
МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Теорія ймовірностей

УДК 517.9

MSC 2020: 35S16

DOI: 10.31471/2304-7399-2026-22(83)-95-104

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ТРЕТЬОЮ ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ НА ГІПЕРПЛОЩИНІ

С.В. Дідик[✉], М.М. Осипчук*[✉]

Карпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, Україна
e-mail: sergiididyk@gmail.com, mykhailo.osypchuk@cnu.edu.ua

Метою статті є дослідження третьої початково-крайової задачі для параболічного псевдодиференціального рівняння, пов'язаного з ротаційно-інваріантним стійким з показником більшим 1 і меншим 2 випадковим процесом у багатовимірному евклідовому просторі. Рівняння є лінійним зі сталими коефіцієнтами відносно частинної похідної за часом невідомої функції та її дробового лапласіана порядку, який рівний показнику випадкового процесу. Гранична умова формулюється на гіперплощині. Вона прирівнює лінійну комбінацію зі змінними коефіцієнтами односторонніх границь псевдопохідної порядку меншого, ніж число на 1 менше від степеня процесу у напрямку нормалі до гіперплощини та значення самої невідомої функції з деяким змінним невід'ємним множником. Доведено існування та єдиність у певному класі функцій фундаментального розв'язку розглянутої задачі.

Ключові слова: початково-крайова задача, псевдодиференціальне рівняння, фундаментальний розв'язок, потенціал простого шару, стійкий випадковий процес.

Вступ

Нехай в d -вимірному дійсному евклідовому просторі \mathbb{R}^d (вважаємо, що $d \geq 2$) задана гіперплощина S рівнянням $(x, \nu) = 0$, в якому $\nu \in \mathbb{R}^d$ — деякий фіксований одиничний вектор. Як звичайно, запис (\cdot, \cdot) позначає скалярний добуток в \mathbb{R}^d . Через \mathbb{R}_+^d і \mathbb{R}_-^d позначимо півпростори, які задаються нерівностями $(x, \nu) > 0$, $(x, \nu) < 0$, відповідно, а $\mathbb{R}_S^d = \mathbb{R}_+^d \cup \mathbb{R}_-^d$.

В цій статті ми розглядаємо псевдодиференціальне рівняння виду

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = c \cdot \Delta_\alpha u(t, \cdot)(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}_S^d, \quad (1)$$

в якому оператор Δ_α задається своїм символом $(-|\lambda|^\alpha)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$, а $c > 0$, $\alpha \in (1, 2)$ сталі. Тут і далі запис $|\cdot|$ означає як і евклідову норму в \mathbb{R}^d , так і абсолютну величину числа. Позначення Δ_θ також буде використовуватись для відповідного оператора і при інших можливих значень параметра $\theta \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що оператор $c \cdot \Delta_\alpha$ з $c > 0$, $\alpha \in (0, 2]$ є твірним оператором ротаційно-інваріантного α -стійкого випадкового процесу з показником α і параметром масштабу c . В цій роботі ми розглядаємо тільки випадок $\alpha \in (1, 2)$.

Нехай задана функція $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, де через $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ позначено банахів простір з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$ неперервних обмежених дійсно-значних функцій заданих на \mathbb{R}^d .

Задамо початкову умову для рівняння (1) рівністю

$$u(0+, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}_S^d. \quad (2)$$

Задамо оператор ∇_β з деяким фіксованим $\beta \in (0, \alpha - 1)$ символом $(i\lambda|\lambda|^{\beta-1})_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$. Очевидно, що цей оператор є векторнозначним. Через ∇_β^v позначатимемо оператор (∇_β, ν) .

Зауваження 1. В статті використовуються позначення Δ_θ та ∇_θ і при інших допустимих значеннях параметра θ . Крім того, буде використовуватись очевидна рівність $\nabla_{\theta_1} \cdot \Delta_{\theta_2} = -\nabla_{\theta_1 + \theta_2}$, правильна на множині тих функцій, для яких визначені дії всіх цих операторів.

Задавши деякі неперервні та обмежені функції $(q(x))_{x \in S}$, $(r(x))_{x \in S}$ (припускатимемо, що $r(x) \geq 0$ при всіх $x \in S$), розглянемо крайову умову для рівняння (1) на гіперплощині S ($t > 0$, $x \in S$):

$$\frac{1 + q(x)}{2} \nabla_\beta^v u(t, \cdot)(x+) - \frac{1 - q(x)}{2} \nabla_\beta^v u(t, \cdot)(x-) = r(x)u(t, x). \quad (3)$$

Тут позначення $f(x\pm)$ означає границю функції $f(z)$ якщо z наближається до x вздовж довільної неперервної кривої, яка повністю лежить у деякому відкритому конусі \mathcal{K} з вершиною в точці x , такому, що $\mathcal{K} \subset \overline{\mathbb{R}_+^d}$ для $f(x+)$ чи $\mathcal{K} \subset \overline{\mathbb{R}_-^d}$ для $f(x-)$.

