УДК 519.21
MSC 2020: 60G51,60G52,60J75
DOI: 10.31471/2304-7399-2026-22(83)-105-111

ОДНОКРОКОВА АСИМПТОТИКА ПЕРЕТИНІВ ГІПЕРПЛОЩИНИ ЗМІШАНИМ СТІЙКО-БРОУНІВСЬКИМ ВИПАДКОВИМ ПРОЦЕСОМ ЛЕВІ

І. Мельник*
Карпатський національний університет імені Василя Стефаника; вулиця Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, Івано-Франківська область, 76018, Україна;
e-mail: ihor.melnyk.24a@pnu.edu.ua

Ми розглядаємо d-вимірний випадковий процес Леві $X(t)$, який є сумою незалежних випадкових процесів: ротаційно-інваріантного α-стійкого випадкового процесу з показником α між 1 та 2 і броунівського руху. Для фіксованої гіперплощини S розглядаємо однокрокову ймовірність перетину. Основний результат: для будь-якої гладкої тест-функції при прямуванні часу до нуля провідний внесок визначається броунівською складовою і має порядок кореня з t.

Ключові слова: *випадковий процес Леві, стійкий випадковий процес, броунівський рух, перетин гіперплощини, однокрокова асимптотика.*

Вступ

Нехай $(X(t),\mathscr{M}_t,\mathbb{P}_x)$ — марковський випадковий процес на $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 1$, де $\mathscr{M}_t:=\sigma(X(s),0\leqslant s\leqslant t)$. Під $\mathbb{P}_x$ випадковий процес стартує з x, тобто $\mathbb{P}_x\{X(0)=x\}=1$; через $\mathbb{E}_x$ позначаємо математичне сподівання відносно $\mathbb{P}_x$.

Конкретніше, розглянемо d-вимірний випадковий процес Леві $X(t)$, який є частковим випадком марковського випадкового процесу:

$$X(t)=x+X^{(\alpha)}(t)+X^{(2)}(t),\ t\geqslant 0.$$

Складові $X^{(\alpha)}$ та $X^{(2)}$ є незалежними і стартують з нуля. Тут $X^{(\alpha)}$ — ротаційно-інваріантний α-стійкий випадковий процес $(1<\alpha<2)$ з параметром $c>0$, а $X^{(2)}$ — броунівський рух з параметром дифузії $\beta>0$. Характеристична функція приросту випадкового процесу X має вигляд

$$\varphi_t(\lambda):=\mathbb{E}_x e^{i(\lambda,X(s+t)-X(s))}=\exp\{-t\big(c|\lambda|^\alpha+\beta|\lambda|^2\big)\},$$

*Відповідальний автор

де $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $s \geqslant 0$, $t > 0$.

Перехідна густина $g(t,x,y)$ випадкового процесу X записується у вигляді

$$g(t,x,y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\lambda,y-x)-t\left(c|\lambda|^\alpha+\beta|\lambda|^2\right)}\, d\lambda, \qquad t>0,\ x,y\in\mathbb{R}^d.$$

Фіксуємо гіперплощину $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) = 0\}$, де ν — одиничний вектор, а також півпростори $D_\pm = \{x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) \gtrless 0\}$. Для $x,y \in \mathbb{R}^d$ введемо індикатор *перетину гіперплощини* S *за один крок* при переході з точки x в точку y чи навпаки:

$$v(x,y) := \mathbb{1}_{D_-}(x)\,\mathbb{1}_{D_+}(y) + \mathbb{1}_{D_+}(x)\,\mathbb{1}_{D_-}(y).$$

Для $t > 0$ визначимо *однокрокову* функцію перетину

$$v_t(x) := \mathbb{E}_x\, v\big(x, X(t)\big), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Локалізація і допоміжні леми

Лема 1.1. *Нехай $Z_t \sim N(0,2\beta t)$, а J_t — симетрична α-стійка випадкова величина з показником $\alpha \in (1,2)$ та параметром масштабування ct, незалежна від Z_t. Тоді*

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1/2}\,\mathbb{E}\,|Z_t + J_t| \;=\; 2\sqrt{\beta/\pi}.$$

Доведення. Запишемо: $Z_t = \sqrt{t}\,\tilde Z$, $J_t = t^{1/\alpha}\tilde J$, де $\tilde Z \sim N(0,2\beta)$, а $\tilde J$ — симетрична α-стійка випадкова величина з параметром масштабування c. Позначимо

$$\gamma := \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \in (0,\tfrac12), \qquad W_t := \big|\tilde Z + t^\gamma \tilde J\big|.$$

Тоді

$$t^{-1/2}\,\mathbb{E}|Z_t + J_t| = \mathbb{E}\, W_t.$$

Оскільки $t^\gamma \to 0$ при $t \downarrow 0$, маємо $W_t \to |\tilde Z|$ майже напевно.

