УДК 517.9
MSC 2020: 47N20
DOI: 10.31471/2304-7399-2026-22(83)-18-28

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ЯДЕР ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

І.В. Андрусяк[1*], **О.Я. Бродяк**[1]
[1] *Національний університет "Львівська політехніка";*
79000, вул. Степана Бандери, 12, Львів, Україна
e-mail: ivanna.v.andrusyak@lpnu.ua, oksana.y.brodiak@lpnu.ua

У роботі досліджуються додатно визначені ядра від двох змінних, асоційовані з еліптичним диференціальним виразом другого порядку, що містить молодші коефіцієнти. Для зазначеного класу операторів встановлено необхідну і достатню умову існування інтегрального зображення ядра у формі розкладу за фундаментальною системою операторно-генерованих функціоналів відносно матричнозначної аналітичної міри. Запропонована конструкція узагальнює класичну схему інтегральних зображень типу Лапласа на випадок несамоспряжених диференціальних структур. Отримані результати забезпечують конструктивну параметризацію класу допустимих ядер через спектральні дані відповідного оператора, що відкриває нові можливості для аналізу кореляційних функцій у теорії випадкових полів та спектральної теорії.

Ключові слова: *додатно визначене ядро; інтегральне зображення; еліптичний оператор; спектральна міра.*

Вступ

Додатно визначені (д.в.) ядра та відповідні їм гільбертові простори з відтворюючим ядром (Reproducing Kernel Hilbert Spaces, RKHS) становлять фундаментальний базис сучасного гармонічного аналізу, теорії операторів, теорії апроксимації та стохастичного моделювання. У новітніх дослідженнях RKHS особлива увага приділяється поєднанню їхніх структурних властивостей з операторно-теоретичними підходами [1, 2]. Зокрема, у контексті теорії апроксимації ядерні зображення є визначальними для аналізу стійкості, власних підпросторів та спектральних характеристик асоційованих інтегральних операторів [3].

*Відповідальний автор

Сучасні наукові розвідки дедалі частіше акцентують на важливості операторно-адаптованих ядер. У задачах геометричного аналізу спектральні конструкції на основі оператора Лапласа-Бельтрамі дають змогу побудувати фундаментальні класи ядер для гаусових процесів на многовидах [4, 5]. Водночас у сфері чисельного розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних методи на основі ядер виокремилися в ефективну методологічну базу для навчання операторів [7]. Зазначені тенденції зумовлюють актуальність розробки явних теорем про зображення, що встановлюють аналітичний зв'язок між властивістю додатної визначеності ядра та структурою відповідного диференціального оператора.

Класичним орієнтиром є випадок Лапласа, де додатно визначені ядра допускають інтегральні зображення, пов'язані з

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{1}$$

У цій статті ми розглядаємо додатно визначені ядра, пов'язані з виразом другого порядку еліптичного типу

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + a\frac{\partial}{\partial x_1} - ib\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{2}$$

Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому: по-перше, встановлено необхідну і достатню умову існування інтегрального зображення додатно визначених ядер, асоційованих із диференціальним виразом (2); по-друге, ідентифіковано відповідну матричнозначну аналітичну міру, що забезпечує параметризацію таких зображень. Запропонований підхід дозволяє узагальнити класичну схему Лапласа на ширший клас еліптичних операторів із молодшими членами, що дає змогу сформулювати конструктивну операторно-адаптовану теорему про зображення.

1. Основні результати

Аналіз літератури, наведений у Вступі, обґрунтовує доцільність переходу від загальних концепцій RKHS до побудови операторно-специфічних зображень. У контексті дослідження властивостей додатної визначеності крізь призму еліптичних операторів, ключовою науковою проблемою є можливість зображення ядра у формі, узгодженій зі спектральною структурою диференціального виразу (2). Розв'язання цієї задачі забезпечує наведена нижче теорема.

