

УДК 515.1

MSC 2020: 54E35

DOI: 10.31471/2304-7399-2026-22(83)-88-94

ВІДНОШЕННЯ “ЗНАЧНО НИЖЧЕ” ТА “ЗНАЧНО ВИЩЕ” ДЛЯ ФАКТОР-ОБ’ЄКТІВ КОМПАКТА

К.М. Копорх* , **О.Я. Микицей** 

Карпатський національний університет імені Василя Стефаника;

76018, вул. Шевченка 57, м. Івано-Франківськ, Україна

e-mail: kateryna.koporkh@cnu.edu.ua, oksana.mykytsei@cnu.edu.ua

У статті досліджено відношення апроксимації «значно нижче» та «значно вище» у гратці фактор-об’єктів компактного гаусдорфівського простору. Фактор-об’єкти розглядаються як класи еквівалентності неперервних сюр’єкцій. Основну увагу зосереджено на взаємозв’язку між цими відношеннями та структурними властивостями відповідних фактор-відображень. Отримано необхідні та достатні умови для того, щоб один фактор-об’єкт апроксимував інший знизу. Точніше, доведено необхідні і достатні умови для того, щоб фактор-об’єкт компактного гаусдорфівського простору був “значно нижче” чи “значно вище” за інший його фактор-об’єкт. Показано, що вирішальну роль у цьому випадку відіграє скінченність образу. Для відношення «значно вище» встановлено характеристику через еквівалентності зі скінченним носієм та ізольованими точками. Результати роботи поглиблюють розуміння апроксимаційних відношень у теорії частково впорядкованих множин і топологічній алгебрі.

Ключові слова: Відношення “значно нижче”, відношення “значно вище”, відношення апроксимації, фактор-об’єкт, компакт.

Вступ

Відношення апроксимації “значно нижче” та “значно вище” [2] є класичними об’єктами дослідження у топологічній алгебрі та інструментом теоретичних комп’ютерних наук, зокрема, денотаційної семантики мов програмування. Вони формалізують природну і широко вживану ідею наближення точного знання приблизним “з запасом” і довели свою корисність і в інших галузях, наприклад, при дослідженні гіперпросторів.

Відношення апроксимації у різних частково впорядкованих множинах можуть мати досить складну будову [3], бути як “бідними”, так і

“багатими”. Відомо [2], що ці відношення визначають корисні топології (Скотта та Лоусона), які часто збігаються з топологіями, впровадженими іншими раціональними способами [4].

Наприклад, на гіперпросторі (множині підоб’єктів) компакта відношення апроксимації згори (“значно вище”) визначає класичну топологію Віторіса. Цим мотивується наш намір дослідити відношення апроксимації на двоїстих конструкціях — множинах фактор-об’єктів.

1. Фактор-об’єкти компактів

Нагадаємо означення фактор-об’єкта [1]. У довільній категорії \mathcal{C} епіморфізми $f : X \rightarrow Y$ та $g : X \rightarrow Y'$ вважаємо еквівалентними, якщо існує такий ізоморфізм $\varphi : Y \rightarrow Y'$, що $\varphi \circ f = g$. Фактор-об’єктом об’єкта X називаємо клас еквівалентності епіморфізмів з початком X .

Зауважимо, що у загальному випадку у категорії, що не є малою (а такими є більшість реальних категорій алгебри, топології і аналізу) епіморфізми з фіксованим початком не утворюють множини, однак часто класам еквівалентності можна зіставити певні стандартні зображення, які утворюють множину, а тоді і сукупність фактороб’єктів фіксованого об’єкта виявляється множиною.

Наприклад, у категорії компактів (компактних гаусдорфових просторів) $\mathcal{C}omp$ фактороб’єкт — клас епіморфізму (неперервної сюр’єкції) $f : X \rightarrow Y$ — однозначно визначається відношенням еквівалентності на X , а саме $x_1 \sim_f x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. За загальновідомою лемою Александра існує бієкція між фактороб’єктами X та відношеннями еквівалентності, замкненими у $X \times X$, детальніше див. [5].