Для будь-якого $t \in (0,1]$ нерівність трикутника дає

$$W_t \leqslant |\tilde Z| + t^\gamma |\tilde J| \leqslant |\tilde Z| + |\tilde J| =: Y.$$

При $\alpha > 1$ існує перший абсолютний момент $\mathbb{E}|\tilde J| < \infty$ (див., напр., [1, с. 162]), а для $\tilde Z$ маємо $\mathbb{E}|\tilde Z| = 2\sqrt{\beta/\pi}$. Отже $\mathbb{E} Y < \infty$, і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathbb{E}\, W_t = \mathbb{E}|\tilde Z| = 2\sqrt{\beta/\pi}.$$

□

Лема 1.2 (Трикутна нерівність для усічених степенів)**.** *Нехай* $u,v \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $p \geqslant 1$. *Тоді*

$$\big(\min\{|u+v|,A\}\big)^p \;\leqslant\; 2^{p-1}\Big[\big(\min\{|u|,A\}\big)^p + \big(\min\{|v|,A\}\big)^p\Big].$$

Доведення. Покладемо $x := \min\{|u|,A\}$, $y := \min\{|v|,A\} \geqslant 0$. Тоді

$$\min\{|u+v|,A\} \leqslant \min\{|u|+|v|,A\} \leqslant x+y.$$

Далі, за опуклістю функції $t \mapsto t^p$:

$$(x+y)^p \leqslant 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

□

Лема 1.3 (Хвостова оцінка для α-стійкої випадкової величини)**.** *Нехай* J_t *— симетрична* α*-стійка випадкова величина з показником* $\alpha \in (0,2)$ *та параметром масштабування* ct. *Тоді існує стала* $K_{\alpha,c} > 0$ *така, що для всіх* $t \in (0,1]$ *та* $u > 0$

$$\mathbb{P}\{|J_t| > u\} \leqslant K_{\alpha,c}\, t\, u^{-\alpha}.$$

Доведення. Маємо $J_t \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} J_1$, отже

$$\mathbb{P}\{|J_t| > u\} = \mathbb{P}\{|J_1| > u t^{-1/\alpha}\}.$$

Для симетричної α-стійкої випадкової величини відомо, що “хвости” мають порядок $x^{-\alpha}$: існує стала $K_{\alpha,c} > 0$ така, що $\mathbb{P}(|J_1| > x) \leqslant K_{\alpha,c} x^{-\alpha}$, $x > 0$ (див., напр., [2, с. 16]). Тому $\mathbb{P}\{|J_t| > u\} \leqslant K_{\alpha,c}(u t^{-1/\alpha})^{-\alpha} = K_{\alpha,c}\, t\, u^{-\alpha}$, що і треба було довести. □

Лема 1.4 (Усічений третій момент для α-стійкої випадкової величини)**.** *Нехай* J_t *— симетрична* α*-стійка випадкова величина з показником* $\alpha \in (1,2)$ *та параметром масштабування* ct. *Тоді існує* $C_{\alpha,c} > 0$ *таке, що для всіх* $t \in (0,1]$ *і* $A > 0$:

$$\mathbb{E}\big[(|J_t| \wedge A)^3\big] \;\leqslant\; C_{\alpha,c}\, t\, A^{3-\alpha}.$$

Доведення. За лемою 1.3 для всіх $t \in (0,1]$ та $v > 0$ маємо

$$\mathbb{P}(|J_t| > v) \leqslant K_{\alpha,c}\, t\, v^{-\alpha}.$$

Розглянемо $g(v) := (v \wedge A)^3$; ця функція неперервна і диференційовна на $(0,A) \cup (A,+\infty)$, і $g'(v) = 3v^2 \mathbf{1}_{(0,A)}(v)$. Отримуємо

$$\mathbb{E}\, g(|J_t|) = \int_0^\infty g'(v)\, \mathbb{P}(|J_t| > v)\, dv = \int_0^A 3v^2\, \mathbb{P}(|J_t| > v)\, dv.$$

Підставляючи оцінку хвоста, одержуємо

$$\mathbb{E}\big[(|J_t| \wedge A)^3\big] \leqslant 3K_{\alpha,c}\, t \int_0^A v^{2-\alpha}\, dv = \frac{3K_{\alpha,c}}{3-\alpha}\, t A^{3-\alpha} =: C_{\alpha,c}\, t A^{3-\alpha},$$

що і доводить лему. □

2. Основний результат: узагальнена асимптотика

Теорема 1 (Однокрокова границя). *Нехай $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ та $S = \{x \in \mathbb{R}^d : (x,\nu) = 0\}$, де ν — одиничний вектор. Покладемо*

$$I(t) := t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^d} v_t(x)\, \phi(x)\, dx.$$