Зауваження 2. Форма крайової умови продиктована тим фактом, що траєкторії α -стійкого (з $\alpha \in (1, 2)$) випадкового процесу є розривними. І перш, ніж потрапити на гіперплощину S він відвідує як \mathbb{R}_+^d , так і \mathbb{R}_-^d з додатною ймовірністю нескінченну кількість разів.

Основним об'єктом нашого дослідження є факт існування розв'язку рівняння (1), який задовольняє початкову умову (2) та крайову умову (3). Подібна задача розглядалася в [1] у випадку $\beta = \alpha - 1$ та в [5] для обмеженої замкненої поверхні S . Перш ніж сформулювати основний результат введемо кілька позначень. Для фіксованих $\alpha \in (1, 2)$, $c > 0$ фундаментальний розв'язок рівняння (1) при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ задається рівністю

$$g(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(y-x, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha\} d\lambda,$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. Для даної функції $\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ задамо функцію

$$u(t, x, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t, x, y) \varphi(y) dy,$$

яка є розв'язком задачі (1) – (2) в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Результат, якому присвячена дана робота, міститься у формулюванні наступної теореми. В ній під фундаментальним розв'язком сформульованої задачі ми розуміємо таку функцію $(G(t, x, y))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d}$, що її розв'язок може бути представлений у вигляді $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t, x, y) \varphi(y) dy$.

Нарешті через $\mathbb{F}_\gamma(\mathbb{R}^d)$ позначимо клас функцій ψ заданих на \mathbb{R}^d таких, що функція $(\mathcal{F}^{-1}[\psi, \lambda]|\lambda|^\gamma)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$ абсолютно інтегровна на \mathbb{R}^d (символом $\mathcal{F}^{-1}[\psi, \cdot]$ позначено обернене перетворення Фур'є функції ψ).

Теорема 1. Нехай $\frac{\alpha-1}{2} < \beta < \alpha - 1$, $1 < \alpha < 2$, функції $(r(x))_{x \in S}$, $(q(x))_{x \in S}$ неперервні та обмежені ($r(x) \geq 0$, $x \in S$). Припустимо, що рівняння з (1) виконується при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_S^d$, а в умові (2) функція $\varphi \in (\mathbb{C}_b \cap \mathbb{F}_{-\alpha+\beta+1})(\mathbb{R}^d)$.

Тоді розв'язком задачі (1) – (3) є функція $(U(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$U(t, x, \varphi) = H(t, x, \varphi) + 2c \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1} g(t-\tau, \cdot, z)(x) r(z) U(\tau, z, \varphi) d\sigma_z, \quad (4)$$

де функція $(H(t, x, \varphi))_{t>0, x \in \mathbb{R}^d}$ задається співвідношенням

$$H(t, x, \varphi) = \Delta_{\alpha-\beta-1} u(t, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1} \varphi)(x) - 2c \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1} g(t-\tau, \cdot, z)(x) q(z) \nabla_{\alpha-1}^v u(\tau, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1} \varphi)(z) d\sigma_z. \quad (5)$$

Рівняння (4) має єдиний розв'язок в класі функцій, які для кожного $T > 0$ задовольняють оцінку ($t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$)

$$|U(t, x)| \leq C_T t^{-1+\frac{\beta+1}{\alpha}}, \quad (6)$$

з деякими сталими $C_T > 0$.

Існує фундаментальний розв'язок задачі (1) – (3).

В наступному пункті будуть сформульовані основні поняття та допоміжні результати, необхідні для розуміння подальших викладок. Основний результат роботи доведено в пункті 2.

1. Деякі поняття та допоміжні результати

Перш за все нагадаємо поняття потенціалу простого шару для рівняння (1) (див., наприклад, [2]). Функція визначена рівністю

$$p(t, x) = \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y) \psi(\tau, y) d\sigma_y, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (7)$$

називається (якщо відповідний інтеграл збігається) потенціалом простого шару для рівняння (1). Функцію ψ тут є густиною потенціалу. Відомо (див. [2, 4]), що за умови неперервності густини потенціалу та задоволення нею нерівності $|\psi(t, x)| \leq C_T t^\theta$ при всіх $t \in (0, T]$, $x \in S$ з деякими сталими $C_T > 0$ і деякою сталою $\theta > -1$ потенціал простого шару (7) існує і задовольняє нижче сформульовані властивості.