Значущість отриманого результату полягає у трьох аспектах. По-перше, теорема встановлює повну характеристику розглянутого класу ядер у формі необхідних і достатніх умов, що гарантує не лише конструктивність, а й вичерпність запропонованого підходу. По-друге, ідентифікація матричнозначної аналітичної міри як внутрішнього параметра зображення дозволяє експлікувати механізм кодування властивості додатної визначеності у спектральних даних оператора. По-третє, отримані результати забезпечують узагальнення класичного інтегрального зображення типу Лапласа на випадок еліптичних операторів із молодшими членами. Це суттєво розширює сукупність ядер, що підлягають дослідженню в межах єдиного аналітичного базису.

У роботі доведено теорему, що встановлює аналітичний зв'язок між механізмом представлення ядра та структурою оператора (2). Аргументація будується на аналізі взаємодії між властивістю додатної визначеності, спектральним розкладом та операторною узгодженістю. Достатність: у межах диференціального обмеження $L_xK = L_yK$ здійснюється побудова інтегрального зображення із залученням фундаментальної системи операторно-генерованих функціоналів та елементарних ядер. Необхідність: обґрунтовується зворотна імплікація, згідно з якою на основі інтегрального зображення відновлюються операторна тотожність та структура додатної визначеності через асоційовану матричнозначну аналітичну міру. Сукупність цих етапів забезпечує повну характеристику досліджуваного класу ядер.

Теорема 1.1. *Нехай $K(x,y) \in C(R^2 \times R^2)$ — ядро д.в.; $\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda)$ і $\chi_\xi^{(1)}(x;\lambda)$ — функціонали, визначені в просторі Z цілих функцій з рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині. Для того, щоб при кожних $x,y \in R^2$ мало місце інтегральне зображення*

$$K(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} (\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda) \otimes \chi_\eta^{(\beta)}(y,\lambda), d\sigma_{\xi\eta}^{\alpha,\beta}(\lambda)) \tag{3}$$

необхідно і досить, щоб ядро $K(x,y)$ задовольняло (у сенсі узагальнених функцій Л. Шварца) рівнянню

$$L_xK = L_yK, \tag{4}$$

і $\Sigma(\lambda) = \left\| \sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)} \right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$ – аналітична міра, яка визначається неоднозначно.

Достатність

Нехай ядро $K(x,y) \in C(R^2 \times R^2)$ є д. в. і для нього виконується (4), тоді, згідно з теоремою 3.2, с. 653 [6], маємо інтегральне зображення у вигляді абсолютно збіжного інтегралу

$$K(x,y) = \int\limits_{\infty}^{\infty} \Omega_\lambda(x,y) d\rho(\lambda), \tag{5}$$

де $d\rho(\lambda)$ — деяка міра, а $\Omega_\lambda(x;y)$ — сімейство елементарних д.в. ядер. Покажемо, що зображення (5) задовольняє умову (4). Для цього знайдемо розв'язок рівняння $Lu = \lambda u$. Нехай $u(x_1,x_2)$ — розв'язок рівняння на всій площині

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a\frac{\partial u}{\partial x_1} - ib\frac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda u. \tag{6}$$

Відомо, що кожен розв'язок еліптичного рівняння з аналітичними коефіцієнтами є аналітичним, отже, якщо коефіцієнти (2) сталі, то існує ціла функція $u(z_1,z_2)$ по кожній із комплексних змінних $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ така, що збігається з функцією $u(x_1,x_2)$, якщо $z_1 = x_1$; $z_2 = x_2$ задовольняють умову (6).

Нехай $v(x_1;x_2) = u(x_1,ix_2)$, тоді рівність (6) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + a\frac{\partial u}{\partial x_1} + b\frac{\partial v}{\partial x_2} = \lambda v \tag{7}$$

Розв'язуючи рівняння (7) методом Рімана, отримуємо зображення v через вихідні дані [див. [6] с. 137]

$$\begin{gathered} v(x_1;x_2) = \frac{1}{2}\left[v(x_1-x_2,0)e^{\left(\frac{-a+b}{2}\right)x_2} + v(x_1+x_2,0)e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)x_2}\right] - \\ -\frac{1}{4}be^{\frac{b}{2}x_2}\int\limits_{x_1-x_2}^{x_1+x_2} J_0\left(\sqrt{c_1}\cdot\sqrt{(x_1-\xi)^2-x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot v(\xi,0)\,d\xi - \end{gathered} \tag{8}$$

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}x_2}\sqrt{c_1}\cdot x_2\int\limits_{x_1-x_2}^{x_1+x_2}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\xi)^2-x_2^2}\right)}{\sqrt{(x_1-\xi)^2-x_2^2}}\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot v(\xi,0)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}x_2}\int\limits_{x_1-x_2}^{x_1+x_2} J_0\left(\sqrt{c_1}\cdot\sqrt{(x_1-\xi)^2-x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot v'_\eta(\xi,0)d\xi,$$

де $c_1=(-4\lambda-a^2-b^2)$, J_0, J_1 функції Бесселя.