Тоді при $t \downarrow 0$

$$I(t) \;\longrightarrow\; \kappa_B \int_S \phi(y)\, d\sigma_y, \qquad \kappa_B = 2\sqrt{\beta/\pi}.$$

Доведення. **Крок 1: розклад уздовж нормалі та локалізація.** Виберемо ортонормальну систему координат так, щоб остання вісь була вздовж ν. Тоді $x = \theta + r\nu$, де $\theta \in S$, $r \in \mathbb{R}$, і $dx = d\sigma_\theta\, dr$. Отже

$$I(t) = \int_S K_t(\theta)\, d\sigma_\theta, \qquad \text{де } K_t(\theta) := t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} v_t(\theta + r\nu)\, \phi(\theta + r\nu)\, dr.$$

Оскільки ϕ має компактний носій, існує $A := A_\phi > 0$ таке, що для всіх $\theta \in S$ маємо $\phi(\theta + r\nu) = 0$ при $|r| > A$, і тому

$$K_t(\theta) = t^{-1/2} \int_{-A}^{A} v_t(\theta + r\nu)\, \phi(\theta + r\nu)\, dr.$$

Крок 2: розклад Тейлора для тест-функції. Для кожних $\theta \in S$ та $r \in \mathbb{R}$ існує $\xi_\theta(r) \in (0,1)$ таке, що

$$\phi(\theta + r\nu) = \phi(\theta) + r\, \partial_\nu \phi(\theta) + \tfrac{1}{2} r^2 R_\theta(r),$$

де $R_\theta(r) := \partial^2_{\nu\nu}\phi\big(\theta + \xi_\theta(r)\, r\nu\big)$. Нехай $M := \|\partial^2_{\nu\nu}\phi\|_\infty < \infty$, тоді $|R_\theta(r)| \leqslant M$. Підставляючи, дістаємо розклад

$$K_t(\theta) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}),$$

де

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \phi(\theta)\, t^{-1/2} \int_{-A}^{A} v_t(\theta + r\nu)\, dr,\\
(\mathrm{II}) &= \partial_\nu \phi(\theta)\, t^{-1/2} \int_{-A}^{A} r\, v_t(\theta + r\nu)\, dr,\\
(\mathrm{III}) &= \tfrac{1}{2} t^{-1/2} \int_{-A}^{A} r^2 R_\theta(r)\, v_t(\theta + r\nu)\, dr.
\end{aligned}$$

Крок 3: головний внесок. Нехай для $x \in \mathbb{R}^d$, $r := (x, \nu)$, а $\theta := x - r\nu \in S$. Тоді проєкція на ν має вигляд

$$(X(t), \nu) = r + Y, \qquad Y := Z_t + J_t,$$

де $Z_t \sim N(0, 2\beta t)$, а J_t — симетрична α-стійка випадкова величина з показником $\alpha \in (1,2)$ та параметром масштабування ct. Тому

$$v_t(\theta + r\nu) = \mathbb{P}\{r(r+Y) \leqslant 0\}.$$

Для фіксованого $y \in \mathbb{R}$ інтеграл $\int_{-A}^{A} \mathbf{1}_{\{r(r+y) \leqslant 0\}}\, dr$ дорівнює $|y| \wedge A$, і за теоремою Фубіні

$$\int_{-A}^{A} v_t(\theta + r\nu)\, dr = \mathbb{E}\big(|Y| \wedge A\big).$$

Отже

$$(\mathrm{I}) = \phi(\theta)\, t^{-1/2}\, \mathbb{E}\big(|Z_t + J_t| \wedge A\big).$$

Покажемо, що

$$t^{-1/2}\, \mathbb{E}\big(|Z_t + J_t| \wedge A\big) \underset{t \downarrow 0}{\longrightarrow} 2\sqrt{\beta/\pi}. \tag{1}$$

Справді, позначивши $a_+ := \max\{a, 0\}$, запишемо

$$t^{-1/2}\mathbb{E}\big(|Y| \wedge A\big) = t^{-1/2}\mathbb{E}|Y| - t^{-1/2}\mathbb{E}\big(|Y| - A\big)_+.$$

