

**ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ВИГОТОВЛЕНОЇ
З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ
ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ
ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ**

М. М. Николишин, М. Й. Ростун

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б;
e-mail: mrostun@iapmm.lviv.ua*

Проблема граничної рівноваги пружно-пластичного функціонального градієнтного матеріалу (ФГМ) циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною довільної конфігурації зведена до сумісного розв'язання системи інтегральних рівнянь числовим методом механічної квадратури.

***Ключові слова:** ФГМ, циліндрична раковина, зовнішня тріщина, зони пластичності, цілочисельні вирівнювання.*

У сучасній техніці часто елементи конструкцій працюють в таких умовах, що одна їх поверхня знаходиться в агресивному середовищі з певними фізико-хімічними параметрами, а друга – в середовищі з іншими. У таких випадках доцільно використовувати функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), тобто композитні матеріали мікроскопічної неоднорідності, в яких механічні властивості змінюються неперервно за товщиною тіла. Найчастіше ці матеріали виготовляються з кераміки та металу. Почали розробляти ФГМ для космічних кораблів, як матеріали, що витримують надвисокі температури. У даний час такі матеріали набувають більш широкого застосування, що зумовлює необхідність проводити не лише температурний аналіз, а й досліджувати їх напружено-деформований стан, міцність тощо. Перші публікації про нерівномірний розподіл температури та зумовлених нею напружень в тілі з ФГМ з'явилися в Японії [1]. Результати досліджень розподілу напружень у циліндричній та сферичній оболонках, а також у порожнистому циліндрі з ФГМ, зумовлених температурою або силовим навантаженням, приведені в [2-5]. Нижче досліджується вплив ФГМ на граничну рівновагу циліндричної оболонки, ослабленої поздовжньою поверхневою тріщиною.

Постановка задачі. Розглянемо виготовлену з ФГМ безмежну кругову циліндричну оболонку, ослаблену поздовжньою або поперечною тріщиною довільної конфігурації завдовжки $2l$. Глибину тріщини задано двома гладкими кривими $d_1(x)$ і $d_2(x)$ (рис.1). У циліндричній системі координат $\alpha\beta\gamma$ на випадок поздовжньої тріщини $x \equiv \alpha$, а на випадок поперечної – $x \equiv \beta$. Початок координат вибрано в центрі

тріщини. Вважатимемо, що оболонка і береги тріщини завантажені лише симетричними відносно площини тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують. Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що біля тріщини по всій глибині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, відповідно до аналога δ_c – моделі [6], зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розрив пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхонь оболонки, тобто відповідно в області $x \in]-x_0; x_0[$, $\gamma \in [-h + d_2; h] \cup [d_2; h]$ ($x_0 = l/R$, $2h$ – товщина оболонки, R – радіус її серединної поверхні), діють постійні напруження $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$, де σ_B – границя міцності, а σ_T – поріг текучості ФГМ. У пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях $\gamma \in [-h; h]$, $|x| \in [x_0; x_0 + x_p]$ ($\alpha_p = l_p/R$, l_p – довжина пластичної зони), діють невідомі нормальні зусилля N та згинний момент M , які протидіють розкриттю тріщини та задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок [7].

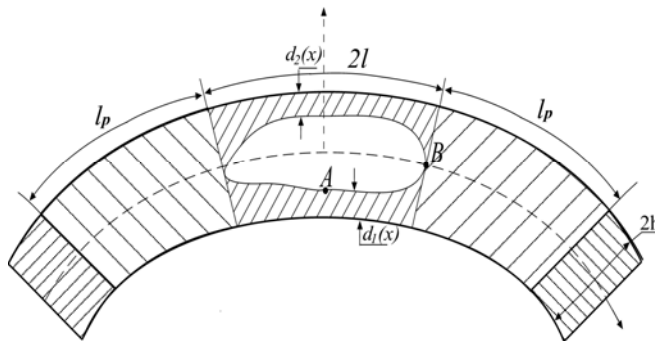


Рис.1

Таким чином, у рамках прийнятого аналога δ_c – моделі пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу оболонки з внутрішньою тріщиною заданої довжини $2l$ зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивною наскрізною тріщиною невідомої довжини $2l_1 = 2(l + l_p)$, на берегах якої виконуються умови:

$$N_2(\alpha) = \begin{cases} N_2^{(1)} + N^l - N_2^0, & |x| < x_0; \\ N - N_2^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1; \end{cases} \quad M_2(\alpha) = \begin{cases} M_2^{(1)} + M^l - M_2^0, & |x| < x_0; \\ M - M_2^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1. \end{cases} \quad (1)$$