Функція $v(z_1;z_2)$ має зміст для довільних z_1,z_2 і буде цілою по кожній змінній та цілою зокрема $v(z_1;0)$, а отже, і $v'_2(z_1;0)$. Оскільки J_0, J_1 є цілими функціями, J_0 — парна, а J_1 — непарна функція Бесселя, то ядра в (1) також будуть цілими по змінній x_2. Звідси випливає, що кожен член у правій частині (1) можна продовжити вздовж x_2 у комплексну площину z_2. Покладаючи $z_2=-ix_2$ та враховуючи, що $v(x_1;-ix_2)=u(x_1;x_2)$, отримуємо наступний розв'язок (6)

$$\begin{aligned}u(x_1;x_2)=&\frac{1}{2}\left[u\left(x_1+ix_2,0\right)e^{\left(\frac{-a+b}{2}\right)ix_2}+u(x_1-ix_2,0)e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)ix_2}\right]-\\&-\frac{1}{4}ibe^{\frac{b}{2}ix_2}\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} J_0\left(\sqrt{c_1}\cdot\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot u(\xi,0)d\xi-\\&-\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}ix_2}\sqrt{c_1}x_2\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}u(\xi,o)d\xi+\\&+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}ix_2}\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot u'_\eta(\xi,0)d\xi,\\&\qquad (x_1,x_2)\in E_2.\end{aligned}\tag{9}$$

Інтегрування виконується вздовж будь-якої дуги комплексної площини, що з'єднує точки x_1+ix_2 та x_1-ix_2.

Запишемо формулу (9) у спрощеному вигляді.

Для цього позначимо через Z простір цілих функцій $\varphi(\xi)$ однієї комплексної змінної ξ з рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині. Тоді рівняння

$$\begin{aligned}&\left(X^{(0)}_\xi(x;\lambda),\varphi(\xi)\right)=\\&=\frac{1}{2}\left[\varphi(x_1+ix_2,0)e^{\left(\frac{-a+b}{2}\right)ix_2}+\varphi(x_1-ix_2,0)e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)ix_2}\right]-\end{aligned}\tag{10}$$

$$-\frac{1}{4}ibe^{\frac{b}{2}ix_2}\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} J_0\left(\sqrt{c_1}\cdot\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot\varphi(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}e^{i\frac{b}{2}x_2}\sqrt{-c_2}\cdot x_2\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\cdot\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot\varphi(\xi)d\xi;$$

$$\left(X_\xi^{(1)}(x;\lambda),\varphi(\xi)\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}ix_2}\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2} J_0\left(\sqrt{c}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\varphi(\xi)d\xi$$

визначають лінійні неперервні функціонали $\chi^{(0)}(x;\lambda)$ та $\chi^{(1)}(x;\lambda)$ у просторі Z. Отже, у позначеннях (10) формула (9) має такий вигляд

$$\begin{aligned}u(x)=u(x_1,x_2)&=\left(X_\xi^{(0)}(x;\lambda);u(\xi,0)\right)+\left(X_\xi^{(1)}(x;\lambda);u'_\eta(\xi,0)\right)=\\&=u_0(x_1,x_2)+u_1(x_1,x_2),\quad (x=(x_1,x_2)\in E_2).\end{aligned}\tag{11}$$

Оскільки $u_0(x_1,x_2)$ та $u_1(x_1,x_2)$ задовольняють умови

$$u_0(x_1,0)=u(x_1,0),\qquad \frac{\partial u_0(x_1,0)}{\partial x_2}=0;$$

$$u_1(x_1,0)=0,\qquad \frac{\partial u_1(x_1,0)}{\partial x_2}=-iu'_{x_2}(x_1,0),$$

то функції $u_0(x_1,x_2)$ і $u_1(x_1,x_2)$ є лінійно незалежними. А тому, функції $X_\xi^{(0)}(x;\lambda)$ і $X_\xi^{(1)}(x;\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2), де $X_\xi^{(1)}(x;\lambda)$ у звичайному розуміння, а $X_\xi^{(0)}(x;\lambda)$ в загальному. За допомогою цих розв'язків, ми будемо виражати елементарне ядро.

