

УДК 622.692.4:519.87

DOI: 10.31471/2304-7399-2026-22(83)-222-233

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ВИТОКУ НАФТИ З ТРУБОПРОВОДУ В ПОРИСТЕ СЕРЕДОВИЩЕ З УРАХУВАННЯМ ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ОПОРУ ҐРУНТУ

Б. В. Герасименко* , Ю. І. Дорошенко 

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;

76019, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, Україна

e-mail: bohdan.herasymenko-a18522@nung.edu.ua,

yuliia.doroshenko@nung.edu.ua

У статті розглянуто задачу математичного моделювання динаміки витоку нафти з магістрального трубопроводу в пористе ґрунтове середовище з урахуванням фільтраційного опору. Актуальність роботи зумовлена необхідністю підвищення точності прогнозування масштабів забруднення при аварійних розгерметизаціях трубопроводів. Метою дослідження є розробка аналітичної моделі нестационарної фільтрації та визначення впливу фільтраційного протитиску на інтенсивність витоку. Керуюче рівняння сформульовано у термінах надлишкового тиску з використанням коефіцієнта n' єзопровідності, що забезпечує коректний розмірнісний баланс усіх членів рівняння. Для розв'язання задачі застосовано методи інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є, на основі яких отримано аналітичний розв'язок у вигляді функції Гріна для напівпростору з точковим джерелом. Для врахування нелінійного зворотного впливу фільтраційного протитиску на витрату витоку запропоновано ітераційний алгоритм, який забезпечує узгодження динаміки тискового поля та інтенсивності джерела. Проведено порівняльний аналіз для ґрунтів із різними фільтраційними характеристиками, що дозволило встановити суттєву залежність тривалості нестационарної фази від n' єзопровідності середовища. Отримані результати можуть бути використані для оцінки обсягів втрат нафти, прогнозування поширення забруднення та обґрунтування інженерних рішень при ліквідації аварійних витоків.

Ключові слова: математичне моделювання, нестационарна фільтрація, витік нафти, трубопровід, пористе середовище, фільтраційний опір, коефіцієнт n' єзопровідності, функція Гріна.

Розгерметизація магістральних нафтопроводів є одним із найбільш небезпечних чинників техногенного впливу на довкілля, що призводить

до забруднення ґрунтового покриву та підземних водоносних горизонтів. Масштаби та швидкість поширення нафти в пористому середовищі визначаються сукупністю гідродинамічних і фізико-хімічних процесів, серед яких ключову роль відіграють фільтраційні властивості ґрунту, стисливість системи «рідина – пористе середовище» та характер джерела витоку. У зв'язку з цим актуальною є задача кількісного прогнозування динаміки формування ареалу забруднення, що необхідно для оцінки екологічних ризиків та планування заходів локалізації і рекультивациі.

Принциповим обмеженням класичних аналітичних розв'язків є припущення про сталість витрати витоку. У реальних умовах ґрунт чинить гідродинамічний опір потоку, що поступово зростає зі збільшенням об'єму вилитої нафти та формує зону підвищеного пластового тиску навколо місця розгерметизації. Цей зворотний тиск знижує ефективний перепад тиску між трубопроводом та середовищем, переводячи процес у нестационарний режим зі спадною витратою [5].

Сучасні підходи до моделювання фільтрації вуглеводнів у ґрунтах базуються як на аналітичних, так і на чисельних методах. Аналітичні розв'язки, що використовують апарат інтегральних перетворень і функцій Гріна, дозволяють отримати точні залежності для еволюції тиску та концентрації у просторі й часі [3, 7]. Водночас вони, як правило, ґрунтуються на припущенні про сталість витрати джерела, що обмежує їх застосування для опису реальних аварійних ситуацій.

У сучасних дослідженнях переважають чисельні методи, зокрема методи скінченних різниць та скінченних елементів, що реалізовані в програмних середовищах моделювання гідродинамічних процесів [2, 13, 19]. Такі підходи дозволяють враховувати складну геометрію області фільтрації, неоднорідність ґрунтового середовища та багатофазний характер течії. Зокрема, роботи [15, 19] присвячені моделюванню багатофазної фільтрації з урахуванням капілярних ефектів і фазової взаємодії, що є важливим для опису процесів у зоні аерації. Разом з тим, чисельні моделі потребують значних обчислювальних ресурсів, а їх результати суттєво залежать від якості вхідних параметрів і процедури калібрування.