Тут $x_1 = l_1/R$, $N_2^{(1)}$, $M_2^{(1)}$ – зусилля та момент, прикладені до бере-

гів реальної тріщини; N_2^0, M_2^0 – ці ж параметри на лінії тріщини в суцільній оболонці, зумовлені зовнішнім навантаженням; N^l, M^l – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під внутрішньою тріщиною та які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих зонах визначаються за формулами:

$$N^l = \int_{-h}^{d_1(x)} \sigma_0 d\gamma + \sigma^0 \int_{d_2(x)}^h \sigma_0 d\gamma, \quad M^l = \int_{-h}^{d_1(x)} \sigma_0 \gamma d\gamma + \int_{d_2(x)}^h \sigma_0 \gamma d\gamma, \quad (2)$$

Основні співвідношення неоднорідних за товщиною оболонок з тріщиною. Оболонка виготовлена з ФГМ є неоднорідною за товщиною. Тобто модуль пружності та коефіцієнт Пуассона є функціями нормальної до серединної поверхні координати γ

$$E = E(\gamma), \quad \nu = \nu(\gamma). \quad (3)$$

Залежності (3) такі, що характеристики матеріалу оболонки задовольняють узагальнений закон Гука і справедлива гіпотеза недеформованих нормальних елементів [8]. Система ключових рівнянь для такої оболонки з поздовжньою наскрізною тріщиною завдовжки $2l_1$ має вигляд [6]

$$L_{ij} u_i = q_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Тут u_i – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки;

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = (C_{11} - C_{66} + \frac{K_{11}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ L_{13} &= L_{31} = C_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{K_{11}}{R} \left(\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right), \\ L_{22} &= \left[C_{11} + \frac{1}{R} (2K_{11} - \frac{1}{R} D_{11}) \right] \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left[C_{66} + \frac{1}{R} (2K_{66} + \frac{4}{R} D_{66}) \right] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\ L_{23} &= L_{32} = \left(C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{R} \left[K_{11} + \frac{D_{12} + 4D_{66}}{R} \right] \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \\ &\quad \frac{1}{R} \left(K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \\ L_{33} &= C_{11} - \frac{2}{R} \left(K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \frac{1}{R^2} D_{11} \nabla^2 \nabla^2, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad q_1 = R \frac{\partial}{\partial \alpha} (C_{12} \varepsilon_{22}^0 + K_{12} \kappa_{22}^0), \\ q_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta} (RC_{12} + K_{11}) \varepsilon_{22}^0 + (RK_{11} + D_{11}) \kappa_{22}^0, \end{aligned}$$

$$q_3 = R(C_{11}\varepsilon_{22}^0 + K_{11}\kappa_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(K_{12}\varepsilon_{22}^0 + D_{12}\kappa_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(K_{11}\varepsilon_{22}^0 + \kappa_{22}^0 D_{11}),$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{R}[u_2(\alpha)]\delta(\beta), \quad \kappa_{22}^0 = -\frac{1}{R}[\theta_2(\alpha)]\delta(\beta) \quad (5)$$

$$C_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma)d\gamma, \quad K_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma)\gamma d\gamma, \quad D_{ij} = \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma)\gamma^2 d\gamma,$$

$$B_{11}(\gamma) = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad B_{12}(\gamma) = \nu B_{11}, \quad B_{66}(\gamma) = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$[u_2(\alpha)]$, $[\theta_2(\alpha)]$ – стрибки переміщень та кута повороту.

