УДК 517.944
MSC 2020: 35F20
DOI: 10.31471/2304-7399-2026 -22(83)-61-66

НАБЛИЖЕННЯ ПАРАБОЛІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

А. І. Казмерчук[1,2]*

[1] *Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;*

[2] *Карпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76000, вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, Україна*

e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net, anatolii.kazmerchuk@nung.edu.ua, anatolii.kazmerchuk@cnu.edu.ua

У теорії систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку важливим є питання обґрунтування наближених методів розв'язання задачі Коші.

У даній роботі для систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку введено поняття узагальненого розв'язку задачі Коші. Також запропоновано аналіз наближеного методу з допомогою параболічної системи диференціальних рівнянь вищих порядків.

Такий підхід дозволяє зрозуміти, як працюють апроксимації, які є аналогом системи Нав'є-Стокса для системи рівнянь гідромеханіки.

***Ключові слова**: системи квазілінійних рівнянь, узагальнений розв'язок, класичний розв'язок, задача Коші, наближені методи.*

1.Для системи квазілінійних диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо задачу Коші

$$
\begin{gathered}
u_t^1 + \varphi^1(u^1)_x + \psi^1(u^1, \dots, u^N) = 0, \\
u_t^2 + \varphi^2(u^2)_x + \psi^2(u^1, \dots, u^N) = 0, \\
\dots \\
u_t^N + \varphi^N(u^N)_x + \psi^N(u^1, \dots, u^N) = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
u^1|_{t=0} = u_0^1(x), \\
u^2|_{t=0} = u_0^2(x) \\
\dots
\end{gathered} \tag{2}
$$

* Відповідальний автор

$$u^N|_{t=0} = u_0^N(x),$$

де $u = (u^1, \dots, u^N), u = u(t,x), \varphi^j(v) \in C^{2,\alpha}, \left|\frac{d\varphi^j}{dv}\right| \le K_1, \psi^j(u^1, \dots, u^N) \in C^{1,\alpha}$,
$u_0^j(x) \in L_\infty(R), j = 1, \dots, N.$

Вважаємо, що для функцій $\zeta_j(v) \in C^1(R), j = 1, \dots, N$, виконуються нерівності

$$\zeta_j(v) > 0, \qquad \frac{d\zeta_j(v)}{dv} v \ge 0,$$

і $\zeta_j(v) \to +\infty$ при $|v| \to +\infty$, а при $C = const > 0$ справджується нерівність

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{d\zeta_j(u^j)}{du^j} \psi^j(u^1, \dots, u^N) \le C \sum_{j=1}^{N} \zeta_j(u^j) \tag{3}$$

Означення 1. *Обмежена вимірна вектор-функція* $u(t,x)$ *називається узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо*
$\forall k \in R^1 \;\; \forall f(t,x) \in C^{o,\infty}\big((0,T] \times R^1\big),\; f(t,x) \ge 0$ *при кожному* $j = 1, \dots, N$

виконуються нерівності

$$L_j(u,k,f) = -\iint\limits_{0\,-\infty}^{T\,+\infty} \Big\{|u^j - k| f_t + sign(u^j - k)\Big(\varphi^j(u^j) - \varphi^j(k)\Big) f_x - sign(u^j - k)\psi^j(u^1, \dots, u^N) f\Big\} dxdt \le 0,$$

а початкові умови (2) приймаються у сильному сенсі в $L_{1,loc}(R)$.

2.Зазначимо, що результати існування та єдиності розв'язку задачі (1),(2) у випадку $N = 1$ були отримані починаючи з 1950-х років у працях Олійник О. А., Кружкова С. М. та Lax P. У випадку $N > 1$ для систем рівнянь (1) певного вигляду було отримано результати існування і єдиності узагальненого розв'язку задачі Коші і крайової задачі ([1-3]), а також обгрунтування наближених методів загальної природи.

