МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Диферединційні рівняння

УДК 517.956.444
MSC 2020: 35K70
DOI: 10.31471/2304-7399-2026 -22(83)-44-60

ДРУГА МІШАНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В ПІВПРОСТОРІ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА

І. В. Буртняк*, Г. П. Малицька
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: ivan.burtniak@cnu.edu.ua

У цій статті досліджується друга крайова задача в півпросторі для рівняння типу дифузії з інерцією, де інерція визначається чотирма групами змінних. Кожна з цих груп охоплює відповідну кількість змінних, і для них характерне виродження ознак параболічності. Для підтвердження існування розв'язків цієї крайової задачі застосовано метод граничного переходу, а також побудовано асимптотичний розклад, який допомагає дослідити поведінку рівняння. Особливо важливу роль відіграє явний аналітичний вигляд фундаментального розв'язку задачі Коші, а також вивчення властивостей його похідних для виродженого параболічного рівняння. Для зведення поставленої задачі до більш зручного математичного формулювання використано метод потенціалів, де ядро цих потенціалів відповідає фундаментальному розв'язку узагальненого рівняння Колмогорова. Завдяки цьому підходу другу крайову задачу в півпросторі було редуковано до сингулярного інтегрального рівняння. Для пошуку розв'язку застосовано класи диференційовних функцій, що дозволило гарантувати стиск відповідного інтегрального оператора за умов малого параметра t. Окрім існування, забезпечено також доказ єдиності розв'язку заданої крайової задачі. Цей результат базується на використанні принципу максимуму в просторах обмежених функцій, що, своєю

* Відповідальний автор

чергою, надає теоретичний фундамент для подібних досліджень. Таким чином, стаття робить вагомий внесок у розвиток математичних методів для аналізу й розв'язання задач з виродженими параболічними рівняннями в багатовимірних просторах.

Ключові слова: *Рівняння Комогорова, потенціал, фундаментальний розв'язок задачі Коші, вироджені параболічні рівняння, задача Діріхле, дифузійні процеси.*

Вступ В цій роботі ми досліджуємо одну модельну мішану крайову задачу для узагальненого рівняння дифузії з інерцією [7,9]. Цікавість до розвитку цієї проблеми зумовлена як її самостійним науковим інтересом так і великим застосуванням крайових задач для вироджених параболічних рівнянь в ядерній фізиці, техніці, економіці [1].

Теорія крайових задач для параболічних систем досконало розроблена в роботах [2-4], для рівнянь другого порядку параболічного та еліптичного типу в [5], для вироджених параболічних рівнянь [6,8].

Ми розглядаємо рівняння, що узагальнює рівняння Колмогорова, яке має $\sum_{j=1}^{4} n_j = n_0$ – ступенів свободи, де $n_j > n_{j+1}, j = 1,2,3. n_j \in N, n_{11} -$ це кількість змінних, за якими немає виродження параболічності (дифузії). При $x_{11} > 0$ розглядаємо крайову задачу з початковими умовами і крайовими, що містять $\partial_{x_{11}} u$ і u ($u(t,x)$ – розв'язок).

За допомогою методу потенціалів, де ядром потенціалів є фундаментальний розв'язок узагальненого рівняння Колмогорова, відповідна задача зводиться до сингулярного інтегрального рівняння, одержаний оператор є оператором стиску у відповідно підібраних класах функцій.

Постановка задачі: Нехай $n_j \in N, j = \overline{1,4}$, $n_j \geq n_{j+1}$, $\sum_{j=1}^{4} n_j = n_0$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x \in R^{n_0}$, $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots x_{jn_j})$, $x_j \in R^{n_j}$, $\tilde{x}'_1 = (0, x_{1\,2}, \dots x_{1\,n_j})$, $x'_1 = (x_{1\,2}, \dots x_{1\,n_1})$, $x' = (x'_1, x_2, x_3, x_4)$, $x' \in R^{n_0-1}$, відповідно $\xi \in R^{n_0}$, $0 < t \leq T < +\infty$.

В $\Pi = \{(t,x): 0 < t \leq T < +\infty, x' \in R^{n_0-1}, x_{1\,1} > 0\}$ розглянемо задачу

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{n_{j+1}} x_{j\mu}\, \partial_{x_{j+1\mu}} u(t,x) - \alpha^2 \sum_{k=1}^{n_1} \partial^2_{x^2_{1k}} u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(0,x) = u_0(x), x \in R^{n_0-1} \cup \{x_{11}; x_{11} > 0\}, \qquad (2)$$

$$\partial_{x_{11}} u(t, \widetilde{x'}) + b(t) u(t, \widetilde{x'}) = g(t, x'), \qquad \widetilde{x'} = (0, x'), \qquad (3)$$

де $b(t) \leq 0, b(t)$ неперервна і обмежена функція $t \in [0,T], f(t,x) -$ задовольняє рівномірну умову Гельдера по x_1, має неперервні частинні похідні по $x_j, j = 2,3,4$.

$$\int_{R^{n_0}} \left|\partial_{x_j}^k f(t,x)\right| dx < +\infty,\ k = 0{,}1.$$

$u_0(x)$ − неперервна $x \in R^{n_0-1}$, $g(t,x')$ − неперервна і абсолютно інтегровна з першими частинними похідними по x'.

Основний результат. Задача (1)–(3) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$\varphi(t,x') = 2\int_0^t d\tau \int_{R^{n_0}} \left[\partial_{x_{11}}\Gamma\left(t,\tilde{x}';\tau,\tilde{\xi}'\right) + b(t)\Gamma\left(t,\tilde{x}';\tau,\tilde{\xi}'\right)\right]\varphi(\tau,\xi')d\xi' +$$

$$2\left(\partial_{x_{11}}u_1\left(t,\widetilde{x'}\right) + \partial_{x_{11}}u_2\left(t,\widetilde{x'}\right)\right) + u_1\left(t,\widetilde{x'}\right) + u_2\left(t,\widetilde{x'}\right) - 2g(t,x').$$

де $\Gamma(t,x;\tau,\xi)$– фундаментальний розв’язок (1), $u_1(t,x)$– розв’язок задачі Коші (1), з $f(t,x)$

Виклад основного матеріалу. Задача (1)–(3) може бути розв’язана методом потенціалів. Розв’язок $u(t,x)$ представимо у вигляді $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x)$ при цьому $f(t,x), u_0(x)$ довизначимо нулем при $x_{11} \le 0$.

$$u_1(t,x) = \int_{R^{n_0}} \Gamma(t,x;0,\xi)\, u_0(\xi)d\xi, \tag{4}$$

де $\Gamma(t,x;\tau,\xi)$– фундаментальний розв’язок рівняння (1).

$$\Gamma(t,x;\tau,\xi) = \mathrm{M}_0(t-\tau)^{-\sum_{j=1}^4(2j-1)n_j/2} exp\left\{-\frac{\rho^2(t,x;\tau,\xi)}{a^2}\right\}, a \neq 0,$$

