УДК 539.3

ТРИВИМІРНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРУЖНОГО СУЦІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ

Ю. В. Токовий
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, Львів, вул. Наукова, 3-б;
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

Запропоновано методику побудови аналітичного розв'язку тривимірної задачі термопружності для циліндра скінченної довжини з вільною від зовнішніх силових навантажень поверхнею. З використанням термопружного потенціалу вихідну задачу зведено до відповідної задачі теорії пружності для циліндра під дією зовнішніх зусиль на торцях та бічній поверхні. Для побудови аналітичного розв'язку отриманої задачі використано метод перехресної суперпозиції.

Ключові слова: *пружний скінченний циліндр, температурні напруження, метод перехресної суперпозиції*

Вступ

Побудова точних аналітичних розв'язків тривимірних задач теорії пружності й термопружності для обмежених тіл з кутовими точками викликає ускладнення для застосування відомих на сьогодні методів механіки деформівного твердого тіла у зв'язку з потребою задоволення крайових умов на частинах поверхні, відокремлених кутовими точками (лініями). У випадку таких тіл канонічної форми (частини поверхні яких є паралельними до координатних поверхонь відповідної системи координат [1,2]) кутові точки (лінії) можна трактувати як такі, у яких крайові умови, задані для певних компонент тензора напружень чи вектора переміщень на одній частині поверхні, змінюються на крайові умови для, взагалі кажучи, інших компонент вказаних тензора та вектора на іншій частині поверхні, що вносить ускладнення математичного характеру. З фізичної точки зору кутові точки є точками зламу граничної поверхні, що призводить до локального збурення напруженого стану. До таких задач, зокрема, належить задача про пружну рівновагу циліндра скінченної довжини під дією зрівноважених силових чи температурних факторів навантаження [3,4].

У випадку осьової симетрії навантаження чи закріплення, загальні тривимірні задачі для кругових циліндрів можна звести до двовимірних осесиметричних задач, які виявляються значно простішими з точки зору побудови їх аналітичних розв'язків [1,3,5-8]. Натомість задачі про визначення пружної рівноваги скінченного циліндра у тривимірному випадку вивчено значно гірше, а відомі аналітичні методи дозволяють задовольняти крайові умови на певній частині поверхні циліндра наближено (див., наприклад, [9] для огляду досліджень).

У даній роботі розглянуто застосування методу перехресної суперпозиції [1,2,6,7] до побудови розв'язку тривимірної задачі термо-пружності для суцільного циліндра з твірною скінченної довжини з вільною від зовнішніх навантажень повною поверхнею. Напружений стан циліндра спричинено нерівномірним стаціонарним розподілом температурного поля. З використанням потенціалу Папковича-Гудьєра [6] задачу зведено до розв'язання задачі теорії пружності для циліндра тієї ж конфігурації за заданих на його торці та бічній поверхні зовнішніх силових навантажень. Для побудови розв'язку отриманої задачі застосовано метод перехресної суперпозиції із використанням розв'язків Дуголла для періодичного навантаженого по бічній поверхні довгого суцільного циліндра та безмежного шару. Отриманий у такий спосіб розв'язок задачі точно задовольняє вихідні рівняння, а також володіє достатньою кількістю ступенів вільності (довільних констант) для задоволення крайових умов на повній поверхні циліндра [9].

Постановка задачі термопружності для циліндра скінченної довжини та зведення її до відповідної задачі теорії пружності

Розглянемо задачу про пружну рівновагу суцільного циліндра скінченної довжини $0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ |z| \le h$, віднесеного до без розмірної циліндричної системи координат r, θ, z. Задача описується рівнянням Ляме у векторній формі [6]

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T = 0\,, \tag{1}$$

де

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \quad \mathrm{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\mathrm{div} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z},$$