3.Розглянемо апроксимації задачі (1), (2), які при $\varepsilon > 0$ будуються як класичні розв'язки такої задачі Коші

$$(u^\varepsilon)^1_t + \varphi^1((u^\varepsilon)^1)_x + \psi^1((u^\varepsilon)^1, \dots, (u^\varepsilon)^N) = \varepsilon D^{(0,2m)}(u^\varepsilon)^1,$$

$$(u^\varepsilon)^2_t + \varphi^2((u^\varepsilon)^2)_x + \psi^2((u^\varepsilon)^1, \dots, (u^\varepsilon)^N) = \varepsilon D^{(0,2m)}(u^\varepsilon)^2, \quad (4)$$

$$\dots$$

$$(u^\varepsilon)^N_t + \varphi^N((u^\varepsilon)^N)_x + \psi^N((u^\varepsilon)^1, \dots, (u^\varepsilon)^N) = \varepsilon D^{(0,2m)}(u^\varepsilon)^N,$$

$$(u^\varepsilon)^1|_{t=0} = \left(u_0^1(x)\right)^\varepsilon,$$

$$(u^\varepsilon)^2|_{t=0} = \left(u_0^2(x)\right)^\varepsilon, \qquad (5)$$

$$\dots$$

$$(u^\varepsilon)^N|_{t=0} = \left(u_0^N(x)\right)^\varepsilon$$

зі згладженою початковою вектор-функцією за допомогою оператора усереднення.

Існування і єдиність розв’язку задачі (4),(5) випливає з результатів і методів в [4]. Зазначимо при цьому, що умови на функції $\zeta_j(v)$ і виконання нерівностей (3) забезпечують виконання принципу максимуму.

Такий наближений метод довільній обмеженій вектор-функції $u_0(x)$ і скалярному параметру $\varepsilon > 0$ ставить у відповідність сім’ю функцій $\{u^\varepsilon(t,x)\}$.

При цьому якщо $var\big(u_0(x)\big) < +\infty$, то

$$L_j(u^\varepsilon, k, f) \leq \varepsilon \|\nabla^{2m-1} f\|_C \underset{suppf}{var}\, u^\varepsilon(t,x), \qquad (6)$$

тут $\|\cdot\|_C$ – норма у просторі неперервних функцій, $var(\cdot)$ - варіація у сенсі Тонеллі-Чезарі, $suppf$ - носій функції f. Це випливає з формули Остроградського при застосуванні оператора $L_j(u^\varepsilon, k, f)$ з врахуванням рівнянь системи (4).

Зауважимо також, що наближений метод стійкий за початковими даними, і для вектор-функцій $u^\varepsilon(t,x)$ стійкими є модулі неперервності $\lambda(h)$ за змінною x в $L_{1,loc}(R)$ і $\nu_t(\tau)$ – за змінною t в $L_{1,loc}(R)$ ([1]).

Отримано оцінки збіжності наближених розв’язків до узагальненого розв’язку задачі (1),(2) у наступному сенсі.

Теорема 1. *Нехай* $var\big(u_0(x)\big) < +\infty$ *і* $var\big(v_0(x)\big) < +\infty$. *Тоді для розв’язків задачі (3),(4)* $u^{\varepsilon_1}(t,x)$ *і* $v^{\varepsilon_2}(t,x)$ при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *і таких, що* *відповідають початковим вектор-функціям $u_0(x)$ та $v_0(x)$, справджується оцінка*

$$\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot)-v^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} \le \|u_0(\cdot)-v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}}+C(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^{\delta}, \tag{7}$$

де $\delta \in (0,1)$ залежить від параметрів системи (3).

Доведення Нехай $\chi\left(K_{r,T}\right)^h -$ усереднення з параметром h характеристичної функції $\chi\left(K_{r,T}\right)$ зрізаного конуса $K_{r,T}=\{(t,x)|(K_1t+r)^2 \ge |x|^2, 0<t<T\}$. З врахуванням оцінки (6) при $f(t,x)=\chi\left(K_{r,T}\right)^h$ отримуємо $\iint_{0-\infty}^{T+\infty} L_j(u^{\varepsilon_1},u^{\varepsilon_2},f)dyd\tau \le (\varepsilon_1+\varepsilon_2)/h^{2m-1}C(T)\underset{suppf}{var}\, u^{\varepsilon,j}(t,x)$, а далі після оптимізації за параметром h отримуємо оцінку (6).