при $t-\tau > 0, x \in R^{n_0}, \xi \in R^{n_0}$, $\Gamma(t,x;\tau,\xi) = 0$ при $t - \tau \le 0$,

$$\rho^2(t,x;\tau,\xi) = \textstyle\sum_{j=1}^4 \rho_k^2,$$

$$\rho_1^2 = \rho_1^2(t,x_1;\tau,\xi_1) = 4^{-1}(t-\tau)^{-1}\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\xi_{1j})^2,$$

$$\rho_2^2 = \rho_2^2\left(t,\bar{x};\tau,\bar{\xi}\right) = 3(t-\tau)^{-3}\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\xi_{2j}+(x_{1j}+\xi_{1j})(t-\tau)2^{-1})^2,$$

$$\rho_3^2 = \rho_3^2\left(t,\bar{\bar{x}};\tau,\bar{\bar{\xi}}\right) = 180(t-\tau)^{-5}\sum_{j=1}^{n_3}(x_{3j}-\xi_{3j}+$$

$$\left(x_{2j}+\xi_{2j}\right)(t-\tau)2^{-1} + (x_{1j}-\xi_{1j})12^{-1}(t-\tau)^2)^2,$$

$$\rho_4^2 = \rho_4^2\left(t,\bar{\bar{\bar{x}}};\tau,\bar{\bar{\bar{\xi}}}\right) = 25200(t-\tau)^{-7}\sum_{j=1}^{n_4}(x_{4j}-\xi_{4j}+\left(x_{3j}+\xi_{3j}\right)$$

$$(t-\tau)2^{-1} + \left(x_{2j}-\xi_{2j}\right)(t-\tau)^2 10^{-1} + \left(x_{1j}+\xi_{1j}\right)120^{-1}(t-\tau)^3)^2,$$

$$M_0 = \pi^{-\frac{n_0}{2}} 2^{-n_1} 3^{\frac{n_2}{2}} (6\sqrt{5})^{n_3} (60\sqrt{7})^{n_4} |a|^{-n_0}, |a| > 0.$$

$$u_2(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0}} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\, f(\tau,\xi) d\xi, \tag{5}$$

$$u_3(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \Gamma\left(t,x;\tau,\tilde{\xi}'\right) f(\tau,\xi') d\xi', \tag{6}$$

де $\varphi(t,x')$ –невідома функція, неперервна і обмежена разом з частинними похідними першого порядку по x', $\varphi(0,x') = 0$.

Використовуючи властивості $\Gamma(t,x;\tau,\xi)$ безпосередньо перевіряємо, що $u_2(t,x), u_3(t,x)$ задовольняють однорідне рівняння

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{n_j} x_{j\mu}\, \partial_{x_{j+1\mu}} u(t,x) - a^2 \sum_{k=1}^{n_1} \partial^2_{x^2_{1k}} u(t,x) = 0,$$

$(f(t,x) \equiv 0), u_1(0,x) = u_0(x), u_3(0,x) = 0, u_2(t,x) -$ задовольняє рівняння (1), $u_2(0,x) = 0$. Доведемо виконання умови (3).

$$\lim_{x_{11}\to 0} (\,\partial_{x_{11}} u(t,x) + b(t) u(t,x)) =$$

$$\lim_{x_{11}\to 0} (\,\partial_{x_{11}} \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \Gamma\left(t,x;\tau,\tilde{\xi}'\right) \varphi(\tau,\xi') d\xi' +$$

$$b(t) \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \Gamma\left(t,x;\tau,\tilde{\xi}'\right) f(\tau,\xi') d\xi') + \lim_{x_{11}\to 0} (\,\partial_{x_{11}} u_1(t,x)$$

$$+ b(t) u_1(t,x)) + \lim_{x_{11}\to 0} (\,\partial_{x_{11}} u_2(t,x) + b(t) u_2(t,x)) = g(t,x'),$$

або $\lim\limits_{x_{11}\to 0} (\,\partial_{x_{11}} u_3(t,x) + b(t) u_3(t,x)) + \lim\limits_{x_{11}\to 0} F_1(t,x) = g(t,x'),$

$$\lim_{x_{11}\to 0} (\,\partial_{x_{11}} u_3(t,x) + b(t) u_3(t,x)) + \lim_{x_{11}\to 0} F(t,x) = g(t,x').$$

Із властивостей розв’язків задачі Коші [10] випливає, що $F(t,x)$ неперервна функція $\lim\limits_{x_{11}\to 0} F(t,x) = F(t,x')$.

Знайдемо

$$\lim_{x_{11}\to 0} \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \partial_{x_{11}} \Gamma\left(t,x;\tau,\tilde{\xi}'\right) \varphi(\tau,\xi') d\xi' = \lim_{x_{11}\to 0} I_1(t,x),$$

де

$$I_1(t,x) = M_0 \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \Big[\frac{x_{11}}{2(t-\tau)a^2} - \frac{3}{(t-\tau)^2 a^2} (x_{21} - \xi_{21} +$$

$$\frac{x_{11}(t-\tau)}{2}) - \frac{30}{(t-\tau)^3a^2}\left(x_{31}-\xi_{31}+\frac{(x_{21}+\xi_{21})(t-\tau)}{2}+\frac{x_{11}(t-\tau)^2}{12}\right)$$

$$-\frac{420}{(t-\tau)^5a^2}\left(x_{41}-\xi_{41}+\frac{x_{31}+\xi_{31}(t-\tau)}{2}\frac{(x_{21}-\xi_{21})(t-\tau)^2}{10}+\right.$$

$$\left.\left.\frac{x_{11}(t-\tau)^3}{120}\right)\right]\exp\left\{-\frac{\rho^2(t,x;\tau,\xi')}{a^2}\right\}(t-\tau)^{-\sum_{j=1}^{4}(2j-1)n_j/2}\varphi(\tau,\xi')d\xi'$$

$$= H_1 + H_2,$$

Шукаємо $\lim\limits_{x_{11}\to 0} I$ або $\lim\limits_{x_{11}\to 0} H_1 + \lim\limits_{x_{11}\to 0} H_2$.

$$\lim_{x_{11}\to 0} H_1 = \lim_{x_{11}\to 0} M_0 \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{-\sum_{j=1}^{4}(2j-1)n_j/2}} \int_{R^{n_0-1}} -\frac{x_{11}}{2(t-\tau)a^2}$$

$$\exp\left\{-\frac{\rho^2\left(t,x;\tau,\bar{\xi}'\right)}{a^2}\right\}\varphi(\tau,\xi')d\xi', \quad (7)$$

$$\lim_{x_{11}\to 0} H_2 = \lim_{x_{11}\to 0} M_0 \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{-\sum_{j=1}^{4}(2j-1)n_j/2}} \int_{R^{n_0-1}} \left[-\frac{3}{(t-\tau)^2a^2}\right.$$

$$\left(x_{21}-\xi_{21}+\frac{x_{11}(t-\tau)}{2}\right) \quad -\frac{30}{(t-\tau)^3a^2}$$

$$\left(x_{31}-\xi_{31}+\frac{(x_{21}+\xi_{21})(t-\tau)}{2}+\frac{x_{11}(t-\tau)^2}{12}\right)-\frac{420}{(t-\tau)^5a^2}$$

$$\left.\left(x_{41}-\xi_{41}+\frac{x_{31}+\xi_{31}(t-\tau)}{2}\frac{(x_{21}-\xi_{21})(t-\tau)^2}{10}+\frac{x_{11}(t-\tau)^3}{120}\right)\right]$$

$$\exp\left\{-\frac{\rho^2\left(t,x;\tau,\bar{\xi}'\right)}{a^2}\right\}\varphi(\tau,\xi')d\xi', \quad (8)$$

