УДК 534.1

ВПЛИВ РУХУ РІДИНИ ТА КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ КОЛОНИ ДЛЯ БУРІННЯ СВЕРДЛОВИН НА ЇЇ НЕЛІНІЙНІ ЗГИННІ КОЛИВАННЯ

П. Я. Пукач*, І. В. Кузьо

Національний університет "Львівська політехніка";
79013, м. Львів, л. Бандери, 12; e-mail: ppukach@i.ua

Досліджено вплив руху рідини, яка промиває різальний інструмент колони для буріння свердловин, на її згинні коливання. Враховано кутову швидкість обертання та нелінійно пружні властивості матеріалу колони. В основу досліджень покладено поєднання методів Бубнова-Гальоркіна та Ван-дер-Поля. У сукупності наведене дозволило отримати співвідношення, які описують основні параметри динамічного процесу як у нерезонансному, так і у резонансному випадках.

Ключові слова: *нелінійно пружні властивості, математична модель, метод Бубнова-Гальоркіна, метод Ван дер Поля, резонанс.*

Актуальність теми та стан проблеми. Рідини, які транспортуються трубопроводами чи використовуються у технологічних процесах (наприклад, у колонах для буріння свердловин), зумовлюють у них зміни кількісних, а у деяких випадках і якісних характеристик динамічного процесу. Йдеться, насамперед, про амплітудно-частотну характеристику та стійкість динамічного процесу. Питання впливу сталої швидкості руху одно- та двовимірних середовищ на основні характеристики та стійкість його нелінійних коливань розглядались, наприклад, у роботах [1-4]. У випадку колон для буріння свердловин задача ускладнюється, адже колона здійснює ще й обертальний рух. Мова йде про такі установки, у яких використовується комбінований привод бура – роторний та гідравлічний. У них рідина під певним тиском рухається із значною швидкістю. Крім того, бур, взаємодіючи із породою, постійно збуджує коливання колони. З огляду на усе вказане випливає актуальність дослідження динаміки бурової колони із урахуванням руху рідини та кутової швидкості її обертання.

Метою роботи є розроблення методики, яка б дозволяла оцінити вплив всього комплексу чинників (зовнішніх та внутрішніх) на динамічний процес бурової колони; отримання зручних для інженерних досліджень розрахункових залежностей, які визначають вплив основних фізико – механічних, кінематичних, геометричних характеристик на основні параметри коливань.

Постановка задачі. Як математичну модель згинних коливань колони для буріння свердловин, яка обертається із кутовою швидкістю Ω

та вздовж якої рухається нестислива рідина зі сталою відносною лінійною швидкістю V, можна розглядати рівняння

$$L(u)=(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\rho_2 V\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}-\left(S(x)-\rho_2 V^2\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial S(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+$$

$$+EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}-(\rho_1+\rho_2)\Omega^2 u(x,t)=k_1 EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)^3-k_2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

У рівнянні (1) $u(x,t)$ – поперечне відхилення перерізу колони із координатою x в довільний момент часу t; ρ_1, ρ_2 – відповідно маса одиниці довжини колони та рідини, яка в ній рухається; $S(x)$ – осьове зусилля у довільному перерізі колони, яке створюють спеціальні вантажі для тиску на бур та сила ваги колони; EI – згинна жорсткість колони; k_1 та k_2 – коефіцієнти, які характеризують відповідно відхилення пружних властивостей матеріалу бурової колони від лінійного закону та силу опору. Тут сила опору приймається пропорційною відносній швидкості руху колони.

Із урахуванням того, що верхня частина колони поміщена у підшипник із нерухомою верхньою обоймою, а нижня отримує малі горизонтальні переміщення (зовнішні збурення), зумовлені взаємодією бура та породи, крайові умови можна записати у вигляді

$$u(0,t)=\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=0,$$

$$u(l,t)=k_3\sin(pt+\theta),\quad \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}=0. \tag{2}$$

У залежностях (2) k_3, p, θ – сталі (відповідно амплітуда, частота та початкова фаза зовнішнього періодичного збурення).

Зауваження.

1. Вважається, що гіроскопічний момент є малим, і його у рівняннях руху не враховуємо.
2. Для бурової колони справджується гіпотеза плоских перерізів.
3. Система відліку, по відношенні до котрої фіксується прогин, зв'язана із рухомою вертикальною площиною і співпадає з площиною максимальних прогинів.
4. Нижче вважатимемо, що коефіцієнти $k_i, i=1,2,3$ є малими у порівнянні зі згинною жорсткістю.
5. Питання обґрунтування коректності деяких слабко та сильно нелінійних математичних моделей нелінійних коливальних систем були об'єктом розгляду в роботах [5-7]. Зокрема, у цих працях розроблено методику дослідження класів коректності (існування та єдиності) розв'язків змішаних задач для квазілінійних та сильно нелінійних ево-

люційних рівнянь типу коливань балки (за наявності в системі дисипативних сил) в обмежених та необмежених областях.