Там же запроваджено частковий порядок на множині $\Phi(X)$ фактороб’єктів компакта X . Вважаємо, що $[f]$ передує $[g]$ (є меншим чи рівним йому), пишучи $[f] \preceq [g]$ чи $[g] \succeq [f]$, якщо існує епіморфізм φ , для якого $\varphi \circ g = f$, чи, рівносильно, $\sim_f \supset \sim_g$ (класи еквівалентності \sim_f є “грубшими” — об’єднаннями класів еквівалентності \sim_g).

Тоді найменшим елементом $\Phi(X)$ є тривіальний фактор-об’єкт, тобто клас сталого відображення, а найбільшим — клас тотожного відображення. У [5] доведено, що $(\Phi(X), \preceq)$ є повною ґраткою.

2. Характеризація відношення “значно нижче”

Відношення “значно нижче” \ll , інакше назване відношенням апроксимації знизу, вводиться у довільній частково впорядкованій множині (S, \leq) . Кажемо, що x_0 значно нижче за x чи апроксимує x знизу, пишучи $x_0 \ll x$

x , якщо для кожної напрямленої вгору підмножини D , якщо $x \leq \sup D$ (зокрема, ця точна верхня грань існує), то існує елемент $d \in D$, для якого $x_0 \leq d$ [2].

Якщо для кожного елемента $x \in S$ всі елементи $x_0 \ll x$ утворюють напрямлену вгору множину, причому їх точна верхня грань рівна x , то (S, \leq) називають неперервною.

Розглянемо відношення “ \ll ” у множині $\Phi(X)$ фактороб’єктів компакта X . Надалі всі простори вважаємо компактами.

Лема 2.1. *Якщо образ X_0 епіморфізму $f_0 : X \rightarrow X_0$ є нескінченним, то клас $[f_0]$ не є значно нижчим від жодного класу $[f] \in \Phi(X)$.*

Доведення. Оскільки X_0 нескінченний, можемо обрати у X послідовність, образи всіх елементів якої щодо f_0 різні. Користуючись компактністю X , оберемо з неї підпослідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$, збіжну до x_0 , причому можна вважати, що значення $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ теж різні. За неперервністю $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Для всіх $n = 1, 2, 3, \dots$ підмножини $X_n = \{x_0, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ замкнені, $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$, і $\bigcup_{n=1}^\infty X_n = \{x_0\}$.

Для фактор-відображень $q_n : X \rightarrow X/X_n$, які склеюють підмножини $X_n \subset X$ в точки, маємо зростаючу послідовність Q фактор-об’єктів $[q_1] \preceq [q_2] \preceq [q_3] \preceq \dots$. Легко бачити, що її точною гранню є клас тотожного відображення – найбільший елемент $\Phi(X)$, тому $[f] \preceq \sup Q$. З іншого боку, для кожного $n = 1, 2, 3, \dots$ маємо $q_n(x_n) = q_n(x_0)$, однак $f_0(x_n) \neq f_0(x_0)$, тому $[f_0] \not\preceq [q_n]$. Цим доведено неможливість $[f_0] \ll [f]$. \square

Лема 2.2. *Якщо образ X_0 епіморфізму $f_0 : X \rightarrow X_0$ є скінченним, то клас $[f_0]$ є значно нижчим від кожного класу $[f] \in \Phi(X)$, якому він передує.*

Доведення. Нехай $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – n -точковий компакт, тоді X розбивається на непорожні відкрито-замкнені множини $X_k = (f_0)^{-1}(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Якщо f є сюр’єкцією компактів $X \rightarrow Z$, то за припущенням $f(X_k) \cap f(X_l) = \emptyset$ для всіх $k \neq l$.

Якщо $D = \{[d_i] \mid i \in \mathcal{I}\}$, де $d_i : X \rightarrow Y_i$ – напрямлена вгору сім’я фактороб’єктів, і $\sup D = [d] \succ [f]$, $d : X \rightarrow Y$, то відображення d_i в сукупності відокремлюють всі пари точок X , які відокремлює f . Тоді для кожного k сім’я замкнених множин $\{d_i^{-1}(d_i(X_k)) \mid i \in \mathcal{I}\}$ є напрямленою вниз, всі вони містять X_k , і їх перетин міститься у відкрито-замкненій множині $f^{-1}(f(X_k)) = X_k$. Отже, за лемою Шури-Бури $d_i^{-1}(d_i(X_k)) = X_k$ для деякого i , яке ми позначимо i_k .