Дослідимо границю (7). При цьому використаємо заміну змінних інтегрування:

$$\frac{x_{11}}{2(t-\tau)^{1/2}} = \beta_{11}|a|; \;\; x_1' - \xi_1' = 2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\beta_1'|a|;$$

$$x_2 - \xi_2 + \frac{\bar{x}_1 \; + \bar{\xi}_1'}{2}(t-\tau) = \frac{\beta_2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}|a|}{\sqrt{3}};$$

$$x_3 - \xi_3 + \frac{\bar{\bar{x}}_2 \; + \bar{\bar{\xi}}_2}{2}(t-\tau) + \frac{\bar{\bar{x}}_1 \; - \bar{\bar{\xi}}_1'}{12}(t-\tau)^2 = \frac{\beta_3(t-\tau)^{\frac{5}{2}}|a|}{6\sqrt{5}}; \qquad (9)$$

$$x_4 - \xi_4 + \frac{\bar{\bar{\bar{x}}}_3 + \bar{\bar{\bar{\xi}}}_3}{2}(t-\tau) + \frac{\bar{\bar{\bar{x}}}_2 - \bar{\bar{\bar{\xi}}}_2}{10}(t-\tau)^2 + \frac{\bar{\bar{\bar{x}}}_1 - \bar{\bar{\bar{\xi}}}'_1}{120}(t-\tau)^3$$
$$= \frac{\beta_4 (t-\tau)^{\frac{7}{2}}|a|}{60\sqrt{7}};$$
$$\bar{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n_2}, 0, \dots, 0),$$
$$\bar{\bar{x}}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn_3}, 0, \dots, 0), k = 1,2.$$
$$\bar{\bar{\bar{x}}}_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn_4}, 0, \dots, 0), k = 1,2,3.$$

З (9) знайдемо

$$\xi'_1 = x'_1 - 2\beta'_1 (t-\tau)^{\frac{1}{2}}|a| = \gamma'_1(x'_1, \beta'_1, (t-\tau)^{\frac{1}{2}});$$
$$\xi_2 = x_2 - \frac{\beta_2 (t-\tau)^{\frac{3}{2}}|a|}{\sqrt{3}} + \frac{\bar{x}_1 + x'_1 - 2\bar{\beta}'_1 (t-\tau)^{\frac{1}{2}}|a|}{2}(t-\tau)$$
$$= \gamma_2\left(x_2, \bar{x}_1, \bar{\beta}'_1, (t-\tau)^{\frac{3}{2}}, \beta_2, (t-\tau)^{\frac{3}{2}}\right);$$
$$\xi_3 = x_3 - \frac{\beta_3 (t-\tau)^{\frac{5}{2}}|a|}{6\sqrt{5}} + \frac{\bar{\bar{x}}_2 + \bar{\bar{\gamma}}_2\left(\bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{\beta}}'_1, (t-\tau)^{\frac{3}{2}}, \bar{\bar{\beta}}_2 (t-\tau)^{\frac{3}{2}}\right)}{2}$$
$$(t-\tau) + \frac{\bar{\bar{x}}_{11} - \bar{\bar{x}}'_1 - \bar{\bar{\gamma}}'_1\left(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{\beta}}', (t-\tau)^{\frac{1}{2}}\right)}{12}(t-\tau)^2 =$$
$$\gamma_3\left(x_3, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{\beta}}_2 (t-\tau)^{\frac{5}{2}}, \bar{\bar{\beta}}'_1 (t-\tau)^{\frac{5}{2}}, \beta_3 (t-\tau)^{\frac{5}{2}}\right);$$
$$\xi_4 = x_4 - \frac{\beta_4 (t-\tau)^{\frac{7}{2}}|a|}{60\sqrt{7}} + \frac{\bar{\bar{\bar{x}}}_3 + \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_3}{2}(t-\tau) + \frac{\bar{\bar{\bar{x}}}_2 - \bar{\bar{\bar{\gamma}}}_2}{10}(t-\tau)^2 +$$
$$\frac{\bar{\bar{\bar{x}}}_1 - \bar{\bar{\bar{\gamma}}}'_1}{120}(t-\tau)^3 =$$
$$\bar{\bar{\bar{\gamma}}}_4\left(x_4, \beta_4 (t-\tau)^{\frac{7}{2}}, \bar{\bar{\bar{x}}}_3, \bar{\bar{\bar{x}}}_2, \bar{\bar{\bar{x}}}_1, \bar{\bar{\bar{\beta}}}_3 (t-\tau)^{\frac{7}{2}}, \bar{\bar{\beta}}_2 (t-\tau)^{\frac{7}{2}}, \bar{\bar{\beta}}'_1 (t-\tau)^{\frac{7}{2}}\right); \quad (10)$$

В (10) підставимо $\beta_{11} = \frac{x_{11}}{2|a|(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}$, оскільки $\gamma' = (x, \beta', (t-\tau)^{\frac{1}{2}}) = (\gamma'_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, після заміни (9), H_1 матиме вигляд.

$$H_1 = \pi^{-\frac{n_0}{2}} \int_{\frac{x_{11} t^{1\backslash 2}}{2|a|}}^{+\infty} d\beta_{11} \int_{R^{n_0-1}} \exp\{-\beta^2\}\, \varphi\left(t - \frac{x_{11}^2}{4a^2\beta_{11}^2}, \gamma'\right) d\beta'. \quad (11)$$

Із (11) випливає оцінка

$$|H_1| \le \sup_{(t,x')} |\varphi(t,x')|\, \pi^{-\frac{n_0}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\beta^2\} y d\beta\right)^{n_0} \le C < +\infty. \quad (12)$$

Внаслідок оцінки (12), інтеграл H_1 збігається рівномірно по (t, x), тому

$$\lim_{x_{11}\to 0} H_1 = \varphi(t, x')\pi^{-\frac{n_0}{2}} \int_0^{+\infty} d\beta_{11} \int_{R^{n_0-1}} \exp\{-\beta^2\}\, d\beta' = \frac{1}{2}\varphi(t, x').$$

Покажемо, що H_2 збігається рівномірно по (t, x') до

$$I_0(t, x') = \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \partial_{x_{11}} \Gamma\big(t, \tilde{x}'; \tau, \tilde{\xi}'\big)\, \varphi(\tau, \xi') d\xi', t > 0.$$

Записавши $\partial_{x_{11}} \Gamma\big(t, \tilde{x}'; \tau, \tilde{\xi}'\big)$ у явному вигляді та зробивши заміну змінних (9) при $x_{11} = 0$, отримаємо, що $I_0(t, x')$ матиме вигляд:

$$I_0(t, x') = \frac{1}{2\pi^{\frac{n_0}{2}}|a|} \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \sum_{j=2}^{4} \sqrt{2j-1}\, \beta_{j1} (t-\tau)^{-1} \exp\{-\beta'^2\}$$

$$\varphi\left(\tau, \gamma'\left(x', \beta', (t-\tau)^{\frac{1}{2}}\right)\right) d\beta'.$$

Аналогічну заміну змінних зробимо в інтегралі H_2 при $x_{11} \neq 0$

$$H_2 = \frac{1}{2\pi^{\frac{n_0}{2}}|a|} \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \exp\left\{-\frac{x_{11}^2}{4(t-\tau)a^2} - \beta'^2\right\} (t-\tau)^{-1}$$

$$\sum_{j=2}^{4} \sqrt{2j-1}\, \beta_{j1} \varphi\left(\tau, \gamma'\left(x, \beta', (t-\tau)^{\frac{1}{2}}\right)\right) d\beta'. \qquad (13)$$