Для цього введемо простір $Z\otimes Z$, який складається з функцій $\varphi(\xi;\eta)$ двох комплексних змінних ξ,η, цілих по кожній змінній. Збіжність у $Z\otimes Z$ є рівномірною в кожній обмеженій (у просторі $((\xi;\eta)\in C_2)$ множині. Далі побудуємо $X_\xi^\alpha\otimes\ X_\xi^\beta\quad(\alpha,\beta=0,1)$. Нехай, наприклад, для $\alpha=0,\ \beta=1$, маємо

$$\left(X_\xi^{(0)}(x;\lambda)\right)\otimes\left(X_\eta^{(1)}(y;\lambda),\varphi(\xi,\eta)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}\left[\varphi\left(x_1+ix_2,\eta\right)e^{\left(-\frac{a+b}{2}\right)ix_2}+\varphi\left(x_1-ix_2,\eta\right)e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)ix_2}\right].$$

$$\cdot J_o\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\eta)^2+x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\eta)}d\eta-$$

$$-\frac{1}{8}ibe^{ibx_2}\cdot\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}J_o\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\eta)^2+x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot$$

$$\cdot J_o\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\eta)^2+x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\eta)}\cdot\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\frac{1}{4}e^{ibx_2}\sqrt{c_1}\cdot x_2\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\xi)}\cdot$$

$$\cdot J_o\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x_1-\eta)^2+x_2^2}\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}(x_1-\eta)}\cdot\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$(x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2)\in E_2).$$

Нехай тепер $\Omega_\lambda(x,y)$ — сімейство елементарних д.в. ядра з (5) для ядра $K(x,y)$. За змінними x та y $\Omega_\lambda(x,y)$ задовольняє умову (6), тому ця функція є цілою за змінними $x_1,\ x_2$, та $y_1,\ y_2$ і кожного ξ $\Omega_\lambda((\xi,0),y)$ і $\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi;0),y)$ задовольняє за змінною y, рівняння (6), а тому для ядра $\Omega_\lambda(x,y)$ спочатку для x, а вже потім, аналогічно для y, можемо застосувати умову (11). В результаті отримуємо

$$\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda),\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\right),\quad (12)$$

де

$$\Omega_\lambda^{(0,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\Omega_\lambda((\xi,0),(\eta,0));$$

$$\Omega_\lambda^{(1,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi,0),(\eta,0));$$

$$\Omega_\lambda^{(0,1)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial y_2}((\xi,0),(\eta,0));$$

$$\Omega_\lambda^{(1,1)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial^2\Omega_\lambda}{\partial x_2\partial y_2}((\xi,0),(\eta,0)).$$

Підставляючи (12) у (5), і поклавши

$$\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta)=\int\limits_\Delta\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))d\rho(\lambda),$$

отримаємо зображення (3).

Інтеграл (3) розуміємо як

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta}^{1}(\chi_{\xi}^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_{\eta}^{(\beta)}(y;\lambda),\,d\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda))=$$

$$=\lim\sum_{n=1}^{N}\sum_{\alpha,\beta}^{1}(\chi_{\xi}^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_{\eta}^{(\beta)}(\lambda_v),\,\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta_n)),$$

де $\Delta_1,\ldots\Delta_N$ – розбиття осі $(-\infty,\infty)$ на інтервалі $\lambda_v\in\Delta_n$, а границя береться за продовженням розбиття. Якщо значення $\chi_{\xi}^{(\alpha)}(\lambda)$ достатньо мале, то λ є достатньо великим, а тому дана границя існує і не залежить від способу розбиття та вибору точок $\lambda_v\in\Delta_n$.

