$; для кільця $f \geq \frac{R^2 + r^2}{3R^2 + r^2} \operatorname{tg} \alpha$. Тобто при коченні вздовж однієї площини диск ковзає найменше.

Приклад 2. Маса обода однорідного колеса m_0 , а кожної з 12 спиць m . Колесо котиться вздовж гладенької поверхні, нахиленої під кутом α до горизонту, розмотуючи, намотану на нього мотузку. Визначити натяг нитки та пришвидшення центра C колеса (рис.4,а).

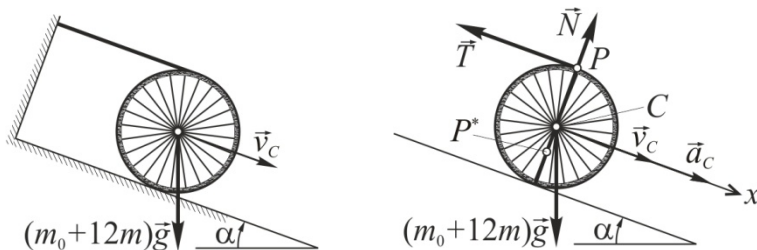


Рис.4. Колесо котиться по гладенькій поверхні, розмотуючи нитку

Оскільки вільний кінець мотузки залишається нерухомим, то МЦШ P у кожний момент часу буде знаходитись у місці сходження мотузки з колеса (рис. 4, б). З урахуванням моменту інерції колеса, отримуємо його радіус інерції

$$J_C = m_0 R^2 + 12 \cdot \frac{1}{12} m (2R)^2 = (m_0 + 4m) R^2 \Rightarrow i_C^2 = \frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} R^2.$$

Тоді, згідно з (1) центр коливань колеса P^* знаходиться нижче центра мас C на відстані (рис.4,б):

$$CP^* = \frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} R.$$

З рівняння моментів відносно центра коливань МЦШ визначимо натяг мотузки

$$\sum_{i=1}^n M_{P^*} = -(m_0 + 12m) g \sin \alpha \cdot \frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} R + T \cdot \left(\frac{m_0 + 4m}{m_0 + 12m} + 1 \right) R = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_0 + 4m}{2(m_0 + 8m)} (m_0 + 12m) g \sin \alpha;$$

Оскільки центр мас колеса C рухається прямолінійно, то вектор пришвидшення \vec{a}_C паралельний поверхні. З теореми про рух центра мас в проекції на вісь Cx , паралельну поверхні (рис. 4, б)

$$(m_0 + 12m) a_C = (m_0 + 12m) g \sin \alpha - T,$$

отримуємо пришвидшення центра колеса

$$a_C = g \sin \alpha - \frac{m_0 + 4m}{2(m_0 + 8m)} g \sin \alpha = \frac{m_0 + 12m}{2(m_0 + 8m)} g \sin \alpha.$$

Приклад 3. Два однорідних циліндричних вала масами m_1 і m_2 скочуються по двох площинах, нахилених під кутами α і β до горизонту відповідно. Вали з'єднано нерозтяжною невагомою мотузкою, кінці котрої намотані на вали і закріплені на них. Визначити натяг мотузки та її пришвидшення (рис.5) [3].

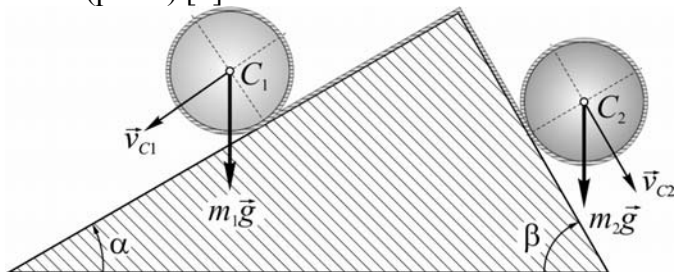


Рис.5. Вали, з'єднані ниткою

Якщо припустити, що мотузка спускається по лівій площині, тоді вона піднімається по правій. Зупинимо її, скориставшись принципом Д'Аламбера, а саме, прикладемо у місцях сходу мотузки з валів сили інерції $\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}$ і $\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{a}$, спрямованих протилежно руху мотузки (рис. 6). Тепер мотузка нерухома, тому МЦШ P_1 і P_2 у кожний момент часу будуть знаходитись у місцях сходу мотузки з валів (рис.6).