Розглянемо різницю $H_2 - I_0(t, x)$, записавши її у вигляді;

$$H_2 - I_0(t, x') = \frac{1}{2\pi^{\frac{n_0}{2}}|a|} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{R^{n_0-1}} \left(\sum_{j=2}^{4} \sqrt{2j-1}\, \beta_{j1}\right) \exp\{-\beta'^2\}$$

$$\left[\exp\left\{-\frac{x_{11}^2}{4(t-\tau)a^2}\right\} - 1\right] \varphi\left(\tau, \gamma'\left(x, \beta', (t-\tau)^{\frac{1}{2}}\right)\right) d\beta'$$

$$+ \frac{1}{2\pi^{\frac{n_0}{2}}|a|} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{R^{n_0-1}} \left(\sum_{j=2}^{4} \sqrt{2j-1}\, \beta_{j1}\right) \exp\left\{-\frac{x_{11}^2}{4(t-\tau)a^2} - \beta'^2\right\}$$

$$\left[\varphi\left(\tau, \gamma'\left(x', \beta', (t-\tau)^{\frac{1}{2}}\right)\right) - \varphi\left(\tau, \gamma'\left(x, \beta', (t-\tau)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right] d\beta' = H_3 + H_4.$$

Оцінимо H_4:

$$|H_4| \le x_{11} \sum_{j=2}^{4} \sup_{(t, x')} \left|\partial_{x_j} \varphi(t, x')\right| \frac{\sqrt{2j-1}}{2\pi^{\frac{n_0}{2}}} \int_0^t d\tau$$

$$\int_{R^{n_0-1}} \left|\beta_j\right| (t-\tau)^{j-1} \exp\{-\beta'^2\}\ d\beta' \le x_{11} C,$$

тому інтеграл H_4 малий при малих x_{11}. Оцінимо H_3, для цього його проінтегруємо частинами

$$|H_3| \leq \frac{1}{4\pi^{\frac{n_0}{2}}} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{R^{n_0-1}} \sum_{j=2}^{4} \sqrt{2j-1} \left| \partial_{x_j} \varphi \left(\tau, \gamma' \left(x', \beta', (t-\tau)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right|$$

$$\exp\{-\beta'^2\} (t-\tau)^{\frac{2j-1}{2}} \left[1 - \exp\left\{ -\frac{x_{11}^2}{4(t-\tau)} \right\} \right] d\beta' \leq$$

$$C \sum_{j=2}^{4} \sup_{(t,x')} \left| \partial_{x_j} \varphi(t,x') \right| \int_0^t (t-\tau)^{j-\frac{3}{2}} \left[1 - \exp\left\{ -\frac{x_{11}^2}{4(t-\tau)} \right\} \right] d\tau. \quad (14)$$

Із оцінки (14) випливає, що H_3 малий при малих x_{11}.

Внаслідок (13), (14) маємо $\lim\limits_{x_{11}\to 0} H_2 = I_0(t,x')$ рівномірно відносно (t,x'). Отже $u(t,x)$ є розв'язком крайової задачі (1)-(3), а $\varphi(t,x')$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\varphi(t,x') = 2\int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \partial_{x_{11}} \Gamma\left(t, \tilde{x}'; \tau, \tilde{\xi}'\right) \varphi(t,\xi') d\xi' + 2F_1(t,x') -$$

$$g(t,x') + 2b(t) \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \partial_{x_{11}} \Gamma\left(t, \tilde{x}'; \tau, \tilde{\xi}'\right) \varphi(t,\xi') d\xi', \tilde{x}' = (0,x'). (15)$$

Введемо множину V функцій змінних t, x' [10] Елементи цієї множини неперервні функції t, x', які мають неперервні похідні по x', що задовольняють нерівності

$$|\partial_{x'}^k v(t,x')| \leq C_k \exp\{-c_0 |x'|^2\},$$

з сталими C_k, c_0 залежними тільки від $v(t,x'), c_0 > 0, C_k > 0$

Введемо норму функцій $v(t,x')$

$$\|v(t,x')\| = \sup_{(t,\xi')} |\tilde{v}(t,\xi')| [1 + |\xi'|^2]^{\alpha/2}, \alpha > 0, \quad (16)$$

де $\tilde{v}(t,\xi')$ перетворення Фур'є по x' функції $v(t,x')$.

Під простором $\tilde{C}_\alpha$ будемо розуміти поповнення множини V за нормою (16).

Перепишемо рівняння (15) в еквівалентній формі

$$\varphi(t,x') = (A_1 + A_2)\varphi(t,x') + \chi(t,x'),$$

де $A_1\varphi(t,x') = 2\int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \partial_{x_{11}} \Gamma\left(t, \tilde{x}'; \tau, \tilde{\xi}'\right) \varphi(t,\xi') d\xi'$,

$$A_2\varphi(t,x') = 2b(t) \int_0^t d\tau \int_{R^{n_0-1}} \Gamma\left(t, \tilde{x}'; \tau, \tilde{\xi}'\right) \varphi(t,\xi') d\xi',$$

$$\chi(t,x') = 2F_1(t,x') - 2g(t,x').$$

Доведемо, що оператор $(A_1 + A_2)$ є оператором стиску множини V в себе при малих t. Оскільки, якщо $\varphi(t,x') \in V$, то $(A_1 + A_2)\varphi \in V$ оцінимо $\|A\varphi(t,x')\|$, $A = A_1 + A_2$.

Для цього знайдемо перетворення Фур'є по x' від $A_1\varphi(t,x')$:

$$\widetilde{A_1}\varphi(t,x') = M_0\pi^{-\frac{n_0-1}{2}}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\sum_{j=2}^4(2j-1)n_j}{2}}d\tau\int_{R^{n_0-1}}\exp\{-i(x',\xi')\}\,dx'$$

$$\int_{R^{n_0-1}}[-3(x_{21}-\theta_{21})(t-\tau)^{-2}-30(x_{31}-\theta_{31}+(x_{21}+\theta_{21})(t-\tau)2^{-1})$$
$$(t-\tau)^{-3}-420(x_{41}-\theta_{41}+(x_{31}+\theta_{31})(t-\tau)2^{-1}+(x_{21}-\theta_{21})(t-\tau)^2$$
$$10^{-1})(t-\tau)^{-4}]\exp\{-\rho^2(t,\tilde{x}';\tau,\tilde{\theta}')a^{-2}\}\varphi(\tau,\theta')d\theta'. \quad (17)$$

В (17) зробимо заміну змінних:

$x_{21}-\theta_{21} = 3^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}\gamma_{21}|a|,$

$x_{1k}-\theta_{1k} = 2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\gamma_{1k}|a|,\ k=\overline{2,n_1}.$

$x_{2k}-\theta_{2k}+(x_{1k}+\theta_{1k})(t-\tau)2^{-1} = 3^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}\gamma_{2k}|a|,\ k=\overline{2,n_2},$

$x_{31}-\theta_{31}+(x_{21}+\theta_{21})(t-\tau)2^{-1} = 6^{-1}5^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{31}|a|,$

$x_{3k}-\theta_{3k}+(x_{2k}+\theta_{2k})(t-\tau)2^{-1}+(x_{1k}-\theta_{1k})(t-\tau)^2 12^{-1}$
$= 6^{-1}5^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{3k}|a|,\ k=\overline{2,n_3}.$