Враховуючи співвідношення (5), а також той факт, що функції переміщень $u_i(\alpha, \beta)$ ($i=1,2,3$) при переході через тріщину мають скачок, а функції зусиль та моментів неперервні, запишемо формули для визначення збурених нормального зусилля N_2 та згинного моменту M_2 в довільній точці оболонки

$$N_2 = \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left(C_{11} + \frac{K_{11}}{R}\right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \left[C_{11} + \frac{1}{R} \left(K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right] u_3 - \frac{1}{R} \left(C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \varepsilon_{22}^0,$$

$$M_2 = \frac{K_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left(K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \left[K_{11} + \frac{1}{R} \left(D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right] u_3 - \frac{1}{R^2} D_{11} \varepsilon_{22}^0. \quad (6)$$

На випадок поперечної тріщини в системі (4) потрібно поміняти L_{ij} та q_j , співвідношення (5) приймають вигляд

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{R}[u_1(\beta)]\delta(\alpha), \quad \kappa_{11}^0 = -\frac{1}{R}[\theta_1(\beta)]\delta(\alpha), \quad (5')$$

а замість виразів для N_2 та M_2 (6) записуємо аналогічні вирази для N_1 , M_1

Інтегральні рівняння задачі. Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь (4) операторним методом [9] і враховуючи (5), для визначення переміщень u_i отримуємо формули

$$u_i = L_i \varphi_2 + P_i \psi_2, \quad i=1,2,3 \quad (7)$$

де L_i , P_i – диференціальні оператори не вищого порядку [10], а функції $\varphi_2(\alpha, \beta)$, $\psi_2(\alpha, \beta)$ задовольняють рівняння

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^0; \quad D\psi_2 = \kappa_{22}^0, \quad (8)$$

$$D = D^0 + \frac{4R}{d_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[(C_{11}K_{66} - C_{66}K_{11}) * \nabla^2 \nabla^2 + RC_{66}(C_{11} - K_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right];$$

$$d_1 = C_{11}D_{11} - K_{11}^2; \quad D^0 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2.$$

На основі побудованого з допомогою інтегрального перетворення Фур'є фундаментального розв'язку рівнянь (8) [6] та операції згортки запишемо інтегральне представлення ключових функцій

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos(n\beta) \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} [u_2(\xi)] [\Phi_n^0(\xi - \alpha) - \Phi_n^*(\xi - \alpha)] d\xi;$$

$$\psi_2(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos(n\beta) \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} [\theta_2(\xi)] [\Phi_n^0(\xi - \alpha) + \Phi_n^*(\xi - \alpha)] d\xi. \quad (9)$$

Тут $\Phi_n^*(z) = \Phi_n(z) - \Phi_n^0(z)$,

$$\Phi_n^0(z) = \frac{1}{96n!} e^{-n|z|} (n^3 |z|^3 + 6n^2 z^2 + 15n|z| + 15), \quad \Phi_0^0(z) = |z|^7 / (2 \cdot 7!), \quad n \geq 1,$$

$\Phi_n(z)$ – фундаментальний розв'язок рівняння

$$\left(\frac{d^8}{d\alpha^8} - (4n^2 - A) \frac{d^6}{d\alpha^6} + (6n^2 - 2An^2 + B) \frac{d^4}{d\alpha^4} - n^4 (4n^2 - A) \frac{d^2}{d\alpha^2} + n^8 \right) \Phi_n(z) = \delta^n(z),$$

$$A = 4R \frac{C_{11}K_{66} - C_{66}K_{11}}{D_{11}C_{11} - K_{11}^2}, \quad B = 4R^2 \frac{C_{66}(C_{11} - C_{66})}{D_{11}C_{11} - K_{11}^2},$$

$\delta(z)$ – функція Дірака; δ_{0n} – символ Кронеккера.

Підставляючи співвідношення (9) у формули (7), а результат у (6), отримаємо інтегральні представлення для визначення нормального зусилля та згинного моменту в довільній точці оболонки. Вимагаючи тепер виконання умов (1), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) K_{ij}^*(\xi - \alpha) d\xi = f_i(\alpha), \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