З урахуванням моментів інерції валів отримаємо їхні радіуси інерції

$$J_{C_1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2; \quad J_{C_2} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \quad \Rightarrow \quad i_{C_1}^2 = \frac{1}{2} R_1^2; \quad i_{C_2}^2 = \frac{1}{2} R_2^2.$$

Тоді, згідно з (1) центри коливань валів P_1^* і P_2^* знаходяться вище центрів мас C_1 і C_2 на відстанях (рис. 6):

$$C_1 P_1^* = \frac{1}{2} R_1; \quad C_2 P_2^* = \frac{1}{2} R_2.$$

З рівнянь моментів відносно центрів коливань МЦШ визначимо натяг мотузки і її пришвидшення

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n M_{P_1^*} = -m_1 g \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} R_1 + (T + m_1 a) \cdot \frac{3}{2} R_1 = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{P_2^*} = m_2 g \sin \beta \cdot \frac{1}{2} R_2 + (-T + m_2 a) \cdot \frac{3}{2} R_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{3(m_1 + m_2)} g (\sin \beta + \sin \alpha); \quad a = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha}{3(m_1 + m_2)} g.$$

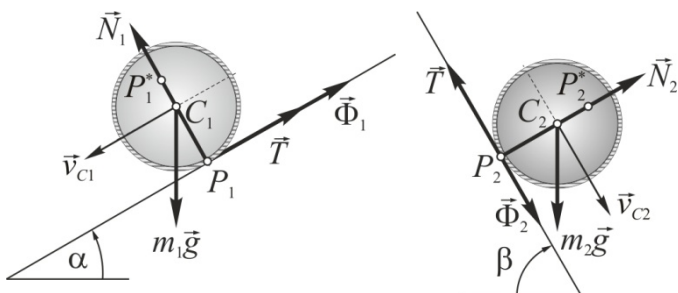


Рис.6. Вали з МЦШ і центрами коливань МЦШ

Центр коливань миттєвого центра пришвидшень. Для здійснення плоскопаралельного руху твердого тіла необхідно, щоб головний вектор зовнішніх сил $\vec{F} = m\vec{a}_C$ лежав у площині руху, а головний момент $\vec{M}_C = J_C\vec{\varepsilon}$ був спрямований перпендикулярно до неї (рис.7).

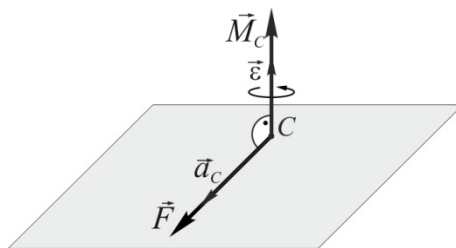


Рис.7. Головний вектор і головний момент у випадку плоскопаралельного руху твердого тіла

Відомо, що система перпендикулярних векторів зводиться до рівнодійної \vec{F}^* [1], що дорівнює головному вектору зовнішніх сил \vec{F} , але прикладеної у новому центрі зведення O (рис. 8, а), що знаходиться на перпендикулярі до \vec{F} , отриманого його поворотом на кут 90° в бік, протилежний повороту головного моменту \vec{M}_C , на відстані

$$CO = \frac{M_C}{F} = \frac{J_C\varepsilon}{ma_C} = \frac{mi_C^2 \cdot \varepsilon}{m \cdot CQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{i_C^2 \cdot \varepsilon}{CQ\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}, \quad (3)$$

де Q – миттєвий центр пришвидшень (МЦП) (рис. 8, б), що лежить на однаковому куті α до пришвидшень і задовольняє умову

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}. \quad (4)$$

Оскільки вектор сили є ковзним вектором, перенесемо точку O прикладання рівнодійної \vec{F}^* на пряму, що проходить через центр мас C і МЦП Q , в точку Q^* . Тоді з урахуванням (3) і (4) відстань

$$CQ^* = \frac{CO}{\sin \alpha} = \frac{i_C^2 \cdot \varepsilon}{CQ \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{i_C^2}{CQ}. \quad (5)$$

Таким чином, точки Q , C і Q^* лежать на одній прямій, а Q^* – точка прикладання рівнодійної \vec{F}^* є центром коливань.