$\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ – вектор пружних переміщень, λ та μ – сталі Ляме, $T = T(r, \theta, z)$ – заданий розподіл температурного поля, α – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Торці та бічна поверхня циліндра є вільними від силових навантажень:

$$\sigma_r(a,\theta,z) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(a,\theta,z) = 0, \quad \sigma_{rz}(a,\theta,z) = 0,$$

$$\sigma_z(r,\theta,\pm h) = 0, \quad \sigma_{\theta z}(r,\theta,\pm h) = 0, \quad \sigma_{rz}(r,\theta,\pm h) = 0. \tag{2}$$

Тут σ_i, σ_{ij} – компоненти тензора напружень ($i, j = \{r, \theta, z\}$), які пов'язані з переміщеннями наступними співвідношеннями:

$$\sigma_r = 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\Theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \quad \sigma_\theta = \frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) + \lambda\Theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T,$$

$$\sigma_z = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\Theta - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \quad \sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right),$$
$$\sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \quad \sigma_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right), \tag{3}$$

де $\Theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Розв'язок рівняння (1) будемо шукати у наступному вигляді:

$$\vec{u} = \vec{u}\,^* + \vec{u}^{(T)}, \tag{4}$$

де $\vec{u}\,^*$ – загальний «пружний» розв'язок однорідного (без урахування температурного члена) рівняння (1), $\vec{u}^{(T)}$ – частковий «термопружний» розв'язок неоднорідного рівняння (1). Останній нескладно знайти з використанням потенціалу Папковича-Гудьєра [6] у вигляді

$$\vec{u}^{(T)} = \operatorname{grad}\Phi, \tag{5}$$

який, у свою чергу, знайдемо по заданій температурі із рівняння

$$\nabla^2\Phi = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\alpha T.$$

У такий спосіб розв'язання задачі (1)-(3) зводиться до відшукання вектора переміщень $\vec{u}\,^*$ чи компонент відповідного тензора напружень $\sigma_i{}^*$, $\sigma_{ij}{}^*$, які, внаслідок (2), повинні задовольняти наступні крайові умови:

$$\sigma_r{}^*(a,\theta,z) = f(\theta,z), \quad \sigma_{r\theta}{}^*(a,\theta,z) = g(\theta,z),$$
$$\sigma_{rz}{}^*(a,\theta,z) = q(\theta,z), \quad \sigma_{rz}{}^*(r,\theta,\pm h) = k^\pm(r,\theta),$$
$$\sigma_z{}^*(r,\theta,\pm h) = l^\pm(r,\theta), \; \sigma_{\theta z}{}^*(r,\theta,\pm h) = t^\pm(r,\theta). \tag{6}$$

Тут

$$f(\theta,z) = -\sigma_r^{(T)}(a,\theta,z), \; g(\theta,z) = -\sigma_{r\theta}^{(T)}(a,\theta,z),$$
$$q(\theta,z) = -\sigma_{rz}^{(T)}(a,\theta,z), \quad l^\pm(r,\theta) = -\sigma_z^{(T)}(r,\theta,\pm h),$$
$$t^\pm(r,\theta) = \sigma_{\theta z}^{(T)}(r,\theta,\pm h), \quad k^\pm(r,\theta) = -\sigma_{rz}^{(T)}(r,\theta,\pm h),$$

а компоненти тензора напружень із верхнім індексом «(Т)» пов'язані з переміщенням (5) з урахуванням (3) та (4).

У такий спосіб вихідну задачу термопружності для циліндра із вільною від навантажень поверхнею, яка полягає у розв'язанні неоднорідного рівняння (1) з однорідними умовами (2) та врахуванням співвідношень (3), зведено до розв'язання задачі теорії пружності, яка полягає у розв'язанні однорідного рівняння (1) з неоднорідними крайовими умовами (6) та співвідношеннями (3). Побудову розв'язку загальної силової задачі з використанням методу перехресної суперпозиції наведено у роботі [9]. Нижче розглянемо застосування цього ж підходу до отриманої задачі з крайовими умовами (6).