Далі доведемо аналітичність міри $\sum(\Delta)$. Для цього розглянемо матрицю $\sum(\lambda)=\left\|\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)\right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$ – елементами якої є функції $\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$ – цілі по змінних ξ, η і обмеженої варіації по λ. Покажемо, що ця матриця є аналітичною мірою, тобто що $\sum(\Delta)=\sum(b)-\sum(a)\quad(\Delta=(a,b))$ – додатно визначена в даному сенсі, а саме для довільних функціоналів $t_{\xi}^{(0)},t_{\xi}^{(1)}$, визначених у просторі Z, виконується нерівність

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta),\,t_{\xi}^{(\alpha)}\otimes t_{\eta}^{(\beta)}\right)>0.$$

Так визначену міру $\sum(\Delta)$ будемо називати аналітичною.

Отже, для початку виберемо пару точок $x_\alpha\in R^1$ $(\alpha=0,1)$ так, щоб матриця $\left\|\chi_{\xi}^{\alpha}(x_\alpha)\right\|_{\alpha=0}^{1}$ була невиродженою, а кожний функціонал зобразимо у вигляді

$$t_{\xi}^{(\alpha)}=\sum_{k=0}^{1}C_k\chi_{\xi}^{(\alpha)}(x_k;\lambda)\ (\alpha=0,1).$$

Тоді

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta),t_{\xi}^{(\alpha)}\otimes t_{\eta}^{(\beta)}\right)=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\int_{\Delta}\left(\Omega_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))t_{\xi}^{(\alpha)}\otimes t_{\eta}^{(\beta)}\right)d\rho(\lambda)=$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} \int_{\Delta} \left(\Omega_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0)) \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} C_j \overline{C}_k \chi_{\xi}^{(\alpha)}(x_j;\lambda) \otimes \chi_{\xi}^{(\beta)}(x_\eta;\lambda) \right) d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{\Delta} \sum_{j,k}^{1} \Omega_{\lambda} \left(\left(\xi, x_j\right), \left(\eta, \chi_k\right) \right) C_j \overline{C}_k d\rho\left(\lambda\right) \geqslant 0.$$

Достатність доведена.

Необхідність

Нехай маємо інтегральне зображення (3). Доведемо рівність (4).

Оскільки ядро $\Omega_\lambda(x,y) = \sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{1} \left(\chi_{\xi}^{(\alpha)}(x;\lambda) \otimes \chi_{\eta}^{(\beta)}(y;\lambda) \right)$, сумується по $(x,y,\lambda) \in \Im \times \Im \times R^2$ ($\Im \in R^2$ та обмежене) відносно міри $dxdyd\rho(\lambda)$, то справедливими є наступні міркування

$$\left\langle L^{+}u, v \right\rangle = \int_{\Im} \int_{\Im} \left\{ \int_{R^2} \Omega_{\lambda}\left(x;y\right) d\rho\left(\lambda\right) \right\} \left(L^{+}u\right)\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdy =$$

$$= \int_{R^2} \left\{ \int_{\Im} \int_{\Im} \Omega_{\lambda}\left(x;y\right) \left(L^{+}u\right)\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdy \right\} d\rho\left(\lambda\right) =$$

$$= \int_{R^2} \left\{ \int_{\Im} \int_{\Im} \left(\overline{L_y^{+}} \Omega_{\lambda} \right) \left(x;y\right) u\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdybigg\} d\rho\left(\lambda\right) = \tag{13}$$

$$= \int_{R^2} \left\{ \int_{\Im} \int_{\Im} \left(L_x^{+} \Omega_{\lambda} \right) \left(x;y\right) u\left(y\right) \overline{v\left(x\right)} dxdy \right\} d\rho\left(\lambda\right) =$$

$$= \int_{R^2} \left\{ \int_{\Im} \int_{\Im} \Omega_{\lambda}\left(x;y\right) u\left(y\right) \overline{L^{+}v\left(x\right)} dxdy \right\} d\rho\left(\lambda\right) = \left\langle u; L^{+}v \right\rangle$$

(L^{+} – звуження на $u, v \in C_0^{\infty}(\Im)$).

З (13) випливає виконання умови (4).