Рис.8. Центр коливань миттєвого центра пришвидшень

Отриманою властивістю зручно досліджувати рух тіл, у яких легко визначається положення МЦП, особливо при миттєвій зміні умов руху, визначенні динамічних реакцій, або, коли швидкості всіх точок дорівнюють нулю й миттєво-поступальному русі. Продемонструємо поняттям центра коливань МЦП на прикладах.

Приклад 4. Два однорідних стержні зварені між собою під прямим кутом. Довжина вертикального стержня вдвічі коротша від довжини горизонтального. Кінець горизонтального стержня A поклали на гладеньку опору і відпустили без початкової швидкості. Визначити тиск кінця A на опору в початковий момент, якщо загальна маса стержнів m (рис.9,а).

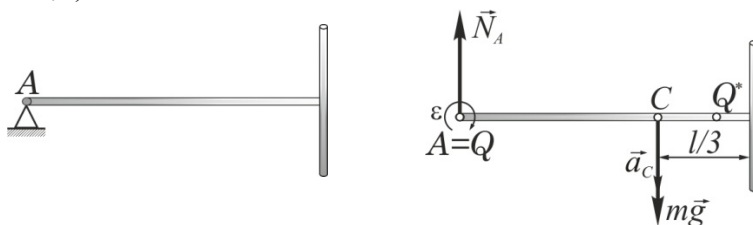


Рис.9. Зварені стержні, відпущені зі стану рівноваги

Спочатку визначимо положення центра мас C конструкції з двох стержнів (рис.9,б)

$$AC = \frac{\frac{2}{3}m \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{3}m \cdot l}{m} = \frac{2}{3}l.$$

Далі знайдемо положення МЦП Q . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції $\omega^* = 0$. Тоді МЦП Q лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець A конструкції покладено на

гладеньку опору, тобто може рухатись вздовж горизонталі, тому пришвидшення \vec{a}_A спрямоване горизонтально. Зовнішні сили: вага конструкції $m\vec{g}$ і реакція \vec{N}_A вертикальні, тому головний вектор спрямований вздовж вертикалі. Отже, за теоремою про центр мас системи пришвидшення \vec{a}_C теж спрямоване по вертикалі. Таким чином, МЦП Q у даний момент часу збігається з точкою A (рис.9,б).

З урахуванням моменту інерції обох стержнів отримуємо радіус інерції конструкції

$$J_C = \frac{2}{3}ml^2 \cdot \left[\frac{1}{12} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{3}ml^2 \cdot \left[\frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \frac{17}{144}ml^2; \Rightarrow$$

$$i_C^2 = \frac{17}{144}l^2.$$

Тоді, згідно (5) центр коливань конструкції Q^* знаходяться праворуч центра мас C на відстані (рис.9,б):

$$CQ^* = \frac{17}{144}l^2 \cdot \frac{3}{2l} = \frac{17}{96}l.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо реакцію гладенької опори

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cdot \frac{17}{96}l - N_A \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{96} \right)l = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = \frac{17}{65}mg.$$

За третім законом Ньютона тиск конструкції на опору дорівнює її реакції, тільки спрямований у протилежний бік.

Приклад 5. Однорідний стержень AB масою m підвішено до стелі на двох однакових нерозтяжних вертикальних шнурах, прикріплених до кінців стержня. Визначити натяг шнура в точці A та пришвидшення центра мас C в момент обриву іншого шнура в точці B (рис.10,а) [3].