$x_{41}-\theta_{41}+(x_{31}+\theta_{31})(t-\tau)2^{-1}+(x_{21}-\theta_{21})(t-\tau)^2 10^{-1} =$
$\left(60\sqrt{7}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{41}|a|,$

$x_{4k}-\theta_{4k}+(x_{3k}+\theta_{3k})(t-\tau)2^{-1}+(x_{2k}-\theta_{2k})(t-\tau)^2 10^{-1}+$
$(t-\tau)^3 120^{-1} = 60^{-1}7^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{4k}|a|,\ k=\overline{2,n_4}.$

З цієї заміни знайдемо x'

$x_{1k} = 2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\gamma_{1k}|a|+\theta_{1k},\ k=\overline{2,n_1},$

$x_{21} = 3^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}\gamma_{21}|a|+\theta_{21},$

$x_{2k} = 3^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}\gamma_{2k}|a|+\theta_{2k}-|\alpha|(t-\tau)^{\frac{3}{2}}\gamma_{1k}-\theta_{1k}(t-\tau),\ k=\overline{2,n_2},$

$x_{31} = 6^{-1}5^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{31}|a|+\theta_{31}-2^{-1}3^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{21}|a|-\theta_{21}(t-\tau),$

$x_{3k} = 6^{-1}5^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{3k}|a|+\theta_{3k}-2^{-1}3^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{2k}|a|-\theta_{2k}(t-\tau)+$
$2^{-1}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{1k}|a|+(t-\tau)^2\theta_{1k}-6^{-1}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{1k}|a| =$
$6^{-1}5^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{3k}|a|-2^{-1}3^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\gamma_{2k}|\alpha|+3^{-1}\gamma_{1k}|a|+\theta_{3k}-\theta_{2k}(t-$
$\tau)+2^{-1}(t-\tau)^2\theta_{1k},\ k=\overline{2,n_3};$

$x_{41} = \left(60\sqrt{7}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{41}|a|+\theta_{41}-\left(12\sqrt{5}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{31}|a|-\theta_{31}(t-$
$\tau)+\left(4\sqrt{3}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{21}|a|+\theta_{21}2^{-1}(t-\tau)-\left(10\sqrt{3}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{21}|a| =$
$\left(60\sqrt{7}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{41}|a|+\theta_{41}-\theta_{31}(t-\tau)-\left(12\sqrt{5}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{31}|a|+$
$3\left(20\sqrt{3}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{21}|a|+\theta_{21}2^{-1}(t-\tau);$

$x_{4k} = \left(60\sqrt{7}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{41}|a|+\theta_{41}-\left(12\sqrt{5}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{3k}|a|-\theta_{3k}$

$(t-\tau)+\left(4\sqrt{3}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{2k}|a|+\theta_{2k}2^{-1}(t-\tau)^2-(6)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{1k}|a|$
$-4^{-1}(t-\tau)^2\theta_{1k}-\left(10\sqrt{3}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{2k}|a|+(10)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{1k}|a|+$
$(10)^{-1}(t-\tau)^3\theta_{1k}-(60)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{1k}|a|=\left(60\sqrt{7}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{4k}|a|+$
$\theta_{4k}-\left(12\sqrt{5}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{3k}|a|-\theta_{3k}(t-\tau)+3\left(20\sqrt{5}\right)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}$
$\gamma_{21}|a|+2^{-1}\theta_{2k}(t-\tau)^2-(12)^{-1}(t-\tau)^{\frac{7}{2}}\gamma_{1k}|a|-3(20)^{-1}(t-\tau)^3\theta_{1k}$,
$k=\overline{2,n_4}$.

Після обчислення перетворення Фур'є по γ' і по θ' (17) матиме вигляд:

$$\left(\widetilde{A_1\varphi}\right)(t,x')=\int_0^t \exp\left\{-\left[\sum_{k=2}^{n_4}\left(\sum_{j=1}^{4}\xi_{jk}\frac{(\tau-t)^{j-1}}{j!}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\sum_{k=n_4+1}^{n_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\xi_{jk}\frac{(\tau-t)^{j-1}}{j!}\right)^2+\sum_{k=n_3+1}^{n_2}\left(\sum_{j=1}^{2}\xi_{jk}\frac{(\tau-t)^{j-1}}{j!}\right)^2+\sum_{k=n_2+1}^{n_1}\xi_{1k}^2\right]$$
$$a^2(t-\tau)-\frac{(t-\tau)^3\alpha^2}{12}\left[\sum_{k=2}^{n_4}\left(\xi_{2k}-\xi_{3k}\frac{(t-\tau)}{2}+\frac{3(t-\tau)^2}{20}\xi_{4k}\right)^2+\right.$$
$$\left.\sum_{k=n_4+1}^{n_3}\left(\xi_{2k}-\xi_{3k}\frac{(t-\tau)}{2}\right)^2+\sum_{k=n_3+1}^{n_2}\xi_{2k}^2\right]-\frac{(t-\tau)^5}{720}a^2$$
$$\left.\left[\sum_{k=1}^{n_4}\left(\xi_{3k}-\xi_{4k}\frac{(t-\tau)}{2}\right)^2+\sum_{k=n_4+1}^{n_3}\xi_{3k}^2\right]-\frac{(t-\tau)^7\alpha^2}{100800}\sum_{k=1}^{n_4}\xi_{4k}^2\right\}$$
$$\tilde{\varphi}(\tau,\xi_{12}-(t-\tau)\xi_{22}+\xi_{32}\frac{(t-\tau)^2}{2}-\frac{3(t-\tau)^3}{20}\xi_{42},\ldots,\xi_{1n_4}-(t-\tau)$$
$\xi_{2n_4}+\xi_{3n_4}\frac{(t-\tau)^2}{2}-\frac{3(t-\tau)^3}{20}\xi_{4n_4},\xi_{1n_4+1}-(t-\tau)\xi_{2n_4+1}+\xi_{3n_4+1}\frac{(t-\tau)^2}{2},\ldots,$
$$\xi_{1n_3}-(t-\tau)\xi_{2n_3}+\xi_{3n_3}\frac{(t-\tau)^2}{2},\xi_{1n_3+1}-(t-\tau)\xi_{2n_3+1},\ldots,$$
$\xi_{1n_2}-(t-\tau)\xi_{2n_2},\xi_{1n_2+1},\ldots,\xi_{1n_1},\xi_{21}-(t-\tau)\xi_{31}+\xi_{41}\frac{(t-\tau)^2}{2},$
$\xi_{2n_4}-(t-\tau)\xi_{3n_4}+\xi_{4n_4}\frac{(t-\tau)^2}{2},\xi_{2n_4}-(t-\tau)\xi_{3n_4}+\xi_{4n_4}\frac{(t-\tau)^2}{2},$
$\xi_{2n_4+1}-(t-\tau)\xi_{3n_4+1},\ldots,\xi_{2n_3}-(t-\tau)\xi_{3n_3},\xi_{2n_3+1},\ldots,\xi_{2n_2},\xi_{31}-$
$(t-\tau)\xi_{41},\ldots,\xi_{3n_4}-(t-\tau)\xi_{4n_4},\xi_{3n_4+1},\ldots,\xi_{3n_3},\xi_{41},\ldots,\xi_{4n_4})$
$(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\left(\xi_{21}-\frac{(t-\tau)}{3}\xi_{31}+\xi_{41}\frac{(t-\tau)^2}{12}\right)\frac{id\tau}{2\pi^{\frac{1}{2}}}$