де $F_1(\xi) = \frac{1}{R} \frac{d}{d\xi} [u_2(\xi)]; \quad F_2(\xi) = a^2 \frac{d}{d\xi} [\theta_2(\xi)];$

$$K_{11}^*(z) = -\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} + K_{11}^0(z); \quad K_{22}^*(z) = a_2 \operatorname{cth} \frac{z}{2} + K_{22}^0(z);$$

$$K_{12}^*(z) = K_{21}^*(z) = K_{12}^0(z); \quad f_1 = \frac{4\pi N_2(\alpha)}{C_{11}(1 - \mu^2)}; \quad f_2 = \frac{4\pi M_2(\alpha)}{Ra^2 C_{11}(1 - \mu^2)};$$

$$a^2 = \frac{D_{11}}{R^2 C_{11}(1 - \mu^2)}; \quad a_2 = 3 - 2\eta - \eta^2; \quad \mu = \frac{C_{12}}{C_{11}}; \quad \eta = \frac{D_{12}}{D_{11}};$$

$K_{ij}^0(z)$ – неперервні функції для всіх значень аргументу $z \in [-2\alpha_1, 2\alpha_1]$.

Розв'язки системи сингулярних інтегральних рівнянь (10) повинні задовольняти умови

$$\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_m(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \quad (11)$$

які забезпечують неперервність переміщень u_2 та кута повороту θ_2 у вершинах тріщини і впливають із співвідношень (5).

Відповідно до моделі в системі (10) невідомі границі інтегрування α_1 , а також зусилля N та момент M , що відповідають реакції пластичних зон на пружний об'єм і задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок. Вважатимемо, що ФГМ оболонки притаманне зміцнення, тому вимагатимемо, щоб N та M у пластичній зоні були розподілені за лінійним законом:

$$N(\alpha) = S \left[(1 - m^*) (|\alpha| - \alpha_0) / (\alpha_1 - \alpha_0) + m^* \right]$$

$$M(\alpha) = H \left[(1 - m^*) (|\alpha| - \alpha_0) / (\alpha_1 - \alpha_0) + m^* \right] \quad \alpha_0 \leq |\alpha| \leq \alpha_1. \quad (12)$$

Тут $m^* = \sigma_B / \sigma_T$; S, H – невідомі сталі, які задовольняють прийняту умову пластичності, наприклад, умову Треска у вигляді пластичного шарніру [7].

$$[S / (2h\sigma_T^*)]^2 + |H| / (h^2\sigma_T^*) = 1, \quad [N(\alpha) / (2h\sigma_T^*)]^2 + |M(\alpha)| / (h^2\sigma_T^*) = 1, \quad (13)$$

$$\sigma^*(\alpha) = (\sigma_T - \sigma_B) (|\alpha| - \alpha_0) / (\alpha_1 - \alpha_0) + \sigma_B.$$

При цьому координата нейтрального волокна вздовж пластичної зони залишається сталою.

Умову пластичності (12), (13) використовуємо для визначення довжини пластичної зони, тобто пів довжини фіктивної тріщини α_1 . Для знаходження невідомих S та H застосуємо умову скінченності напружень біля вершин фіктивної тріщини. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності нормального зусилля та згінного моменту дорівнювали нулю, тобто

$$K_1(l_1) = K_3(l_1) = 0. \quad (14)$$

Таким чином, задачу про граничну рівновагу неоднорідної за товщиною пружно-пластичної циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною довільної конфігурації зведена до сумісного розв'язання системи інтегральних рівнянь (10), умов (11), умов пластичності (12), (13) та умов обмеженості напружень (14).

Систему (10) можна розв'язати одним з прямих числових методів, наприклад, методом механічних квадратур [11]. Але функції $f_i(\alpha)$ ($i = 1, 2$), які знаходяться у правих частинах інтегральних рівнянь, мають розрив в точці $|\alpha| = \alpha_0 = l_0 / R$. Порівняння аналітичного розв'язку канонічних сингулярних інтегральних рівнянь (регулярна частина ядер рівна нулеві) з розривом у правій частині з відповідним розв'язком, отриманим за допомогою методу механічних квадратур, показало, що використання цього методу безпосередньо до системи типу (10) приводить до значних похибок у розв'язку в околі точок $|\alpha| = \alpha_0$, де поведінка розв'язку є найбільш цікавою. Алгоритм числового розв'язування системи типу (10) сумісно з умовами (11)-(14) приведено в [6].