Знайдемо положення МЦП Q . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції $\omega^* = 0$. Тоді МЦП Q лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець A стержня підвішено за допомогою нерозтяжного шнура, тобто може рухатись по колу і точка A має лише обертальне пришвидшення $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{об}$, спрямоване перпендикулярно до шнура – горизонтально. Зовнішні сили: вага стержня $m\vec{g}$ і натяг шнура \vec{T}_A вертикальні, тому головний вектор спрямований вздовж вертикалі. Отже, за теоремою про центр мас системи пришвидшення \vec{a}_C теж спрямоване по вертикалі. Таким чином, МЦП Q у даний момент часу збігається з точкою A (рис.10,б).

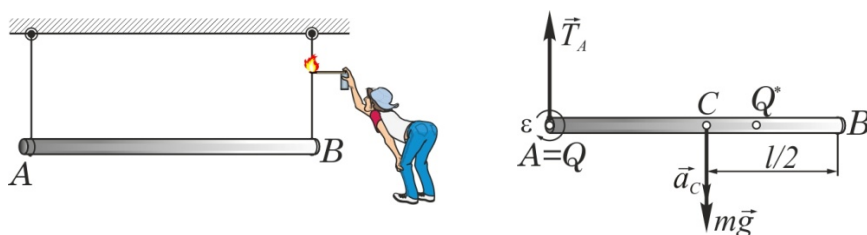


Рис.10. Стержень, підвішений двома вертикальними шнурами

З урахуванням моменту інерції стержня отримаємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{1}{12}ml^2; \quad \Rightarrow \quad i_C^2 = \frac{1}{12}l^2.$$

Тоді, згідно (5) центр коливань стержня Q^* знаходяться праворуч від центра мас C на відстані (рис.10,б):

$$CQ^* = \frac{1}{12}l^2 \cdot \frac{2}{l} = \frac{1}{6}l.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо натяг шнура

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cdot \frac{1}{6}l - T_A \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)l = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = \frac{1}{4}mg.$$

За теоремою про центр мас у проекції на вертикаль знаходимо пришвидшення центра мас C

$$ma_C = mg - T_A \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{3}{4}mg.$$

Приклад 6. Однорідний стержень AB масою m підвішено до стелі на двох нерозтяжних шнурах, однаковими з ним довжинами. Шнури прикріплено до кінців стержня. Визначити натяг шнура в точці A та пришвидшення центра мас C в момент обриву іншого шнура в точці B (рис.11,а) [3].

Знайдемо положення МЦП Q . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції $\omega^* = 0$. Тоді МЦП Q лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець A стержня підвішено за допомогою нерозтяжного шнура, тобто може рухатись по колу і точка A має лише обертальне пришвидшення $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{oA}$, спрямоване перпендикулярно до шнура (рис.11,б). Напрямок головного вектора наперед невідомий, тому скористаємось аксіомою про паралелограм сил: розкладемо силу ваги стержня $\vec{G} = m\vec{g}$ на дві складові \vec{G}_1 ($G_1 = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$), паралельну натягу

шнура \vec{T}_A , і \vec{G}_2 ($G_2 = mg \frac{1}{2}$), перпендикулярну до шнура. Згідно теореми про центр мас точка C буде мати дві складові пришвидшення