Розв'язання задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини

Будемо шукати компоненти тензора напружень у вигляді

$$f = f_0 + f^I + f^{II},$$

де f позначає одну з компонент тензора напружень, складова з індексом «0» є елементарною частиною напружень, а верхніми індексами «I» та «II» позначено частини напружень, які дозволяють задовольнити крайові умови на бічній циліндричній поверхні та плоских торцях циліндра, відповідно.

Для визначення складових з верхнім індексом «I» напружень застосуємо подання Дуголла [10, с.900]:

$$u_r^I = r\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{\partial \omega^I}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi^I}{\partial \theta}, \quad u_\theta^I = \frac{1}{r}\frac{\partial \omega^I}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi^I}{\partial r},$$

$$u_z^I = -\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial \varphi^I}{\partial r} + 4(1-\nu)\varphi^I \right) + \frac{\partial \omega^I}{\partial z}$$

де

$$\nabla^2 \varphi^I(r,\theta,z) = 0, \quad \nabla^2 \omega^I(r,\theta,z) = 0, \quad \nabla^2 \psi^I(r,\theta,z) = 0, \tag{7}$$

а ν – коефіцієнт Пуассона. З використанням співвідношень (3) відповідні компоненти тензора напружень запишемо у вигляді:

$$\frac{\sigma_r^I}{\mu} = 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^I) - 2\nu\varphi^I \right) + 2\frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^I}{\partial \theta} \right),$$

$$\frac{\sigma_\theta^I}{2\mu} = (1-2\nu)\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega^I}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega^I}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^I}{\partial \theta} \right),$$

$$\frac{\sigma_z^I}{2\mu} = -2(2-\nu)\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} - r\frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial z^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\sigma_{rz}^I}{\mu} = \frac{\partial}{\partial z}\left(2r\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial \theta^2} - 4(1-\nu)\frac{\partial \varphi^I}{\partial r} \right) + 2\frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi^I}{\partial \theta \partial z},$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}^I}{\mu} = \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial \theta \partial z^2} + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \omega^I}{\partial \theta} \right) - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^I}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi^I}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\sigma_{\theta z}^I}{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z}\left(\frac{2\omega^I}{r} - \frac{\partial \varphi^I}{\partial r} - 4\frac{1-\nu}{r}\varphi^I \right) - \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial r \partial z}.$$

Для спрощення викладу розглянемо крайові умови (6) у вигляді:

$$l^{\pm}(r,\theta) = l(r,\theta), \quad t^{\pm}(r,\theta) = k^{\pm}(r,\theta) = 0,$$

$$f(\theta,z) = g(\theta,z) = q(\theta,z) = 0, \tag{9}$$

де $l(r,\theta)$ – парна функція θ. За допомогою відокремлення змінних у рівняннях (7) з урахуванням співвідношень (6) та умов (9) знаходимо наступні вирази для потенціальних функцій:

$$\varphi^I = A_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^I \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^I \cos m\theta r^m +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}^I \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \cos m\theta \cos k_n z,$$

$$\omega^I = C_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^I \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^I \cos m\theta r^m +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm}^I \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \cos m\theta \cos k_n z,$$

$$\psi^I = \sum_{m=1}^{\infty} E_m^I \sin m\theta r^m + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}^I \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \sin m\theta \cos k_n z,$$

де $k_n = n\pi / h$; I_m – модифіковані функції Бесселя першого роду порядку m; A_0^I, C_0^I, A_m^I, C_m^I, E_m^I, B_n^I, D_n^I, B_{nm}^I, D_{nm}^I, F_{nm}^I – довільні сталі коефіцієнти. Підстановкою отриманих виразів у співвідношення (8) отримаємо розвинення компонент тензора напружень у ряди Фур'є за координатами z та θ. Отримані у такий спосіб вирази для компонент тензора напружень точно задовольняють вихідні рівняння задачі і володіють достатньою кількістю вільних коефіцієнтів для задоволення крайових умов (9) на бічній поверхні циліндра $r = a$.