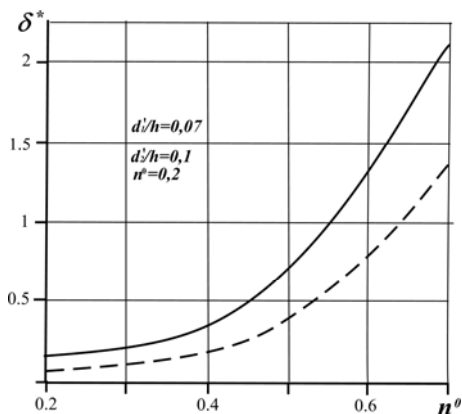


Рис. 2

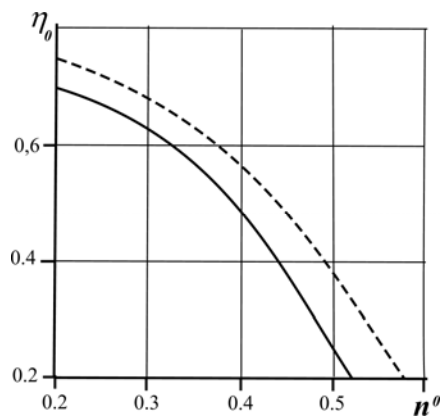


Рис. 3

Інтегруючи розв'язок системи (10), розкриття тріщини $\delta(\alpha, \gamma)$ у довільній її точці визначаємо за формулою

$$\delta(\alpha, \gamma) = [u_2(\alpha)] + \gamma[\theta_2(\alpha)], \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad |\gamma| \leq h.$$

Числові результати. Як приклад, розглянуто нескінченну циліндричну оболонку з ФГМ, зовнішня поверхня якої алюміній ($E_C = 70$ GPa), а внутрішня – германій ($E_B = 151$ GPa). За товщиною модуль пружності $E(\gamma)$ змінюється за законом [12]

$$E(\gamma) = (E_3 - E_B)V + E_B, \quad V = \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^m, \quad \xi = \gamma/2h, \quad (15)$$

а коефіцієнт Пуассона $\nu(\gamma) = const$.

Числовий аналіз проведено для оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності p ($N_2^0 = Rp$, $M_2^0 = 0$) за таких значень параметрів: $h/R = 0,01$; $\nu = 0,3$; $\sigma_B/\sigma_T = 1,5$; $l_0/R = 0,1$. Оболонка ослаблена внутрішньою поздовжньою параболічною тріщиною

$$d_1(\alpha) = \frac{1}{\tau_0^2}(h - d'_1 - d'_2)\alpha^2 - h + d'_1, \quad d_2(\alpha) = -\frac{1}{\tau_0^2}(h - d'_1 - d'_2)\alpha^2 + h - d'_2,$$

d'_1 та d'_2 віддалі від вершин параболи до внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонки.

На рис.2 показано залежність відносного розкриття фронту тріщини $\delta^* = \delta(0, \gamma)E_B / (l_0\sigma_T)$ від відносного навантаження $n^0 = Rp / (2h\sigma_T)$. Суцільна лінія відповідає точці А а штрихова – точці В.

На рис.3 показано залежність відносної довжини пластичної зони біля вершин тріщин $\tau_0 = l_0/l_1$ від навантаження n^0 . Тут криві відповідають тим самим параметрам, що і на рисунку 2. Штрихова лінія відповідає параметру $\sigma_B/\sigma_T = 1,5$ (матеріал зі зміцненням), а суцільна –

$\sigma_B / \sigma_T = 1$ (ідеально пружно-пластичний матеріал). Числовий аналіз показав, що “ m ” – показник у поданні (15) – мало впливає на розкриття фронту тріщини, коли $m > 3$.

Аналіз залежності розкриття тріщини від навантаження проводився і для випадку, коли невідомі зусилля $N(\alpha)$ та момент $M(\alpha)$ (реакція пластичної зони на пружний об’єм) задовольняють умову пластичності (13), але змінюються відповідно за квадратичним та кубічним законом, а координата нейтрального волокна ξ_n – за лінійним законом. Тобто

$$N(\alpha)/(2h\sigma_T) = n_0 + n_1|\alpha| + n_2\alpha^2, \quad \xi_n = k_m \left[-1 + (1 - p^*)(|\alpha| - \tau_0) \right] / (1 - \tau_0),$$

$$M(\alpha)/(h^2\sigma_T) = k_m \omega (m_0 + m_1|\alpha| + m_2\alpha^2 + m_3|\alpha|^3) \quad (16)$$