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C1} + \vec{a}_{C2}.$$

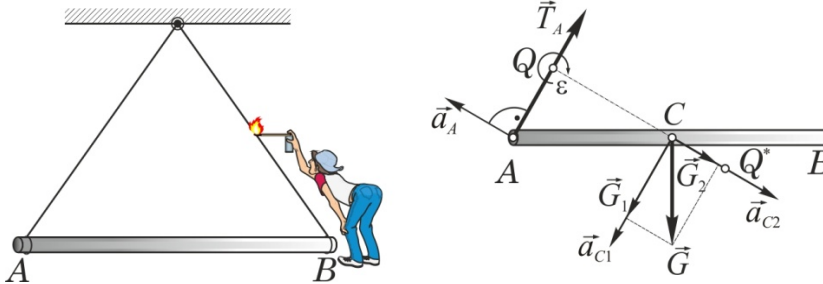


Рис.11. Стержень, підвішений двома шнурами, що мають однакові з ним довжини

Знайдемо положення МЦП Q . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість конструкції $\omega^* = 0$. Тоді МЦП Q лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець A стержня підвішено за допомогою нерозтяжного шнура, тобто може рухатись по колу і точка A має лише обертальне пришвидшення $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{об}$, спрямоване перпендикулярно до шнура (рис.11,б). Напрямок головного вектора наперед невідомий, тому скористаємось аксіомою про паралелограм сил: розкладемо силу ваги стержня $\vec{G} = m\vec{g}$ на дві складові \vec{G}_1 ($G_1 = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$), паралельну натягу шнура \vec{T}_A , і \vec{G}_2 ($G_2 = mg \frac{1}{2}$), перпендикулярну до шнура. Згідно теореми про центр мас точка C буде мати дві складові пришвидшення

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C1} + \vec{a}_{C2}.$$

Пришвидшення \vec{a}_{C1} викликане головним вектором зовнішніх сил $\vec{F}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T}_A$

$$a_{C1} = \frac{G_1 - T_A}{m} \tag{6}$$

і спрямоване паралельно шнуру (рис. 11, б). Таким чином, МЦП Q у даний момент часу знаходиться на шнуру у точці перетину перпендикулярів до \vec{a}_A і \vec{a}_{C1} (рис.11,б).

З урахуванням моменту інерції стержня отримаємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{1}{12}ml^2; \Rightarrow i_C^2 = \frac{1}{12}l^2.$$

Тоді згідно (5) центр коливань стержня Q^* знаходяться нижче центра мас C на прямій CQ на відстані (рис. 11, б):

$$CQ^* = \frac{1}{12}l^2 \cdot \frac{4}{l\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}l.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо натяг шнура

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}l - T_A \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)l = 0 \Rightarrow T_A = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg. \quad (7)$$

Пришвидшення \vec{a}_{C2} викликане силою \vec{G}_2

$$a_{C2} = \frac{G_2}{m} = \frac{1}{2}g \quad (8)$$

і спрямоване перпендикулярно до \vec{a}_{C1} (рис. 11, б). З урахуванням виразів (6)-(8) знаходимо пришвидшення центра мас C

$$a_{C1} = \frac{G_1 - T_A}{m} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{13} \right)g = \frac{9\sqrt{3}}{26}g \Rightarrow$$

$$a_C = \frac{g}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{13} \right)^2} = \frac{\sqrt{103}}{13}g$$

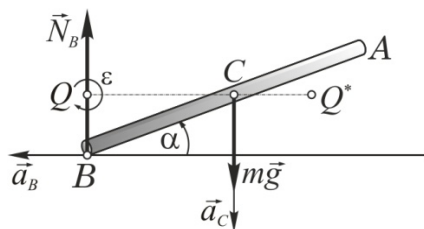
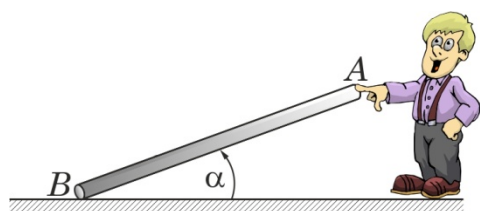


Рис.12. Стержень, нахилений до гладенької підлоги

Приклад 7. Однорідний стержень AB маси m нахилений під кутом α до горизонту. Кінець стержня B спирається на гладеньку горизонтальну підлогу, а кінець A відпускають без початкової швидкості. Визначити тиск стержня на підлогу і пришвидшення центра мас в цей момент (рис.12,а) [4].