Твердження 1.1. [2, пункт 2.2] Функція (7) задовольняє рівняння з (1) в області $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_S^d$.

Твердження 1.2. [4, теорема 1] У випадку $0 < \beta < \alpha - 1$ справджуються рівності

$$\nabla_{\beta}^v p(t, \cdot)(x \pm) = \int_0^t d\tau \int_S \nabla_{\beta}^v g(t-\tau, \cdot, y)(x) \psi(\tau, y) d\sigma_y, \quad t > 0, x \in S,$$

Твердження 1.3. [2, теорема 1] Справджуються рівності

$$\nabla_{\alpha-1}^v p(t, \cdot)(x \pm) = \mp \frac{1}{2c} \psi(t, x), \quad t > 0, x \in S.$$

Зауваження 3. Можливість внесення операторів типу Δ_θ та ∇_θ ($\theta \leq \alpha$) під знаки інтегралів в потенціалі простого шару (7) при $x \in \mathbb{R}_S^d$ легко встановлюється (див., наприклад, [2]) з допомогою нижче наведених оцінок для функції g . Твердження 1.2 та 1.3 показують, як це слід робити в точках поверхні S .

При всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$, функція g задовольняє нерівності (див. [3, р.4]):

$$\begin{aligned} \frac{C_1 t}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha}} &\leq g(t,x,y) \leq \frac{C_2 t}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\alpha}}; \\ |\nabla_\theta g(t, \cdot, y)(x)| &\leq \frac{C_\theta}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\theta}}, \quad \theta \in (0; \alpha]; \\ |\Delta_\theta g(t, \cdot, y)(x)| &\leq \frac{C_\theta}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\theta}}, \quad \theta \in (0; \alpha]. \end{aligned} \quad (8)$$

Крім того, корисною буде нерівність (див. [2, Lemma 1])

$$\int_S \frac{d\sigma_y}{(t^{1/\alpha} + |x-y|)^{d+\theta}} \leq C t^{-\frac{\theta+1}{\alpha}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (9)$$

яка справджується при кожному $\theta > -1$ з деякою сталою $C > 0$.

Зауваження 4. Скрізь в цій роботі для позначення сталих, конкретне значення яких не має значення для наступних викладок, використовується C навіть якщо вони різні. За потреби вказати залежність сталої від якихось параметрів використовуємо відповідні індекси.

2. Доведення основного результату

Цей пункт присвячено доведенню основного результату роботи, сформульованого у вступі.

Доведення теореми 1. Для початку зауважимо, що збіжність інтеграла у правій частині рівності (5) впливає з наступних міркувань. По перше, оскільки $\Delta_{-\alpha+\beta+1}\varphi \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^d)$, то з нерівності (8) впливає, що

$$|\Delta_{\alpha-\beta-1}u(t, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1}\varphi)(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy}{(1+|y|)^{d+\alpha-\beta-1}} t^{-1+\frac{\beta+1}{\alpha}}, \quad (10)$$

$$|\nabla_{\alpha-1}^v u(\tau, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1}\varphi)(z)| \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy}{(1+|y|)^{d+\alpha-1}} \tau^{-1+\frac{1}{\alpha}}. \quad (11)$$

Тому, враховуючи (8) і (9), можемо стверджувати, що функція H визначена коректно.

Відразу зауважимо, що другий доданок $H_2(t, x, \varphi)$ в правій частині (5) при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_S^d$ задовольняє нерівність (враховуємо обмеженість функції q та оцінки (8) і (11))

$$|H_2(t, x, \varphi)| \leq C \int_0^t \tau^{-1+\frac{1}{\alpha}} d\tau \int_S \frac{d\sigma_z}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-\beta-1}} \leq \int_0^t \tau^{-1+\frac{1}{\alpha}} d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{dz}{(\rho(x, S) + |z|)^{d+\alpha-\beta-1}} \leq Ct^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (12)$$

Тут $\rho(x, S)$ — відстань точки x від гіперплощини S . Перший доданок $H_1(t, x, \varphi)$ в правій частині рівності (5) може бути представлений у вигляді

$$H_1(t, x, \varphi) = - \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-ct|\lambda|^\alpha + i(x, \lambda)\} |\lambda|^{\alpha-\beta-1} \mathcal{F}^{-1}[\Delta_{-\alpha+\beta+1}\varphi, \lambda] d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{-ct|\lambda|^\alpha + i(x, \lambda)\} \mathcal{F}^{-1}[\varphi, \lambda] d\lambda.$$