Теорему доведено.

2. Висновки та подальші дослідження

У межах проведеного дослідження встановлено еквівалентність між додатною визначеністю, операторною узгодженістю та спектральним представленням ядер. Основний результат полягає в узагальненні класичного зображення типу Лапласа на випадок еліптичного оператора другого порядку

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + a\frac{\partial}{\partial x_1} - ib\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Це дозволяє врахувати вплив молодших членів диференціального виразу, зберігаючи при цьому повну характеристику відповідного класу ядер у термінах необхідних і достатніх умов.

Ключовим моментом є перехід від скалярного спектрального опису до матричнозначної аналітичної міри, що пов'язана з фундаментальною системою операторно-генерованих функціоналів. Такий підхід робить зображення внутрішньо узгодженим із структурою оператора та забезпечує конструктивну параметризацію ядер за допомогою явних спектральних даних.

Запропонований підхід пов'язує класичну теорію операторів із сучасними ядерними методами. Це дозволяє будувати ядра, що адаптовані до конкретних диференціальних рівнянь, що є важливим для задач апроксимації та моделювання процесів, які описуються рівняннями у частинних похідних.

Перспективи подальшої роботи пов'язані з поширенням цих результатів на оператори вищого порядку та випадки зі змінними коефіцієнтами. Окремим завданням є врахування граничних умов у обмежених областях, а також дослідження властивостей регулярності та швидкості спадання ядер залежно від характеристик спектральної міри.

Література

1. V. I. Paulsen, M. Raghupathi, *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Cambridge University Press, 2016. doi:10.1017/CBO9781316219232
2. S. Saitoh, Y. Sawano, *Theory of Reproducing Kernels and Applications*, Springer, 2016. doi:10.1007/978-981-10-0530-5
3. G. E. Fasshauer, M. J. McCourt, *Kernel-based Approximation Methods Using MATLAB*, World Scientific, 2015. doi:10.1142/9789814630153
4. V. Borovitskiy, A. Terenin, P. Mostowsky, M. P. Deisenroth, *Matérn Gaussian Processes on Riemannian Manifolds*, in: *Advances in Neural Information Processing Systems 33 (NeurIPS 2020)*, 2020. doi:10.48550/arXiv.2006.10160
5. M. Hutchinson, A. Terenin, V. Borovitskiy, S. Takao, Y. W. Teh, M. P. Deisenroth, *Vector-valued Gaussian Processes on Riemannian Manifolds via Gauge Independent Projected Kernels*, in: *Advances*

in Neural Information Processing Systems 34 (NeurIPS 2021), 2021. doi:10.48550/arXiv.2110.14423
6. Ju. M. Berezanskii, Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968, 809 p. https://bookstore.ams.org/mmono-17
7. P. Batlle, M. D. Darcy, B. Hosseini, H. Owhadi, *Kernel methods are competitive for operator learning*, *Journal of Computational Physics* **496** (2024), 112549. doi:10.1016/j.jcp.2023.112549

Стаття надійшла до редакційної колегії 02.03.2026 р.
Прийнято до друку 04.04.2026 р.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF POSITIVE DEFINITE KERNELS FOR SECOND-ORDER ELLIPTIC OPERATORS

I.V.Andrusyak[1*], **O.Ya.Brodyak**[1]
[1] *Lviv Polytechnic National University;*
79000, 12 Stepana Bandery street, Lviv, Ukraine;
e-mail: ivanna.v.andrusyak@lpnu.ua, oksana.y.brodiak@lpnu.ua

The paper investigates positive definite kernels of two variables associated with an elliptic differential expression of the second order containing the lower coefficients. For the specified class of operators, a necessary and sufficient condition for the existence of an integral image of the kernel in the form of an expansion in the fundamental system of operator-generated functionals with respect to a matrix-valued analytic measure is established. The proposed construction generalizes the classical scheme of integral images of the Laplace type to the case of non-self-adjoint differential structures. The obtained results provide a constructive parameterization of the class of admissible kernels through the spectral data of the corresponding operator, which opens up new possibilities for the analysis of correlation functions in the theory of random fields and spectral theory.

Key words: *positive definite kernel; integral representations; elliptic operator; spectral measure.*