Залишилося взяти довільний фактор-об'єкт $[d_j]$ з даної родини, який слідує за всіма $[d_{i_1}], [d_{i_2}], \dots, [d_{i_n}]$, тоді $d_j^{-1}(d_j(X_k)) = X_k$ для всіх $1 \leq k \leq n$, тобто образи $d_j(X_k)$ для різних k не перетинаються. Звідси випливає $[f_0] \preceq [d_j]$, що завершує доведення $f_0 \ll f$. \square

Об'єднуючи ці леми, отримуємо характеристизацію відношення “значно нижче” у $\Phi(X)$.

Теорема 2.1. *Клас $[f_0]$ апроксимує знизу клас $[f]$ у $\Phi(X)$, якщо і тільки якщо $[f_0]$ передує $[f]$ і образ f_0 є скінченним.*

3. Характеризація відношення “значно вище”

Означення нижче [2] є двоїстими до попередніх. Кажемо, що x_0 значно вище за x чи апроксимує x згори, пишучи $x_0 \gg x$, якщо для кожної напрямленої вниз підмножини D , якщо $x \geq \inf D$ (зокрема, ця точна нижня грань існує), то існує елемент $d \in D$, для якого $x_0 \geq d$ [2].

Якщо для кожного елемента $x \in S$ всі елементи $x_0 \gg x$ утворюють напрямлену вниз множину, причому їх точна нижня грань рівна x , то (S, \leq) називають двоїсто неперервною.

Наступне означення не є стандартним і вживається тільки у цій статті для спрощення.

Означення 3.1. *Носієм відношення еквівалентності “ \sim ” на множині X називаємо множину*

$$\text{supp}(\sim) = \{x \in X \mid \text{існує } y \in X, y \neq x, y \sim x\}.$$

Інакше кажучи, носій відношення еквівалентності складається з елементів, еквівалентних до інших елементів. Позначимо $E_f(X)$ множину всіх відношень еквівалентності на X зі скінченними носіями.

Лема 3.1. *Еквівалентне замикання об'єднання відношень $\sim_1, \sim_2 \in E_f(X)$ (тобто найменше відношення еквівалентності, що містить обидва дані відношення) теж має скінченний носій.*

Зауважимо, що за лемою Шури-Бури кожне відношення $\sim \in E_f(X)$ на компактній X визначає його фактороб'єкт $[q_\sim]$, і з останньої леми випливає, що такі фактороб'єкти утворюють нижню піднапівґратку ґратки $(\Phi(X), \preceq)$, а тому і напрямлену вниз підмножину $\Phi_f(X)$. Її точна нижня грань є тривіальним фактор-об'єктом (класом сталого відображення), отже, $\inf \Phi_f(X) \preceq [f]$ для кожного $[f] \in \Phi(X)$. Якщо $[f_0] \gg [f]$, то повинно

бути $[q] \preceq [f_0]$ для деякого $[q] \in \Phi_f(X)$. Однак $\Phi_f(X)$ є верхньою множиною, тобто кожний елемент $\Phi(X)$, що слідує за елементом $\Phi_f(X)$, сам належить до $\Phi_f(X)$. Звідси випливає, що тільки елементи $\Phi_f(X)$ можуть бути значно вище від довільних елементів $\Phi(X)$.

Теорема 3.1. *Клас $[f_0]$ апроксимує згори клас $[f]$ у $\Phi(X)$, якщо і тільки якщо $[f_0]$ слідує за $[f]$ і є визначеним відношенням еквівалентності “ \sim ” зі скінченним носієм, причому всі точки $\text{supp}(\sim)$ ізольовані в X .*

Доведення. Необхідність $[f_0] \in \Phi_f(X)$ показано вище. Припустимо, що гранична точка $x \in X$ належить носієві відповідного відношення “ \sim ”, тобто існує точка $y \neq x$, $y \sim x$. Нехай \mathcal{V} – родина всіх відкритих околів точки x , і $q_V : X \rightarrow X/X \setminus V$ – фактор-відображення для кожного $V \in \mathcal{V}$. Оскільки $[q_{V \cap V'}]$ передує обом класам $[q_V]$ і $[q_{V'}]$, то сім’я $\{[q_V] \mid V \in \mathcal{V}\}$ напрямлена вниз у $\Phi(X)$, її точна нижня грань є тривіальним фактор-об’єктом, тому передує $[f]$, однак $[q_V] \not\preceq [f_0]$, тому $[f_0] \gg [f]$ є неможливим.