Перший доданок збігається до $2\sqrt{\beta/\pi}$ за лемою 1.1. Другий доданок оцінюємо через “хвости”:

$$\mathbb{E}(|Y| - A)_+ = \int_A^\infty \mathbb{P}\{|Y| > u\}\, du,$$

причому
$$\mathbb{P}\{|Y|>u\}\leqslant \mathbb{P}\{|Z_t|>u/2\}+\mathbb{P}\{|J_t|>u/2\}.$$
Для гаусівської змінної маємо експоненційний спад, і, зокрема,
$$\int_A^\infty \mathbb{P}\{|Z_t|>u/2\}\,du=o(\sqrt{t})\qquad (t\downarrow 0).$$
Для α-стійкого доданка використовуємо лему 1.3: при $u\geqslant A$ маємо
$$\mathbb{P}\{|J_t|>u/2\}\leqslant K_{\alpha,c}\,t\,(u/2)^{-\alpha}=\widetilde{K}_{\alpha,c}\,t\,u^{-\alpha},\qquad \widetilde{K}_{\alpha,c}:=K_{\alpha,c}\,2^{\alpha}.$$
Звідки
$$\int_A^\infty \mathbb{P}\{|J_t|>u/2\}\,du\leqslant \widetilde{K}_{\alpha,c}\,t\int_A^\infty u^{-\alpha}\,du=\frac{\widetilde{K}_{\alpha,c}}{\alpha-1}\,tA^{1-\alpha}.$$
Отже, $t^{-1/2}\mathbb{E}(|Y|-A)_+=o(1)$, і (1) доведено. Таким чином, $(\mathrm{I})\to\kappa_B\,\phi(\theta)$.

Крок 4: лінійний член.
$$\int_{-A}^{A} r\,\nu_t(\theta+r\nu)\,dr=\mathbb{E}\left[\int_{-A}^{A} r\,\mathbf{1}_{\{r(r+Y)\leqslant 0\}}\,dr\right].\tag{2}$$
Для фіксованого y маємо
$$\int_{-A}^{A} r\,\mathbf{1}_{\{r(r+y)\leqslant 0\}}\,dr=-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(y)\,(|y|\wedge A)^2.$$
Права частина є непарною функцією y, а розподіл Y симетричний, тому математичне сподівання в (2) дорівнює нулю, і $(\mathrm{II})=0$.

Крок 5: квадратичний залишок. Оскільки $\int_{-A}^{A} r^2\,\mathbf{1}_{\{r(r+y)\leqslant 0\}}\,dr=\frac{1}{3}\,(|y|\wedge A)^3$, то
$$|(\mathrm{III})|\leqslant \tfrac{M}{6}\,t^{-1/2}\,\mathbb{E}\big[(|Y|\wedge A)^3\big].$$
За лемою 1.2 (при $p=3$) маємо
$$(|Y|\wedge A)^3\leqslant 4(|Z_t|\wedge A)^3+4(|J_t|\wedge A)^3.$$
Тоді $\mathbb{E}|Z_t|^3=O(t^{3/2})$, а за лемою 1.4 $\mathbb{E}[(|J_t|\wedge A)^3]=O(t)$, отже $|(\mathrm{III})|=O(t)+O(t^{1/2})\to 0$.

Крок 6: перехід до границі в $I(t)$. Маємо $K_t(\theta)\to\kappa_B\phi(\theta)$ для кожного $\theta\in S$. Крім того,
$$|K_t(\theta)|\leqslant \|\phi\|_\infty\,t^{-1/2}\,\mathbb{E}(|Y|\wedge A)\leqslant \|\phi\|_\infty\big(\mathbb{E}|\tilde{Z}|+\mathbb{E}|\tilde{J}|\big),$$

З огляду на компактність носія ϕ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність отримуємо:

$$\lim_{t\downarrow 0} I(t) = \kappa_B \int_S \phi(\theta)\, d\sigma_\theta.$$

Теорема доведена. $\square$

3. Висновки та подальші дослідження

Отримано асимптотику однокрокової ймовірності перетину гіперплощини для змішаного стійко-броунівського випадкового процесу Леві. Показано, що при $t \downarrow 0$ провідний внесок визначається броунівською складовою і має порядок $\sqrt{t}$ з множником $\kappa_B = 2\sqrt{\beta/\pi}$.

Література

1. K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, 1999.
2. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, 1994.

Стаття надійшла до редакційної колегії 05.03.2026 р.
Прийнято до друку 14.04.2026 р.

ONE-STEP ASYMPTOTICS OF HYPERPLANE CROSSINGS BY A MIXED STABLE-BROWNIAN LÉVY PROCESS

I. Melnyk*
Vasyl Stefanyk Carpathian National University; 57 Shevchenko street, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine;
e-mail: ihor.melnyk.24a@pnu.edu.ua

We consider a d-dimensional Lévy random process $X(t)$ which is the sum of independent random processes: a rotationally invariant α-stable random process with index α between 1 and 2, and a Brownian motion. For a fixed hyperplane S we study the one-step crossing probability. The main result: for any smooth test function, as time tends to zero, the leading contribution is determined by the Brownian component and has order $\sqrt{t}$.

Key words: *Lévy random process, stable random process, Brownian motion, hyperplane crossing, one-step asymptotics.*