Для визначення складових «II» розв'язку (5) скористаємося поданням Дуголла [11, с. 141]:

$$u_r^{II} = \frac{2}{r}\frac{\partial \psi^{II}}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega^{II}}{\partial r} + (3-4\nu)\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r} + 2z\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial r \partial z},$$

$$u_\theta^{II} = -2\frac{\partial \psi^{II}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega^{II}}{\partial \theta} + \frac{3-4\nu}{r}\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial \theta} + \frac{2z}{r}\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial \theta \partial z},$$

$$u_z^{II} = \frac{\partial \omega^{II}}{\partial z} - (3-4\nu)\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2},$$

де функції $\varphi^{II}(r,\theta,z)$, $\omega^{II}(r,\theta,z)$, $\psi^{II}(r,\theta,z)$ задовольняють рівняння (7). Відповідні компоненти тензора напружень мають вигляд:

$$\frac{\sigma_r^{II}}{\mu} = 2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left((3-4\nu)\varphi^{II} + 2z\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial z} + \omega^{II}\right) - 8\nu\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{\psi^{II}}{r}\right),$$

$$\frac{\sigma_\theta^{II}}{\mu} = \frac{\partial}{\partial r}\left((8\nu-6)\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial r} - 4\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\psi^{II}}{r}\right)\right) - 6\frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} +$$

$$+\frac{4z}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi^{II}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial r}\right)+\frac{2}{r}\left(\frac{\partial\omega^{II}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\omega^{II}}{\partial\theta^2}\right),$$

$$\frac{\sigma_z^{II}}{\mu}=4z\frac{\partial^3\varphi^{II}}{\partial z^3}+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\omega^{II}-\varphi^{II}), \qquad (10)$$

$$\frac{\sigma_{rz}^{II}}{\mu}=2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial z}+2z\frac{\partial^2\varphi^{II}}{\partial z^2}\right)+2\frac{\partial^2\omega^{II}}{\partial r\partial z}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2\psi^{II}}{\partial\theta\partial z},$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}^{II}}{\mu}=2\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left((3-4\nu)\frac{\varphi^{II}}{r}+\frac{2z}{r}\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial z}+\frac{\omega^{II}}{r}\right)-4\frac{\partial^2\psi^{II}}{\partial r^2}-2\frac{\partial^2\psi^{II}}{\partial z^2},$$

$$\frac{\sigma_{\theta z}^{II}}{\mu}=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial z}+2z\frac{\partial^2\varphi^{II}}{\partial z^2}\right)+\frac{2}{r}\frac{\partial^2\omega^{II}}{\partial\theta\partial z}-2\frac{\partial^2\psi^{II}}{\partial r\partial z}.$$

Після відокремлення змінних у рівняннях (7) функції Дуголла знаходимо у наступному вигляді:

$$\varphi^{II}=A_0^{II}z+B_0^{II}+\sum_{j=1}^{\infty}A_{0j}^{II}\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}\frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{mj}^{II}\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj}z}{\operatorname{sh}\mu_{mj}h}\frac{J_m(\mu_{mj}r)}{J_m(\mu_{mj}a)}\cos m\theta,$$

$$\omega^{II}=C_0^{II}z+B_0^{II}+\sum_{j=1}^{\infty}C_{0j}^{II}\frac{\operatorname{ch}\lambda_j z}{\operatorname{sh}\lambda_j h}\frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{mj}^{II}\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj}z}{\operatorname{sh}\mu_{mj}h}\frac{J_m(\mu_{mj}r)}{J_m(\mu_{mj}a)}\cos m\theta,$$

$$\psi^{II}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}E_{mj}^{II}\frac{\operatorname{ch}\mu_{mj}z}{\operatorname{sh}\mu_{mj}h}\frac{J_m(\mu_{mj}r)}{J_m(\mu_{mj}a)}\sin m\theta,$$