У випадку, коли $\xi_{21} \geq 0, \xi_{41} \geq 0, \xi_{31} \leq 0$ ($\xi_{21} \leq 0, \xi_{41} \leq 0, \xi_{31} \geq 0$) маємо оцінку:

$$\left|\left(\widetilde{A_1\varphi}\right)(t,\xi')\right| \leq \sup_{t\in[0,T],\xi'\in R^{n_0-1}} |\tilde{\varphi}(t,\xi')|\, 2^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{1}{2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{(t-\tau)^3}{12}\left(|\xi_{21}| - \frac{(t-\tau)}{2}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{3(t-\tau)^2}{20}\right)^2\right\}$$

$$\left(|\xi_{21}| - \frac{(t-\tau)}{3}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{(t-\tau)^2}{12}\right)d\tau \leq \sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}} |\tilde{\varphi}(t,\xi')|$$

$$\int_0^t \frac{3(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{3}}\left(|\xi_{21}| - \frac{5(t-\tau)}{6}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{7(t-\tau)^2}{20}\right)\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\exp\left\{-\frac{(t-\tau)^3}{12}\left(|\xi_{21}| + \frac{(t-\tau)}{2}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{3(t-\tau)^2}{20}\right)^2\right\}\frac{d\tau}{2\pi^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{\frac{1}{2}}} \sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}} |\tilde{\varphi}(t,\xi')| \int_0^t \frac{3}{4\sqrt{3}}\left(|\xi_{21}| - \frac{5(t-\tau)}{6}|\xi_{31}|\right.$$

$$\left. + |\xi_{41}|\frac{7(t-\tau)^2}{20}\right)\exp\left\{-\frac{(t-\tau)^3}{12}\left(|\xi_{21}| + \frac{(t-\tau)}{2}|\xi_{31}|\right.\right.$$

$$\left.\left. + |\xi_{41}|\frac{3(t-\tau)^2}{20}\right)^2\right\}d\tau \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

У випадку $|\xi_{21}| \geq |\xi_{31}| \geq |\xi_{41}|, 0 < t < 1$, позначимо $t - \tau = \tau_1$, винесемо $\sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}} |\tilde{\varphi}(t,\xi')|$, перейдемо до оцінки інтегралу:

$$\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t \tau^{\frac{1}{2}}\left(|\xi_{21}| - \frac{\tau}{3}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{\tau^2}{12}\right)\exp\left\{-\frac{\tau^3}{12}\left(|\xi_{21}| - \frac{\tau}{2}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{3\tau^2}{20}\right)^2 - \frac{\tau^5}{720}\left(|\xi_{31}| - \frac{\tau}{2}|\xi_{41}|\right)^2 - \frac{\xi_{41}^2}{100800}\right\}d\tau \leq \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\left[\int_0^t \tau^{\frac{1}{2}}\left(|\xi_{21}| - \frac{5\tau}{6}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{7\tau^2}{20}\right)\right.$$

$$\exp\left\{-\frac{\tau^3}{12}\left(|\xi_{21}| - \frac{\tau}{2}|\xi_{31}| + |\xi_{41}|\frac{3\tau^2}{20}\right)^2\right\}d\tau +$$

$$\int_0^t |\xi_{41}|\tau^{\frac{5}{2}}\exp\left\{-\frac{5|\xi_{41}|\tau^7}{16\times 42}\right\}d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \tau^{\frac{3}{2}}\left(|\xi_{31}| - \frac{7\tau}{10}|\xi_{41}|\right)$$

$$\left.\exp\left\{-\frac{\left(|\xi_{21}| - \frac{\tau}{2}|\xi_{41}|\right)^2}{45}\tau^5\right\}d\tau\right] \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{210}.$$

Якщо $|\xi_{21}| > 1, |\xi_{31}| > |\xi_{41}| > \xi_0, |\xi_{41}| > |\xi_{21}|, t < 1$, тоді

$$\left|\left(\widetilde{A_1\varphi}\right)(t,\xi')\right| \le \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t \tau^{\frac{5}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^3}{12}\left(|\xi_{21}|-\frac{\tau}{2}|\xi_{31}|+|\xi_{41}|\frac{3\tau^2}{20}\right)^2\right.$$

$$\left.\left(|\xi_{31}|-\frac{7\tau}{10}|\xi_{41}|\right)-\frac{\tau^5}{720}\left(|\xi_{31}|-\frac{\tau}{2}|\xi_{41}|\right)^2\right\}d\tau+\frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t|\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{\tau^3}{12}\left(\xi_{21}-\frac{\tau}{2}\xi_{31}+\frac{3\tau^2}{20}\xi_{41}\right)^2-\frac{\tau^5}{720}\left(\xi_{31}-\frac{\tau}{2}\xi_{41}\right)^2-\frac{\tau^7}{28\times 60^2}\xi_{41}^2\right\}d\tau+$$

$$\frac{3}{40\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t|\xi_{41}|\tau^{\frac{5}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^3}{12}\left(\xi_{21}-\frac{\tau}{2}\xi_{31}+\frac{3\tau^2}{20}\xi_{41}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{\tau^5}{720}\left(\xi_{21}-\frac{\tau}{2}\xi_{41}\right)^2-\frac{\tau^7}{100800}\xi_{41}^2\right\}d\tau\Bigg]\sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}}|\tilde{\varphi}(t,\xi')|\le$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3}H_j\right)\sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}}|\tilde{\varphi}(t,\xi')|.$$

Перший інтеграл H_1 оцінюється через $\frac{2}{\sqrt{5}}$, позначимо $K_1=\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)/8$, покажемо $H_2\le 2K_1, H_3\le 2K_1$, зокрема

$$H_2\le\int_0^{k_1\zeta^{-\frac{1}{7}}}|\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}}d\tau+\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{k_1\zeta^{-\frac{1}{7}}}^t|\xi_{21}|\tau^{\frac{5}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^3\xi_{21}^2}{2688}-\frac{\tau^7\xi_{41}^2}{179200}\right\}d\tau+$$

$$\frac{3}{40\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{k_1\zeta^{-\frac{1}{5}}}^t|\xi_{41}|\tau^{\frac{5}{2}}d\tau+\frac{3}{40\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{k_1\zeta^{-\frac{1}{5}}}^t|\xi_{41}|\tau^{\frac{5}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^7\xi_{41}^2}{3628800}-\frac{\tau^5\xi_{31}^2}{72037}\right\}d\tau$$

$$\le$$

$$\frac{2}{3}k_1^{\frac{3}{2}}\zeta^{-\frac{3}{14}}+\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty}|\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^3\xi_{21}^2}{2688}-\frac{120\tau^7\xi_{41}^2}{32054400}\right\}d\tau\le$$

$$\frac{2\xi_{21}^2}{6\pi^{\frac{1}{2}}}\left(k_1\zeta^{-\frac{1}{7}}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{k_1\zeta^{-\frac{1}{7}}}^{+\infty}|\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^3|\xi_{21}|}{12\times 312^2}-\frac{\tau^7\xi_{41}^2}{24998400}\right\}d\tau\le$$

$$\frac{2|\xi_{21}|}{3\pi^{\frac{1}{2}}}\left(k_1\zeta^{-\frac{1}{7}}\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{3}\exp\left\{-\frac{120{k_1}^7|\xi_{41}|}{2419200}\right\}\le\left|\frac{|\xi_{21}|}{\zeta^{\frac{3}{14}}}\le 1\right|\le 2k_1,$$

$$\zeta'_0=\frac{24998400}{40301}{k_1}^{-7}\ln\frac{k\sqrt{3}}{2^5};\ |\xi_{21}|<\zeta_0^{\frac{3}{14}}. \quad (20)$$

$$H_3\le\frac{19}{84\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t|\xi_{31}|\tau^{\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^3|\xi_{31}|^2}{720\times 31}-\frac{40301\tau^7|\xi_{41}|^2}{24998400}\right\}d\tau\le$$

$$\frac{19|\xi_{31}|}{105\pi^{\frac{1}{2}}}\left(k\zeta^{-\frac{1}{7}}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{19\sqrt{155}}{14}\exp\left\{-\frac{|\xi_{41}|40301k^7}{24998400}\right\}\le 2k,$$