Таким чином, задача про дослідження згинних коливань колони для буріння свердловин звелась до побудови та дослідження розв’язку крайової задачі (1), (2).

Методика розв’язування. Перш за все задачу із неоднорідними крайовими умовами зведемо до більш простої – задачі з однорідними крайовими умовами [8]. Для цього у (1) проведемо заміну змінних

$$u(x,t)=v(x,t)+k_3 w(x,t). \tag{3}$$

У представленні (3) функція $v(x,t)$ є розв’язком однорідної крайової задачі

$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho_2 V\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}-\left(S(x)-\rho_2 V^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-\frac{\partial S(x)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-(\rho_1+\rho_2)\Omega^2 v=$$

$$=k_1 EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^3-k_2\frac{\partial v}{\partial t}-L(w), \tag{4}$$

$$v(0,t)=\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2}=0,\ \ v(l,t)=\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2}=0, \tag{5}$$

а функція $w(x,t)$ є розв’язком диференціального рівняння $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0$

за крайових умов

$$w(0,t)=\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=0,\ \ w(l,t)=k_3\sin(pt+\theta),\ \ \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2}=0. \tag{6}$$

Враховуючи (6), розв’язок крайової задачі знаходиться досить легко. Безпосередньо переконуємося, що

$$w(x,t)=\frac{k_3}{l}x\sin(pt+\theta). \tag{7}$$

Приймаючи до уваги (4) та отриманий розв’язок (7), для знаходження функції $v(x,t)$ маємо неавтономне диференціальне рівняння

$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\rho_2 V\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}-\left(S(x)-\rho_2 V^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-\frac{\partial S(x)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-(\rho_1+\rho_2)\Omega^2 v=$$

$$=k_1 EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^3-k_2\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{k_3}{l}(\rho_1+\rho_2)\left(p^2+\Omega^2\right)x\sin(pt+\theta)-$$

$$-2V\rho_2\frac{k_3 p}{l}\cos(pt+\theta), \tag{8}$$

у якому функція $v(x,t)$ повинна задовольняти однорідні крайові умови (5). Легко переконатись, що система функцій $\{X_k(x)\}=\left\{\sin\dfrac{k\pi}{l}x\right\}$ задовольняє умови

$$X_k(0) = X_k(l) = X''_k(0) = X''_k(l) = 0 .$$

Це дозволяє відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна розв’язок крайової задачі (8), (5) зобразити у вигляді

$$v(x,t) = \sum_k X_k(x) T_k(t). \tag{9}$$

Для знаходження невідомих функцій $T_к(t)$ у зображенні (9) отримуємо систему звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2T_k(t)}{dt^2} + \frac{\left(S_0 + \frac{\rho_1 gl}{2} - \rho_2 V^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - (\rho_1+\rho_2)\Omega^2}{\rho_1+\rho_2} T_k(t) = \frac{2k_3}{(\rho_1+\rho_2)l} \times$$

$$= \left\{ \frac{k_1 EIl}{k_3}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 T_k^3(t) - \frac{k_2 l}{k_3}\frac{dT_k(t)}{dt} + \frac{(\rho_1+\rho_2)l}{k\pi}\left(p^2+\Omega^2\right)\sin(pt+\theta) \right\}. \tag{10}$$

У наведеному вище співвідношенні враховано, що осьове зусилля $S(x)$ змінюється відповідно до лінійного закону

$$S(x) = S_0 + \rho_1 g(l - x),$$

де S_0 – стала складова осьового зусилля, яке створюють спеціальні вантажі розміщені у нижній частині колони для тиску бура на породу, а $\rho_1 g(l-x)$ – зусилля у перерізі колони викликане безпосередньо її вагою.

Диференціальне рівняння (10) дозволяє безпосередньо визначити власну частоту лінійних коливань колони ω (без урахування нелінійно пружних властивостей матеріалу колони)

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(S_0 + \frac{\rho_1 gl}{2} - \rho_2 V^2\right)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - (\rho_1+\rho_2)\Omega^2}{\rho_1+\rho_2}}. \tag{11}$$

Зауважимо, що у формулі (11) та нижче з метою більш компактного подання результатів індекс "k", який вказує на форму “динамічної рівноваги”, опущений.