Тому $H_1(0+, x, \varphi) = \varphi(x)$ і, отже,

$$H(0+, x, \varphi) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (13)$$

Побудуємо тепер розв'язок рівняння (4), використовуючи метод послідовних наближень. А саме, шукаємо функцію U у вигляді суми ряду

$$U(t, x, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (2c)^k U_k(t, x, \varphi), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (14)$$

де $U_0(t, x, \varphi) = H(t, x, \varphi)$, а при $k \geq 1$,

$$U_k(t, x, \varphi) = \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1} g(t-\tau, \cdot, z)(x) r(z) U_{k-1}(\tau, z, \varphi) d\sigma_z.$$

Оцінимо члени ряду з рівності (14). Оскільки з (10) і (12) маємо $|U_0(t, x, \varphi)| \leq C_T t^{-1+\frac{\beta+1}{\alpha}}$, то, використовуючи обмеженість функції r та нерівність (9), індукцією по k отримуємо оцінки

$$|U_k(t, x, \varphi)| \leq C_T^{k+1} S_k t^{-1+\frac{(k+1)\beta+1}{\alpha}}, \quad t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

які справджуються при кожному $T > 0$ з деякими сталими $C_T > 0$ та числовою послідовністю $\{S_k : k \geq 0\}$, яка задовольняє співвідношення

$$S_0 = 1, \quad S_{k+1} = S_k B\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{k\beta + 1}{\alpha}\right).$$

Це дає нам право стверджувати, що ряд у (14) збігається абсолютно і рівномірно на кожній множині виду $(0, T] \times \mathbb{R}^d$, $T > 0$. Крім того, справджується оцінка ($t \in (0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$)

$$|U(t, x, \varphi)| \leq C_T t^{-1 + \frac{\beta+1}{\alpha}}, \quad (15)$$

для кожного $T > 0$.

Єдиність розв'язку (4) в класі функцій, які задовольняють умову (6), легко випливає з того, що різниця W двох таких розв'язків задовольняє рівняння

$$W(t, x) = 2c \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1} g(t-\tau, \cdot, z)(x) r(z) W(\tau, z) d\sigma_z.$$

Звідси та з оцінки (8) одержуємо, що ($C = 2cC_{\alpha-\beta-1} \|r\|$)

$$|W(t, x)| \leq C \int_0^t d\tau \int_S \frac{1}{((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|)^{d+\alpha-\beta-1}} |W(\tau, z)| d\sigma_z$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. Ігноруючи останню нерівність, з врахуванням (6) та (9), одержуємо, що для кожного $n \geq 1$ та всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$

$$|W(t, x)| \leq C^{n-1} C_T^n 2^{n-1} R_n t^{-1 + \frac{\beta+1}{\alpha}},$$

де числова послідовність $\{R_k : k \geq 1\}$ задовольняє співвідношення $R_{k+1} = R_k B\left(\frac{\beta}{\alpha}, 1 + k\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Таким чином $\lim_{n \rightarrow \infty} C^{n-1} C_T^n R_n = 0$ і $W \equiv 0$.

Тепер пересвідчимось, що побудована функція U є розв'язком задачі (1) – (3). Представивши її у вигляді (див. зауваження 3)

$$\begin{aligned} U(t, x, \varphi) = & \Delta_{\alpha-\beta-1} (u(t, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1} \varphi) - \\ & 2c \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, \cdot, z) q(z) \nabla_{\alpha-1}^v u(\tau, \cdot, \Delta_{-\alpha+\beta+1} \varphi)(z) d\sigma_z + \\ & 2c \int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, \cdot, z) r(z) U(\tau, z, \varphi) d\sigma_z) (x), \end{aligned}$$

робимо висновок, що ця функція задовольняє рівняння (1) при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_S^d$. Дійсно, вона є результатом дії лінійного оператора $\Delta_{\alpha-\beta-1}$ на суму розв'язків рівняння (1) у вказаній області (два останніх доданки є потенціалами простого шару).

Виконання умови (2) випливає з (13) та наступної оцінки (див. (8), (9) і (15))

$$\left| \int_0^t d\tau \int_S \Delta_{\alpha-\beta-1} g(t-\tau, \cdot, z)(x) r(z) U(\tau, z, \varphi) d\sigma_z \right| \leq Ct^{-1+\frac{2\beta+1}{\alpha}},$$

права частина якої прямує до 0 при $t \rightarrow 0+$.