при $|\xi_{31}|\zeta^{-\frac{5}{14}} < 1$. $|\xi_{41}| \geq \zeta'_0 = \frac{24998400}{40301} k_1^{-7} \ln\frac{14k}{19\sqrt{155}}$;

Випадок: $|\xi_{41}| > \zeta'_0 > 1, |\xi_{41}| > |\xi_{31}|, |\xi_{41}| > |\xi_{21}|, |\xi_{j1}| \geq 1, j = 2,3,4.$

а) $\xi_{31}\xi_{41} < 0$ тоді

$$\left|\left(\widetilde{A_1\varphi}\right)(t,\xi')\right| \leq \sup_{t\in[0,T],\xi'\in R^{n_0-1}} |\tilde{\varphi}(t,\xi')| \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^t \left[\left(\frac{\tau^{\frac{5}{2}}}{12}|\xi_{41}| + \frac{5\tau^{\frac{3}{2}}}{42}|\xi_{31}|\right) + \tau^{\frac{1}{2}}|\xi_{21}| + \frac{19\tau^{\frac{2}{3}}}{42}|\xi_{31}|\right]$$

$$\exp\left\{-\frac{\tau^3}{12}\left(\xi_{21} - \frac{\tau}{2}\xi_{31} + \frac{3\tau^2}{20}\xi_{41}\right)^2 - \frac{\tau^5}{720}\left(\xi_{31} - \frac{\tau}{2}\xi_{41}\right)^2 - \frac{\tau^7}{100800}\xi_{41}^2\right\} d\tau =$$

$$\sup_{t\in[0,T],\xi'\in R^{n_0-1}} |\tilde{\varphi}(t,\xi')| \sum_{j=1}^{3} H_j,$$

$$H_1 = \frac{1}{42\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t \left(\frac{7\tau^{\frac{5}{2}}}{4}|\xi_{41}| + \frac{5\tau^{\frac{3}{2}}}{2}|\xi_{31}|\right) \exp\left\{\frac{\tau^5}{720}\left(|\xi_{31}| + \frac{\tau}{2}|\xi_{41}|\right)^2\right\} d\tau \leq \frac{\sqrt{5}}{7};$$

Нехай $k = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{7}\right)/16$, оцінимо H_2:

$$H_2 \leq \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{k\zeta^{-\frac{1}{7}}} |\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}}\, d\tau + \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{k\zeta^{-\frac{1}{7}}}^{t} |\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tau^3\left(\frac{|\xi_{21}|}{36} - \frac{\tau^2}{10}|\xi_{41}|\right)^2 + \right.$$

$$\left. -\frac{\tau^5\xi_{31}}{1395} - \frac{120\tau^7\xi_{41}^2}{5580}\right\} d\tau$$

$$\leq \int_0^{k\zeta^{-\frac{1}{7}}} |\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}}\, d\tau + \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{k\zeta^{-\frac{1}{7}}}^{t} |\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau^3\xi_{21}^2}{13764}\right\} d\tau$$

$$\exp\left\{-\frac{493k^7\xi_{41}^2}{7\zeta 6^3 16^2 31^2}\right\} \frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}\zeta^{-\frac{3}{14}}|\xi_{21}| + \sqrt{\frac{1147}{3}} \exp\left\{-\frac{493k^7|\xi_{41}|}{7\ 6^3 10^2 31^2}\right\} \leq$$

$$k + \sqrt{\frac{1147}{3}} \exp\left\{-\frac{493k^7\zeta_0}{7\ 6^3 10^2 31^2}\right\} = 2k.$$

$$\zeta_0 = -\frac{6^3 10^2 31^2 k^7 \zeta_0}{493} \ln\sqrt{\frac{1147}{3}}k.$$

$$H_3 \leq \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{k\zeta^{-\frac{1}{7}}} |\xi_{31}|\tau^{\frac{3}{2}}\, d\tau + \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{k\zeta^{-\frac{1}{7}}}^{t} |\xi_{31}|\tau^{\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{\xi_{31}^2}{26640} - \frac{\tau^7\xi_{41}^2}{4^3 10^2 9^2 7}|\xi_{41}|\right\} \leq$$

$$\frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{5}k^{\frac{5}{2}}\zeta^{-\frac{5}{14}}|\xi_{31}| + \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{k\zeta^{-\frac{1}{7}}}|\xi_{31}|\tau^{\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^5|\xi_{31}|^2}{26640}\right\}d\tau$$

$$\exp\left\{-\frac{k^7|\xi_{41}|}{4^3 10^2 9^2 7}\right\} \le 2k.$$

при $\zeta^{-\frac{5}{14}}|\xi_{31}| < 1, |\xi_{41}| > -\ 4^3 10^2 9^2 7 k^{-7}\ln\frac{\sqrt{5}k}{3\sqrt{37}} = \zeta_0, \zeta^{-\frac{5}{14}} = \zeta_0^{-\frac{5}{14}}$.

Якщо $|\xi_{21}| > \zeta_0^{\frac{3}{14}}$, $|\xi_{31}| > \zeta_0^{\frac{5}{14}}$ то інтегруючи до $k_1|\xi_{21}|^{-\frac{2}{3}}$ $\left(k_1|\xi_{31}|^{-\frac{2}{5}}\right)$ при цьому $|\xi_{41}| > |\xi_{21}|^{\frac{14}{3}}$ $(|\xi_{41}| > |\xi_{31}|^{\frac{14}{5}})$ і отримаємо необхідну оцінку $\frac{\tau}{2}\xi_{41} - \xi_{31} = 0, \tau = \frac{2\xi_{31}}{\xi_{41}}$;

Якщо $\xi_{31}\xi_{41} > 0, \frac{2\xi_{31}}{\xi_{41}} < 1$, то

$$\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t \frac{\tau^2}{12}|\xi_{41} - \xi_{31}|\exp\left\{-\frac{\tau^5}{720}\left(\xi_{31} - \frac{\tau}{2}\xi_{41}\right)^2 - \frac{\left(\xi_{21} - \frac{\tau}{2}\xi_{31} + \frac{\tau^2}{20}\xi_{41}\right)^2}{12}\right.$$

$$\left. - \frac{\tau^7\xi_{41}^2}{100800}\right\}d\tau \le \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\left[\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t}\right] \le \frac{3}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{+\infty} e^{-\beta^2}d\beta = \frac{3\sqrt{5}}{7},$$

де $t_0 = \frac{10\xi_{31}}{7\xi_{41}},\ t_1 = \frac{2\xi_{31}}{\xi_{41}}$.

$$\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\left(|\xi_{21}|\tau^{\frac{1}{2}} - \frac{19\tau^{\frac{3}{2}}}{42}|\xi_{31}|\right)\exp\left\{-\frac{\tau^3}{12}\left(\xi_{21} - \frac{\tau}{2}\xi_{31} + \xi_{41}\frac{3\tau^2}{20}\right)^2 - \right.$$

$$\left.\frac{\tau^5}{720}\left(\xi_{31} - \frac{\tau}{2}\xi_{41}\right)^2 - \frac{\tau^7\xi_{41}^2}{28\ \times 60^2}\right\}d\tau,$$

оцінюємо як у випадку $\xi_{31}\xi_{41} < 0, k = \left(1 - \frac{3\sqrt{5}}{7}\right)/16$.