Знайдемо положення МЦП Q . За умовою миттєві швидкості точок дорівнюють нулю, і, як наслідок, миттєва кутова швидкість стержня $\omega^* = 0$. Тоді МЦП Q лежить на перетині перпендикулярів, проведених до пришвидшень точок. Кінець B стержня покладено на гладеньку підлогу, тобто може рухатись вздовж горизонталі, тому пришвидшення \vec{a}_B спрямоване горизонтально. Зовнішні сили: вага конструкції $m\vec{g}$ і реак-

ція підлоги \vec{N}_B вертикальні, тому головний вектор спрямований вздовж вертикалі. Отже, за теоремою про центр мас пришвидшення \vec{a}_C теж спрямоване по вертикалі. Таким чином, МЦП Q у даний момент часу лежить на перетині перпендикулярів до цих пришвидшень, тобто вище точки B (рис.12,б).

З урахуванням моменту інерції стержня отримаємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{1}{12} ml^2; \Rightarrow i_C^2 = \frac{1}{12} l^2.$$

Тоді, згідно (5) центр коливань стержня Q^* знаходиться на горизонталі, що проходить через МЦП Q і центр мас C , праворуч від останнього на відстані (рис.12,б):

$$CQ^* = \frac{1}{12} l^2 \cdot \frac{2}{l \cos \alpha} = \frac{l}{6 \cos \alpha}.$$

З рівнянь моментів відносно центра коливань МЦП визначимо реакцію гладенької підлоги

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cdot \frac{l}{6 \cos \alpha} - N_B \cdot \left(\frac{l}{6 \cos \alpha} + \frac{l \cos \alpha}{2} \right) = 0 \Rightarrow N_B = \frac{mg}{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

За третім законом Ньютона тиск стержня на підлогу дорівнює її реакції, тільки спрямований у протилежний бік.

За теоремою про центр мас у проекції на вертикаль знаходимо пришвидшення центра мас C (рис.12,б)

$$ma_C = mg - N_B \Rightarrow a_C = \frac{3g}{4 + tg^2 \alpha}.$$

Приклад 8. Однорідне тоненьке кільце з внутрішнім радіусом, втричі меншим за зовнішній, поставлений під кутом β на шорстку горизонтальну підлогу. Визначити найменше значення коефіцієнт тертя ковзання між кільцем і підлогою f , при якому кільце почне падати без проковзування (рис.13,а).

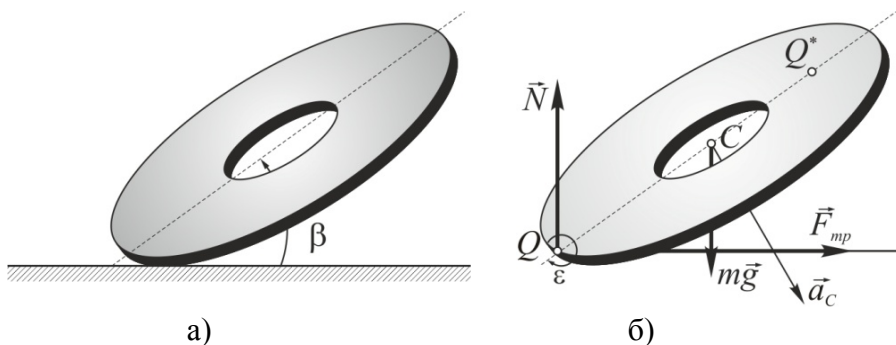


Рис.13. Кільце на шорсткій підлозі

Оскільки кільце на шорсткій підлозі не проковзує, то МЦП Q знаходиться у заданий момент часу в точці контакту кільця з підлогою (рис.13,б). З урахуванням моменту інерції кільця отримуємо його радіус інерції

$$J_C = \frac{m}{2} \left[R^2 + \left(\frac{R}{3} \right)^2 \right] = \frac{5}{9} mR^2 \quad \Rightarrow \quad i_{1C}^2 = \frac{5}{9} R^2.$$

Отже, згідно (5) центр коливань кільця знаходиться вище центра мас C на відстані (рис.13,б)

$$CQ^* = \frac{5}{9} R$$

і сила тертя зчеплення з підлогою спрямована в бік руху – рушійна.