де

$$n_0 = v_1(1 + \omega\tau_0), \quad n_1 = v_2(1 + \omega\tau_0) - v_1\omega, \quad n_2 = -v_2\omega;$$

$$m_0 = -v_1\tau_0(2 + \omega\tau_0), \quad m_1 = 2v_1(1 + \omega\tau_0) - v_2\tau_0(2 + \omega\tau_0),$$

$$m_2 = -v_1\omega + 2v_2(1 + \omega\tau_0), \quad m_3 = n_2\omega - (1 - p^*)/(1 - \tau_0);$$

$$\tau_0 = \alpha_0/\alpha_1; \quad k_m = \text{sgn} H; \quad v_1 = (m^* - \tau_0)/(1 - \tau_0),$$

$$v_2 = (1 - m^*)/(1 - \tau_0); \quad m^* = \sigma_0/\sigma_T, \quad p^* = Rp/(2h\sigma_T).$$

Результати отримані за умов (16), (13) та (12), (13) відрізняються не більше 10 %.

Аналіз проведений для поперечної тріщини показав, що залежність параметрів граничної рівноваги δ^* та τ_0 від навантаження, геометричних та механічних параметрів якісно така ж як і для поздовжньої тріщини, а кількісно на 7-12 % менша.

Висновок. Якщо за критерій руйнування взяти критерій критичного розкриття фронту тріщини, то руйнування циліндричної оболонки з ФГМ, для розглянутих геометричних і механічних параметрів і навантаження, почнеться на продовженні тріщини в глибину, тобто в точці A . Закон розподілу модуля пружності $E(\gamma)$ за товщиною оболонки незначно впливає на її граничний стан на відміну від відношення його граничних значень E_3/\dot{A}_B . Умова пластичності мало впливає на розкриття тріщини та розміри пластичних зон.

Література

1. Koizumi M. The concept of FGM / M.Koizumi // Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials. – 1993. – **34**. – P. 3-10.
2. Obata Y. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material / Y.Obata, N.Noda // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471-87.

3. Kim K.S. Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material / K.S.Kim, N.A.Noda // *Acta Mech.* – 2002. – **156**. – P. 145-61.
4. Kim K.S. Green's function approach to the deflection of a FGM plate under transient thermal loading / K.S.Kim, N.A.Noda // *Arch Appl Mech.* – 2002. – **72**. – P. 127-37.
5. Shao Z.S. Analytical solutions of stresses in functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z.S.Shao, L.F.Fan, T.J.Wang // *Key Eng Mater.* – 2004. – P. 261-263; 651-6.
6. Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М.Кушнір, М.М.Николишин, В.А.Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
7. Прагер В. Проблемы теории пластичности / В.Прагер. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А.Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
9. Підстригач Я.С. Температурні напруження в оболонках / Я.С.Підстригач, С.Я.Ярема. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
10. Николишин М.М. Напряженное состояние многослойной цилиндрической оболочки с системой параллельных разрезов / М.М.Николишин // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1985. – Вып.22. – С. 85-89.
11. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И.Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304с.
12. Ruhi M. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials / M.Ruhi, A.Angoshtari, and R.Naghdabadi // *J.Thermal Stresses.* – 2005.– **28**. – P. 391-408.

Стаття надійшла до редакційної колегії 25.12.2012 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України **Кушніром Р.М.** (м. Львів),*

LIMIT EQUILIBRIUM OF CYLINDRICAL SHELL MADE FROM FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIAL WITH INTERNAL CRACKS ARBITRARY CONFIGURATION

M. M. Nykolyshyn, M. Yo. Rostun

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics

National Academy of Sciences of Ukraine;

79060, L'viv, Naukova str., 3-b; e-mail: mrostun@iapmm.lviv.ua

The problem on limit equilibrium elastic-plastic of functionally gradient material (FGM) made cylindrical shell internal crack arbitrary configuration reduced to a system of nonlinear singular integral equations, which is solved, the numerical method of mechanical quadratures.

Key words: *FGM, cylindrical shell, surface crack, plasticity zones, integral equations.*