Вибравши $\max\zeta_0 = \zeta^*$, при $|\xi_{j1}| \le \zeta^*$ та при $t < \frac{1}{\zeta^*}$, отримаємо що і в цьому випадку $\left(\widetilde{A_1\varphi}\right)(t,\xi')$ є оператор стиску тобто

$$|A_1\tilde{\varphi}(t,\xi')| \le r_0 \sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}}|\tilde{\varphi}(t,\xi')|, 0 < r_0 < \frac{1}{\zeta^*}.$$

Безпосереднім обчисленням отримаємо

$$|A_2\tilde{\varphi}(t,\xi')| \le 2t^{\frac{1}{2}} \sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}}|\tilde{\varphi}(t,\xi')|$$

Виберемо $t = \min\left\{\frac{1}{\zeta^*}, \frac{1-r_0}{2}\right\} = r_1$ тоді

$$|A\tilde{\varphi}(t,\xi')| \leq r_1 \sup_{(t,\xi')\in[0,T]\times R^{n_0-1}} |\tilde{\varphi}(t,\xi')|$$

тому

$$\|A\varphi(t,x')\|_\alpha \leq r_1\|\varphi(t,x')\|_\alpha$$

В просторі $\tilde{C}_{1+\gamma}, 0 < \gamma < 0{,}4$ оператор А є оператором стиску і переводить повний банахів простір $\tilde{C}_{1+\gamma}$ в себе.

Висновки. Оскільки ми розглянули крайові задачі в півпросторі при $x_{11} > 0$ то очевидно такі задачі можна розглядати по будь-якій змінній $x_{1j}, j = 1, \dots, n_4$ ця змінна пов'язана з групою змінних x_{2j}, x_{3j}, x_{4j} за якими є виродження параболічності, якщо поставити задачу при $x_{ij} > 0$, $j = n_4 + 1, \dots, n_3$ де x_{1j} пов'язано з x_{2j}, x_{3j} за якими є виродження параболічності, якщо брати $x_{ij} > 0$, $j = n_3 + 1, \dots, n_2$ то таке x_{1j} пов'язане з x_{2j}, $j = n_3 + 1, \dots, n_2$ лише у випадку $x_{ij} > 0$, $j = n_2 + 1, \dots, n_1$, ці змінні не пов'язані зі змінними за якими є виродження параболічності і відповідна крайова задача співпадає з відомими крайовими задачами для рівнянь дифузії, де роль потенціалів відіграє згортка фундаментального розв'язку (1) з $f(t,x), \varphi(t,x'), u_0(x)$.

Наступними кроками буде поширення крайових задач для (1) на обмежені області та обґрунтування коректної постановки розв'язності

Література

1. Burtnyak I. Malytska A. *The evaluation of derivatives of double barrier options of the Bessel processes by methods of spectral analysis.* Investment Management and Financial Innovations, **14**(3), 2017, 126-134. doi:10.21511/imfi.14(3).2017.12
2. Eidelman S. D. Parabolic systems. – Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969.
3. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*. Basel etc.: Birkhauser, 2004. IX. 387 p. doi: 10.1007/978-3-0348-7844-9
4. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, H. P. Malytska, *A modified Levi method: development and application*. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. **5** (1998), 14–19.
5. A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
6. S.D. Ivasyshen, I.P. Medyns'kyi, *On the Classical Fundamental Solutions of the Cauchy Problem for Ultraparabolic Kolmogorov-Type Equations*

with Two Groups of Spatial Variables. J. Math. Sci. **231** (4) (2018), 507-526. doi: 10.1007/s10958-018-3830-0
7. A. Kolmogoroff, *Zyfaellige Bewegungen*, Ann. of Marth. **35** (1) (1934), 116-117. doi: 10.2307/1968123
8. A. Malytska, I.V. Burtnyak, *On the Fundamental Solution of the Cauchy Problem for Kolmogorov Systems of the Second Order*. Ukr. Math. J. **70** (8) (2019), 1275-1287. doi: 10.1007/s11253-018-1568-y
9. Weber M. *The fundamental solution of degenerate partial differential equation of parabolic type*. Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1) (1951), 24-37. doi: 10.1090/S0002-9947-1951-0042035-0
10. I.V. Burtniak, A.P. Malytska, *Dirichlet problem in a half-space for equations of the diffusion type with inertia*. Precarpatian bulletin of the Shevchenko scientific society. Number, 21(79), 2025, 66–77. doi: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-66-77
11. G.P. Malyts'ka, *On the maximum principle for ultraparabolic equations.* Ukr. Math. J. **48** (2) (1996), 220–227. doi: 10.1007/BF02372047

Статті надійшла до редакційної колегії 10.03.2026 р.

Прийнято до друку 03.04.2026 р.

SECOND MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM IN HALF SPACE FOR THE GENERALIZED KOLMOGOROV EQUATION

I. V. Burtniak*, A. P. Malytska

Vasyl Stephanyk Carpathian National University;

76000,57 Shevchenko street., Ivano-Frankivsk, , Ukraine

e-mail: ivan.burtniak@cnu.edu.ua

This article investigates the second boundary value problem in a half-space for a diffusion-type equation with inertia, where inertia is determined by four groups of variables. Each of these groups covers a corresponding number of variables, and they are characterized by the degeneration of parabolic features. To confirm the existence of solutions to this boundary value problem, the method of limit transition is used, and an asymptotic expansion is constructed, which helps to study the behavior of the equation. The explicit analytical form of the fundamental solution of the Cauchy problem plays a particularly important role, as well as the study of the properties of its derivatives for a degenerate parabolic equation. To reduce the problem to a more convenient mathematical formulation, the method of potentials is used, where the kernel of *these potentials corresponds to the fundamental solution of the generalized Kolmogorov equation. Thanks to this approach, the second boundary value problem in a half-space was reduced to a singular integral equation. To find the solution, classes of differential functions were used, which allowed us to guarantee the compression of the corresponding integral operator under the conditions of a small parameter t. In addition to the existence, a proof of the uniqueness of the solution of the given boundary value problem was also provided. This result is based on the use of the maximum principle in spaces of bounded functions, which, in turn, provides a theoretical foundation for similar studies. Thus, the article makes a significant contribution to the development of mathematical methods for the analysis and solution of problems with degenerate parabolic equations in multidimensional spaces.*

***Key words**: Komogorov equation, potential, fundamental solution of the Cauchy problem, degenerate parabolic equations, Dirichlet problem, diffusion processes.*