Складемо рівняння моментів відносно центра коливань МЦП (рис.13, б)

$$\sum_{i=1}^n M_{Q^*} = mg \cos \beta \cdot \frac{5}{9} R + F_{mp} \sin \beta \cdot \left(1 + \frac{5}{9} \right) R - N \cos \beta \cdot \left(1 + \frac{5}{9} \right) R = 0$$

і рівняння проекції головного вектора зовнішніх сил на діаметр кільця, на якому розміщено центр мас C і МЦП Q

$$\sum_{i=1}^n F_{CQ} = -mg \sin \beta + F_{mp} \cos \beta + N \sin \beta = 0,$$

з яких визначимо силу тертя зчеплення з підлогою і нормальну складову реакції шорсткої підлоги

$$F_{mp} = \frac{9}{28} mg \sin 2\beta; \quad N = \frac{5 + 9 \sin^2 \beta}{14} mg.$$

Щоб кільце почало падати без проковзування сила тертя зчеплення повинна задовольняти умову (2)

$$F_{mp} \leq fN, \quad \frac{9}{28} \sin 2\beta \leq f \frac{5 + 9 \sin^2 \beta}{14}, \quad \text{або} \quad f \geq \frac{9 \sin 2\beta}{2(5 + 9 \sin^2 \beta)}.$$

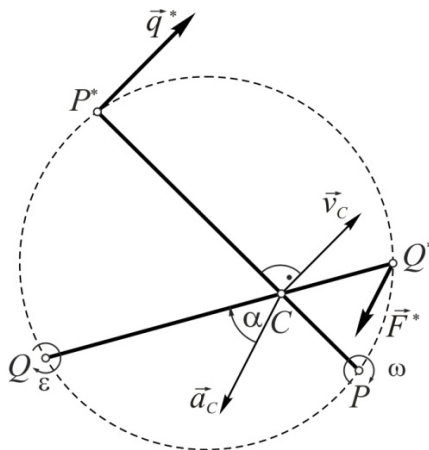


Рис.14. Миттєві центри швидкостей, пришвидшеньта їхні центри коливань

Висновок. Відповідно до виразів (1) і (5) відрізки CP і CP^* та CQ і CQ^* є хордами одного кола, тобто МЦШ P , МЦП Q та їхні центри коливань P^* і Q^* у кожний момент часу розташовані на одному колі (рис.14).

Зазначимо також, що в центрі коливань МЦШ прикладена рівнодійна кількості руху тіла, а в МЦП – рівнодійна сил, прикладених до нього.

Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник / М.А.Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика: Учебное пособие. Изд.9. // М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон. – СПб.: Лань, 2010. – 640 с.
3. Мещерський І.В. Задачі по теоретической механике: Учеб. Пособие / І.В.Мещерський. – СПб.: Лань, 2002. – 448 с.
4. Березова О.А. Теоретична механіка / О.А.Березова, Г.Ю.Друшляк, Р.В.Солодовников. – К.: ІЗМН, 1998. – 408 с.
5. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики: В 2 т. / Н.А.Кильчевский. – М.: Наука, 1972-1977. – Т.1.– 456 с.; Т.2.– 462 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 24.12.2012 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,
д.ф.-м.н., професором **Нікітіною Н.В.** (м. Київ)*

SOME FEATURES PLANAR MOTION OF THE BODY

I. Tsidylo¹, K. Levchuk²

¹*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15; e-mail: tm@nung.edu.ua*

²*National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute"; 03056, Kyiv, Prospect Peremogy, 37;
e-mail: k.levchuk@kpi.ua*

This article shows that the planar motion of solids has some interesting features and properties. The authors reviewed some unconventional methods of investigation of the dynamics of the movement, allowing substitute for solving differential equations of motion equation Highlights relatively centres oscillations instant centres of speed and acceleration.

Key words: *planar motion, instantaneous centre of velocity, instantaneous centre express, the centre of oscillation friction, rolling without slipping, the dynamic response.*