Не менш важливою проблемою експлуатації свердловин для буріння є дослідження впливу періодичних сил на нелінійні коливання колони та їх стійкість. Йдеться насамперед про уникнення резонансних явищ. Вказані задачі (проблеми) можна вирішити, в основному, на базі побудови розв’язку збуреного рівняння (10).

Як наголошувалось вище, коефіцієнти $k_i, i = 1,2,3$ є малими величинами у порівнянні зі згинною жорсткістю та іншими коефіцієнтами правої частини рівняння (1). Це дозволяє для знаходження розв’язку рівняння (10) використовувати загальні підходи до побудови асимптотичних розв’язків звичайних квазілінійних рівнянь. Нижче використаємо відносно не складний, зручний для інженерних досліджень метод Ван-дер-Поля. Відповідно до нього розв'язок незбуреного ($k_3 \to 0$) рівняння, яке відповідає рівнянню (10), тобто $T(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$ можна вважати за розв'язок збуреного (з тією лише різницею, що параметри a та φ будуть функціями часу). Для знаходження цих параметрів a та φ отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \frac{-k_3}{(\rho_1+\rho_2)l}\left\{\frac{k_1 EIl}{k_3}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^3\cos^3\phi + \frac{k_2 l}{k_3}a\omega\sin\phi + \frac{(\rho_1+\rho_2)l}{k\pi}\left(p^2+\Omega^2\right)\sin(pt+\theta)\right\}\sin\phi$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{-k_3}{(\rho_1+\rho_2)l}\left\{\frac{k_1 EIl}{k_3}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^3\cos^3\phi + \frac{k_2 l}{k_3}a\omega\sin\phi + \frac{(\rho_1+\rho_2)l}{k\pi}\left(p^2+\Omega^2\right)\sin(pt+\theta)\right\}\sin\phi, \tag{12}$$

де $\phi = \omega t + \varphi$

Для диференціальних рівнянь (12) будемо розглядати два випадки: *нерезонансний* $r\omega \neq sp$ та *резонансний* $r\omega \approx sp$.

У *нерезонансному* випадку амплітуда та фаза динамічного процесу у першому наближенні не залежать від гармонічного збурення. Це дозволяє, не зменшуючи точності наближення, усереднити рівняння (12) по фазах власних ϕ та вимушених $\vartheta = pt + \theta$ коливань. Таким чином, у нерезонансному випадку динамічний процес описується залежністю

$$\frac{da}{dt} = -\frac{k_2\omega}{(\rho_1+\rho_2)\pi}a;$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{-\bar{k}_1 EI}{(\rho_1+\rho_2)}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^2 + \ldots$$

Що стосується випадку *головного резонансу*, то, ввівши у (12) різницю фаз власних та вимушених коливань $\gamma = \phi - \vartheta$, тобто $\phi = \gamma + \vartheta$, $\vartheta = pt + \theta$, отримаємо

$$\frac{da}{dt} = \frac{-k_3}{(\rho_1+\rho_2)l}\left\{\frac{k_1 EIl}{k_3}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^3\cos^3(\gamma+\vartheta) + \frac{k_2 l}{k_3}a\omega\sin(\gamma+\vartheta) + \frac{(\rho_1+\rho_2)l}{k\pi}\left(p^2+\Omega^2\right)\sin\vartheta\right\}\times$$
$$\times\sin(\gamma+\vartheta)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega - p - \frac{k_3}{(\rho_1+\rho_2)al}\left\{\frac{k_1 EIl}{k_3}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^3\cos^3(\gamma+\vartheta) + \frac{k_2 l}{k_3}a\omega\sin(\gamma+\vartheta) + \frac{(\rho_1+\rho_2)l}{k\pi}\left(p^2+\Omega^2\right)\sin\vartheta\right\}\times$$
$$\times\cos(\gamma+\vartheta). \tag{13}$$

Той факт, що резонансний процес значною мірою залежить від різниці фаз власних та вимушених коливань, дозволяє дещо спростити залежності (13). Дійсно, усереднення системи диференціальних рівнянь (13) по фазі вимушених коливань не змінить точності наближення. Це дозволяє вказану систему замінити наступною

$$\frac{da}{dt} = -\frac{k_2\omega}{(\rho_1+\rho_2)\pi}a + \frac{k_3}{k\pi}\left(p^2+\Omega^2\right)\cos\gamma ;$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega - p - \frac{k_1 EI}{(\rho_1+\rho_2)}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^2 - \frac{k_3}{k\pi a}\left(p^2+\Omega^2\right)\sin\gamma .$$