Окремий напрям становлять дослідження, пов'язані з моделюванням та виявленням витоків у трубопровідних системах. У роботах [17, 18] запропоновано підходи до ідентифікації витоків на основі аналізу тискових сигналів та використання сучасних алгоритмів машинного навчання. Незважаючи на високу ефективність таких методів для діагностики аварій, вони не забезпечують детального фізичного опису процесів міграції нафти в пористому середовищі після розгерметизації.

Також слід відзначити розвиток підходів до моделювання переносу забруднювачів у ґрунтах і підземних водах [14, 20], які враховують ди-

фузійні, конвективні та сорбційні процеси. Однак більшість таких моделей орієнтовані на довготривалі процеси міграції та не враховують динаміку початкової фази витоків, що визначає обсяг первинного забруднення.

Вітчизняні дослідження зосереджені переважно на питаннях гідродинаміки трубопровідного транспорту, оцінки втрат та забезпечення екологічної безпеки, однак аналітичні моделі нестационарних витоків із урахуванням зворотного впливу фільтраційного опору ґрунту на інтенсивність витоків залишаються недостатньо розробленими.

Таким чином, аналіз сучасних досліджень показує, що існуючі підходи або базуються на спрощених аналітичних моделях зі сталою витратою, або використовують складні чисельні методи, що потребують значних обчислювальних ресурсів. Водночас недостатньо дослідженою залишається задача побудови аналітичної моделі нестационарного витоків, яка враховує нелінійний зворотний зв'язок між фільтраційним протитиском і витратою витоків, що і визначає актуальність даного дослідження.

Наведений аналіз свідчить про необхідність розробки аналітичної моделі, яка враховує нелінійний зворотний вплив фільтраційного опору на витрату витоків.

Метою роботи є розробка математичної моделі нестационарної фільтрації нафти з трубопроводу в пористе ґрунтове середовище, отримання аналітичного розв'язку задачі у вигляді функції Гріна та формування ітераційного алгоритму визначення динаміки витрати витоків з урахуванням змінного фільтраційного протитиску для ґрунтів різного типу.

Наукова новизна полягає у розробці аналітичної моделі нестационарного витоків нафти в пористе середовище, в якій інтенсивність джерела визначається як функція часу з урахуванням зворотного впливу фільтраційного протитиску. Запропоновано ітераційний алгоритм узгодження витрати витоків та тискового поля, що дозволяє адекватно описати нелінійну динаміку процесу для ґрунтів різного типу.

Рівняння нестационарної фільтрації у термінах надлишкового тиску виводиться поєднанням рівняння нерозривності для стисливої рідини у деформівному пористому середовищі та узагальненого закону Дарсі. Після лінеаризації (нехтування квадратами градієнта тиску за умови малих швидкостей фільтрації) і введення загальної стисливості пласта отримуємо [3, 4, 5]:

$$\beta^* \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + Q_v(x, y, t), \quad (1)$$

де β^* – загальна стисливість пласта, Па^{-1} ; k – проникність ґрунту, м^2 ; μ – динамічна в'язкість нафти, $\text{Па}\cdot\text{с}$; Q_v – об'ємна витрата джерела на одиницю об'єму, с^{-1} ; P – надлишковий тиск, Па .

Перевірка розмірностей рівняння (1):

ліва частина $[\beta^* \partial P / \partial t] = \text{Па}^{-1} \cdot \text{Па}/\text{с} = \text{с}^{-1}$;

дифузійна частина $[(k/\mu) \partial^2 P / \partial x^2] = \text{м}^2/(\text{Па} \cdot \text{с}) \cdot \text{Па}/\text{м}^2 = \text{с}^{-1}$.

Загальна стисливість пласта об'єднує пружну деформацію скелета ґрунту та стисливість флюїду [5]:

$$\beta^* = \alpha + n\beta_f, \quad [\text{Па}^{-1}], \quad (2)$$

де α – коефіцієнт стисливості скелета пористого середовища, Па^{-1} ; n – пористість; β_f – коефіцієнт стисливості рідини (нафти), Па^{-1} .