Теорема 2. *Нехай $u_0^j(x)\in L_\infty(R), v_0^j(x)\in L_\infty(R)$ $j=1,\dots,N$. Тоді для розв'язків системи (3),(4) $u^{\varepsilon_1}(t,x)$ і $v^{\varepsilon_2}(t,x)$* при $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ *, і таких, що відповідають початковим вектор-функціям $u_0(x)$ та $v_0(x)$, справджується оцінка*

$$\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot)-v^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} \le \|u_0(\cdot)-v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}}+\mu((\varepsilon_1+\varepsilon_2)), \tag{8}$$

де функція $\mu(\sigma)\to 0, \sigma\to 0$ залежить від сумісного модуля неперервності $\lambda(\sigma)$ в $L_{1,loc}(R)$ початкових функції $u_0(x)$ і $v_0(x)$ та від параметрів системи (4).

Доведення Для згладжених початкових функцій з допомогою оператора усереднення справджуються умови теореми 1. Далі

$$\begin{aligned}\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot)-v^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} &\le \\ &\le \|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot)-u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} \\ &+\|u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot)-v^{\varepsilon_2,h}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}}+ \\ &+\|v^{\varepsilon_2}(t,\cdot)-v^{\varepsilon_2,h}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}}\end{aligned}$$

А оскільки, враховуючи стійкість наближеного методу, і отримані оцінки (6),(7)

$$\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot)-u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} \le \left\|u_0(x)-\left(u_0(x)\right)^h\right\|_{L_{1,loc(R)}} \le \lambda(h),$$

$$\|v^{\varepsilon_2}(t,\cdot)-v^{\varepsilon_2,h}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} \le \|v_0(x)-(v_0(x))^h\|_{L_{1,loc(R)}} \le \lambda(h),$$

$$\|u^{\varepsilon_1,h}(t,\cdot)-v^{\varepsilon_2,h}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} \le \|u_0(\cdot)-v_0(\cdot)\|_{L_{1,loc(R)}} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{C\lambda(h)}{h^{2m-1}},$$

після оптимізації за параметром h отримаємо оцінку (8). Зауважимо, що оцінка (8) забезпечує єдиність узагальненого розв'язку задачі (1),(2). І це твердження отримано незалежним способом.

Отримані результати є поглибленням і узагальненням результатів робіт [1-3].

Література

1. Казмерчук А.І. До обґрунтування наближених методів розв'язання квазілінійних законів збереження з негладкими даними задачі //Вісник національного університету "Львівська політехніка", Прикладна математика.-2000.-№411.-с.147-151

2.Казмерчук А.І. Оптимізація швидкості збіжності в методах наближеного розв'язування задачі Коші для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку //Прикарпатський вісник НТШ. серія Число. № 2(46) (2018). с.47-51. doi: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-47-51https://doi.org/10.31471/2304-7399-2018-2(46)-47-51

3. Казмерчук А.І. Умовно-коректна задача Коші для системи квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ, серія Число. 18(68) (2023). с.49-53. doi: 10.31471/2304-7399-2023-18(68)-49-53

4. Ладыженская О.А., Солонников Н.Н., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Наука, 1967, 736 с.

Статті надійшла до редакційної колегії 15.03.2026р.
Прийнято до друку 20.04.2026 р.

APPROXIMATION BY PARABOLIC SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER SYSTEMS OF QUASILINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

A. I. Kazmerchuk[1,2*]
[1] *Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;*
76019, 15 Karpatska, street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;
[2] *Vasyl Stephanyk Carpathian National University;*
76000,57 Shevchenko street., Ivano-Frankivsk, Ukraine
e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net, anatolii.kazmerchuk@nung.edu.ua, anatolii.kazmerchuk@cnu.edu.ua

In the theory of systems of quasilinear partial differential equations of the first order, the problem of justification of approximate methods for solving the Cauchy problem is important.

In this work, the concept of a generalized solution of the Cauchy problem is introduced for systems of quasilinear partial differential equations of the first order. An analysis of the approximate method using a parabolic system of higher-order differential equations is also proposed.

This approach allows us to understand how approximations work, which are an analogue of the Navier-Stokes system for the system of equations of hydromechanics.

Key words*: systems of quasilinear equations, generalized solution, classical solution, Cauchy problem, approximate methods.*