Далі з рівняння (4), враховуючи твердження 1.2, отримуємо, що

$$U(t, x, \varphi) = H(t, x, \varphi) + 2c\Delta_{\alpha-\beta-1} \left(\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, \cdot, z) r(z) U(\tau, z, \varphi) d\sigma_z \right) (x).$$

Тоді оскільки при всіх $t > 0$, $x \in S$ справджується рівність

$$\begin{aligned} \nabla_\beta^v U(t, \cdot, \varphi)(x \pm) &= \nabla_\beta^v H(t, \cdot, \varphi)(x \pm) - \\ &2c\nabla_{\alpha-1}^v \left(\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, \cdot, z) r(z) U(\tau, z, \varphi) d\sigma_z \right) (x \pm) = \\ &\nabla_{\alpha-1}^v u(t, \cdot, \varphi)(x) + \\ &2c\nabla_{\alpha-1}^v \left(\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, \cdot, z) q(z) \nabla_{\alpha-1}^v u(\tau, \cdot, \varphi)(z) d\sigma_z \right) (x \pm) - \\ &2c\nabla_{\alpha-1}^v \left(\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, \cdot, z) r(z) U(\tau, z, \varphi) d\sigma_z \right) (x \pm), \end{aligned}$$

то, враховуючи твердження 1.3, одержуємо

$$\nabla_\beta^v U(t, \cdot, \varphi)(x \pm) = \nabla_{\alpha-1}^v u(t, \cdot, \varphi)(x) \mp q(x) \nabla_{\alpha-1}^v u(t, x, \varphi) \pm r(x) U(t, x, \varphi),$$

А вже звідси маємо, що функція U задовольняє крайову умову (3).

Залишилось обґрунтувати існування фундаментального розв'язку задачі (1) – (3) при вказаних умовах. Але це випливає з того факту, що для кожних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ заряд $U(t, x, \mathbf{1})$ абсолютно неперервний відносно лебегової міри в \mathbb{R}^d . □

Зауваження 5. З представленого доведення випливає, що вимога $\frac{\alpha-1}{2} < \beta$ суттєва тільки при перевірці виконання початкової умови (2). Функція U задовольняє рівняння (1) та крайову умову (3) в кожному випадку $0 < \beta < \alpha - 1$.

Література

1. Osypchuk M.M., Portenko M.I. Symmetric α -stable stochastic process and the third initial-boundary-value problem for the corresponding pseudo-differential equation. Ukr. Math. J. – 2018. – V. 69, №10. P. 1631–1650. doi:10.1007/s11253-018-1459-2
2. Osypchuk M.M., Portenko M.I. On simple-layer potentials for one class of pseudodifferential equations. Ukr. Math. J. – 2016. – V. 67, №11. P. 1704–1720. doi:10.1007/s11253-016-1184-7
3. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-differential Equations of Parabolic Type, Operator Theory Advances and Applications, vol. 152. Birkhäuser Verlag, 2004. doi:10.1007/978-3-0348-7844-9
4. Mamalyha K., Osypchuk M. On single-layer potentials, pseudo-gradients and jump theorem for an isotropic stable stochastic process. J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. – 2024. – V. 15, №4. doi:10.1007/s11868-023-00574-y
5. Didyk S. V., Osypchuk M. M. On an initial-boundary value problem for a parabolic pseudodifferential equation. Matematychni Studii – 2025. – V. 64, №2. P. 153–160. doi:10.30970/ms.64.2.153-160

Стаття надійшла до редакційної колегії 02.03.2026 р.

Прийнято до друку 05.04.2026 р.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARABOLIC PSEUDODIFFERENTIAL EQUATION WITH A THIRD BOUNDARY CONDITION ON THE HYPERPLANE

S.V. Didyk^{id}, M.M. Osypchuk*^{id}

Vasyl Stefanyk Carpathian National University;

76018, 57 Shevchenko str, Ivano-Frankivsk, Ukraine

e-mail: sergiididyk@gmail.com, mykhailo.osypchuk@cnu.edu.ua

The aim of the article is to study the third initial-boundary value problem for a parabolic pseudo-differential equation associated with an isotropic stable with an exponent greater than 1 and less than 2 stochastic process in a multidimensional Euclidean space. The equation is linear with constant coefficients with respect to the partial derivative of the unknown function in time and its fractional Laplacian of order equal to the exponent of the stochastic process. The boundary condition is formulated on the

hyperplane. It equates a linear combination with variable coefficients of one-sided limits of the pseudo-derivative of order less than the number 1 less than the power of the process in the direction of the normal to the hyperplane and the value of the unknown function itself with some variable non-negative factor. The existence and uniqueness in a certain class of functions of the fundamental solution of the problem under consideration are proved.

Key words: *initial-boundary value problem, pseudo-differential equation, fundamental solution, single-layer potential, stable stochastic proces.*