де μ_{mj} – корені рівняння

$$\left.\frac{dJ_m(\mu r)}{dr}\right|_{r=a}=0;$$

$\lambda_j\equiv\mu_{0j}$; $A_0^{II}, B_0^{II}, C_0^{II}, D_0^{II}, A_{0j}^{II}, C_{0j}^{II}, A_{mj}^{II}, C_{mj}^{II}, E_{mj}^{II}$ – довільні сталі коефіцієнти; J_m – функції Бесселя першого роду порядку m. Внаслідок властивостей функції Бесселя, власні значення μ_{mj}, m, $j=1,2,\ldots$ задовольняють умову

$$\mu_{mj}aJ_{m\pm1}(\mu_{mj}a)=mJ_m(\mu_{mj}a).$$

Шляхом підстановки отриманих виразів для потенціальних функцій Дуголла в співвідношення (10), знайдемо вирази для компонент тензора напружень у вигляді розвинень в ряди Бесселя та Фур’є відповідно за радіальною та коловою координатами. Знайдені у такий спосіб напруження дозволяють задовольнити крайові умови (9) на торцях $z = \pm h$ циліндра.

Вирази для напружень із індексом «0» знаходять у вигляді поліномів радіальної та осьової координат, які відповідають несамозрівноваженим частинам зусиль (9).

Таким чином, розв’язок задачі зведено до визначення наборів довільних коефіцієнтів у виразах для напружень з верхніми індексами «I» та «II» із крайових умов. Внаслідок взаємозалежності отриманих виразів, визначення вказаних коефіцієнтів здійснюється на основі безмежної системи лінійних алгебричних рівнянь, які отримано безпосередньою підстановкою виразів (8), (10) у крайові умови (9). Розв’язок отриманої системи можна отримати з використанням алгоритму простої редукції [9].

Література

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т.Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. Гринченко В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. / В.Т.Гринченко, А.Ф.Улитко. – К.: Наукова думка, 1985 – Т. 3. – 280 с.
3. Колтунов М.А. Упругость и прочность цилиндрических тел / М.А.Колтунов, Ю.Н.Васильев, В.А.Черных. – М.: Высшая школа, 1975. – 526 с.
4. Байда Э.Н. Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре / Э.Н.Байда. – М.-Л.: Госстройиздат, 1961. – 63 с.
5. Вігак В.М. Точний розв’язок осесиметричної задачі пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини / В.М.Вігак, Ю.В.Токовий // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55-60.
6. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д.Коваленко. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.
7. Мелешко В.В. Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини / В.В.Мелешко, Ю.В.Токовий, Д.Р.Барбер // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 1. – С.120-137.
8. Соляник-Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости / К. В. Соляник-Красса. – М.: Стройиздат, 1987. – 336 с.
9. Токовий Ю.В. Зведення тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра до розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь / Ю.В.Токовий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, №1. – С. 49-60.
10. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section / J.Dougall // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1914. – 49, No.17. – P. 895-978.

11. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate / J.Dougall // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – 41, No.8. – P. 129-228.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2012 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.****,*
д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України ***Кушніром Р.М.*** *(м. Львів),*

THREE-DIMENSIONAL THERMAL STRESSES IN A SOLID ELASTIC CYLINDER OF FINITE LENGTH

Yu. V. Tokovyy
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova str., 3-b;
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

An analytical technique for solution of the three-dimensional thermoelasticity problem for a solid elastic cylinder of finite length with force-free boundary is presented. By making use the thermal potential technique, the original problem of thermoelasticity is reduced to the corresponding elasticity problem for the cylinder exposed to force loadings on its plane and cylindrical boundaries. To solve the obtained problem, we employ the method of cross-wise superposition.

Key words: *elastic cylinder of finite length, thermal stresses, the method of cross-wise superposition*