Останні рівняння визначають резонансну криву

$$-\frac{k_2\omega}{(\rho_1+\rho_2)\pi}a + \frac{k_3}{k\pi}\left(p^2+\Omega^2\right)\cos\gamma = 0 ,$$

$$\omega - p - \frac{k_1 EI}{(\rho_1+\rho_2)}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^8 a^2 - \frac{k_3}{k\pi a}\left(p^2+\Omega^2\right)\sin\gamma = 0 .$$

Висновки. Із отриманих результатів випливає:

а) для більших значень кутової швидкості обертання колони та швидкості руху рідини частота її власних коливань є меншою;

б) за сталої кутової швидкості обертання бурової колони Ω_1 зрив коливань проходить при швидкості поздовжнього руху рідини, яка рівна

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{S_0 + \frac{\rho_1 gl}{2} + EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - (\rho_1+\rho_2)\Omega_1^2\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2}{\rho_2}} ;$$

в) за сталої швидкості руху рідини V_1 вздовж труби бурової колони зрив коливань проходить при кутовій швидкості її обертання

$$\Omega_{кр} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)\sqrt{\frac{S_0 + \frac{\rho_1 gl}{2} - \rho_2 V_1^2 + EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}{\rho_1+\rho_2}} .$$

Отримані вище результати необхідно враховувати при технологічних процесах буріння, адже із зривом коливань тісно пов'язане таке негативне явище, як зрив стійкості (нестійкість) процесу. Одночасно отримані залежності вказують на шляхи уникнення зриву коливань: якщо технологічний процес дозволяє експлуатацію колони з кутовою швидкістю, близькою до $\Omega_{кр}$, то рідину слід подавати із лінійною швидкістю, відмінною (меншою) за V_1, і навпаки, якщо швидкість руху рідини у трубі рівна $V_{кр}$, то кутова швидкість обертання колони повинна бути меншою за Ω_1.

Література

1. Доценко П.Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода / П.Д.Доценко // Прикладная механика. – 1971. – Вып.3. – С. 85-91.
2. Улитин Г.М. Ударные процессы в буровых установках / Г.М.Улитин,

Ю.В.Петтик // Вибрации в технике и технологиях. – 2000. – №1(13). – С. 70-74.
3. Сокіл М.Б. Хвильова теорія руху в дослідженні коливань гнучких елементів привода та транспортування з урахуванням їх поздовжнього руху / М.Б.Сокіл, О.І.Хитряк // Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ, 2011. – Вип.1. – С. 102-105.
4. Chen L.Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings / L.Q.Chen // Appl. Mech. Rev. – 2005.– Vol.58.2. – P. 91-116.
5. Пукач П.Я. Змішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області / П.Я.Пукач // Прикладні проблеми мех. та матем. – 2006. – Вип.4. – С. 59-69.
6. Пукач П.Я. Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області / П.Я.Пукач // Математичні студії. – 2007. – 27, №2. – С. 139-148.
7. Пукач П.Я. Мішана задача в необмеженій області для рівняння типу коливань балки зі збуреним лінійним оператором / П.Я.Пукач // Математичний вісник Наук. тов. ім. Шевченка. – 2007. – № 4. – С. 149-165.
8. Митропольский Ю.О. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.О.Митропольский, Б.И.Мосеенков. – К.: Вища школа, 1976. – 596 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.11.2012 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Вековиком В.І.***,
д.ф.-м.н., професором ***Сулимом Г.Г.*** *(м. Львів)*

INFLUENCING OF MOTION OF LIQUID AND ANGULAR SPEED OF ROTATION OF COLUMN FOR BORING DRILLING HOLES ON ITS NONLINEAR BEND VIBRATIONS

P. Y. Pukach, I. V. Kusye
National University "Lviv politehnica";
79013, Lvov, Bandera str., 12; e-mail: ppukach@i.ua

Influence of motion of liquid that washes the toolpiece of well-drilling column on her bend vibrations are investigate. The angulator of appeal and nonlinear resilient properties of material of column are taken into account. Combination of methods of Bubnov-Galerkin and Van der Pol is fixed in basis of researches. In totality the resulted allowed to get correlations that describe the basic parameters of dynamic process both in unresonant and in resonant cases.

Key words: *nonlinear resilient properties, mathematical model, Bubnov-Galerkin method, Van der Pol method, resonance.*