Доведемо достатність. Нехай $[f_0]$ слідує за $[f]$ і є визначеним відношенням еквівалентності “ \sim ” зі скінченним носієм $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, точки якого ізольовані в X . Якщо множина $D \subset \Phi(X)$ напрямлена вниз і має інфімум, що передує $[f]$, то для всіх $x_i \sim x_j$, $1 \leq i < j \leq n$, маємо $f(x_i) = f(x_j)$, звідки випливає існування $[d_{ij}] \in D$, $d_{ij}(x_i) = d_{ij}(x_j)$. Існує елемент $[d] \in D$, що передує всім $[d_{ij}]$, тоді $[d] \preceq [f_0]$, що завершує доведення $[f_0] \gg [f]$. \square

4. Висновки та майбутні дослідження

Ми отримали повні характеристики відношень апроксимації знизу і згори у гратці $\Phi(X)$ фактор-об’єктів фіксованого компакта X . Наступним кроком буде з’ясування, які елементи цієї гратки є точними верхніми (нижніми) гранями елементів, що є значно нижчими (відповідно значно вищими). Це дозволить встановити вимоги на простори та обмеження на властивості фактор-об’єктів, необхідні, щоб отримати неперервні (двоїсто неперервні) частково впорядковані множини.

Література

1. W. Barr, Ch. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Springer, Berlin, Heidelberg (1988). Republished in: *Reprints in Theory and Applications of Categories*, No. 12 (2005) pp. 1-287. <http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/12/tr12abs.html>

2. G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove, D.S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press, London (2003). <https://www.cambridge.org/ua/universitypress/subjects/mathematics/logic-categories-and-sets/continuous-lattices-and-domains>
3. S.I. Nykorovych, O.R. Nykyforchyn, A.V. Zagorodnyuk, *Approximation relations on the posets of pseudoultrametrics* // *Axioms*, 12(5) 438 (2022). doi:10.3390/axioms12050438
4. S. Nykorovych, O. Nykyforchyn, *Metric and Topology on the Poset of Compact Pseudoultrametrics*, *Carpathian Math. Publ*, 15(2), 321–330 (2003). doi:10.15330/cmp.15.2.321-330
5. К. Копорх, *Топології на множині фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору*, *Праці міжнародного геометричного центру*, 3(3) 40-47 (2010). https://geom-center.ontu.edu.ua/files/archives/2010/3_3_2010.pdf, доступ 05.10.2025
6. О.Р. Никифорчин, К.М. Копорх, С.І. Никорович. *Компактні ультрапсевдометрики та зворотні спектри*, *Прикарпатський вісник НТШ*. Число, 17(64) 65-74 (2022). doi:10.31471/2304-7399-2022-17(64)-65-74
Стаття надійшла до редакційної колегії 23.12.2025 р.
Прийнято до друку 12.03.2026 р.

WAY BELOW AND WAY ABOVE RELATION FOR QUOTIENT OBJECTS OF COMPACTA

К.М. Koporkh* , **О.Я. Mykytsey** 

Vasyl Stefanyk Carpathian National University;

76018, 57 Shevchenka street, Ivano-Frankivsk, Ukraine

e-mail: kateryna.koporkh@cnu.edu.ua, oksana.mykytsei@cnu.edu.ua

The paper investigates the approximation relations “way below” and “way above” in the lattice of quotient objects of a compact Hausdorff space. Quotient objects are treated as equivalence classes of continuous surjections. The study focuses on structural links between these relations and properties of the corresponding factor maps. Necessary and sufficient conditions are obtained for one quotient object to approximate another from below. Exactly, we prove necessary and sufficient conditions for a quotient object of a compact Hausdorff space to be “way below” or “way above”

another its quotient object. It is shown that finiteness of the image plays a crucial role in this case. For the “way above” relation, a characterization is given in terms of equivalence relations with finite support and isolated points. The results contribute to a deeper understanding of approximation relations in the theory of partially ordered sets and topological algebra.

Key words: “Way below” relation, “way above” relation, approximation relations, quotient object, compactum.