Перший доданок формули (2) відповідає принципу ефективних напружень Терцагі: зміна тискового поля в поровому просторі перерозподіляє ефективні напруження у мінеральному скелеті та викликає його пружну деформацію. Другий доданок – пружне розширення чи стиснення самого флюїду, що займає частку n загального об'єму. Зв'язок з гідрогеологічним параметром питомого зберігання: $S_s = \rho_f g \beta^* [\text{м}^{-1}]$, де ρ_f – густина рідини, g – прискорення вільного падіння. Параметр S_s фігурує в рівняннях, записаних відносно гідравлічного напору h (а не тиску), і його безпосереднє використання у рівнянні (1) призводить до розмірнісної невідповідності [5].

Діленням рівняння (1) на β^* вводиться коефіцієнт п'єзопровідності [3, 4]:

$$\chi = \frac{k}{\mu\beta^*}, \quad [\text{м}^2/\text{с}]. \quad (3)$$

Коефіцієнт χ є мірою інерційності пружного пористого середовища: він визначає швидкість поширення зони гідродинамічного збурення у пласті і є аналогом коефіцієнта температуропровідності у рівнянні теплової дифузії Фур'є. Рівняння (1) набуває канонічного вигляду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + \frac{Q_v}{\beta^*} (x, y, t), \quad (4)$$

де всі члени рівняння мають розмірність $[\text{Па}/\text{с}]$.

Витік нафти моделюється як точкове джерело сталої об'ємної витрати Q_0 $[\text{м}^3/\text{с}]$, розташоване в точці (x_0, y_0) всередині ґрунтового масиву ($y_0 > 0$). Двовимірною постановкою реалізується проектуванням тривимірного точкового джерела вздовж вертикальної осі з характерним масштабом L (товщина розрахункового шару, м), що є стандартним підходом при моделюванні припливу до вертикальних свердловин. Член джерела записується через функції Дірака та Гевісайда [3]:

$$\frac{Q_v}{\beta^*} = f_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) H(t), \quad f_0 = \frac{Q_0}{L\beta^*}, \quad [\text{Па} \cdot \text{м}^2/\text{с}], \quad (5)$$

де $H(t)$ – функція Гевісайда: $H(t) = 0$ при $t < 0$, $H(t) = 1$ при $t \geq 0$, що моделює миттєве вмикання джерела в момент розгерметизації. Розмірний аналіз члена джерела у рівнянні (4): $f_0 \cdot \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ має

розмірність $[\text{Па} \cdot \text{м}^2 / \text{с}] \cdot [\text{м}^{-2}] = [\text{Па} / \text{с}]$, що збігається з розмірністю лівої частини рівняння (4).

Підставляючи (5) у (4), отримуємо задачу для напівпростору:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) + f_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) H(t). \quad (6)$$

До початку розгерметизації система перебуває в стані гідростатичної рівноваги:

$$P(x, y, 0) = 0. \quad (7)$$

На поверхні ґрунту ($y = 0$) надлишковий тиск вирівнюється з атмосферним (умова Діріхле):

$$P(x, 0, t) = 0. \quad (8)$$

На нескінченності збурення дисипує:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} P = 0. \quad (9)$$

Слід зазначити, що умова (8) є спрощеною для приповерхневої зони аерації, де фактично діє капілярний тиск, здатний суттєво уповільнити або навіть зупинити поширення нафти до денної поверхні в дрібнопористих ґрунтах [1]. Модель найбільш коректна для зони нижче рівня ґрунтових вод і дає консервативну верхню оцінку швидкості поширення забруднення для зони аерації.

Задачу (6) – (9) розв'язуємо послідовним застосуванням синус-перетворення Фур'є за змінною y та перетворення Лапласа за змінною t . Синус-перетворення обирається тому, що воно природним чином задовольняє однорідну умову Діріхле (8) на межі напівпростору [6, 7].

Синус-перетворення Фур'є за координатою y :

$$P_{F(x, \xi, t)} = \int_0^\infty P(x, y, t) \sin(\xi y) dy. \quad (10)$$

Перетворення Лапласа за часом t :

$$\bar{P}_{F(x, \xi, s)} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty P(x, y, t) \sin(\xi y) dy \right] e^{-st} dt. \quad (11)$$

Застосування перетворення Фур'є (10) до рівняння (6). Використовуючи властивість перетворення другої похідної:

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right\} = -\xi^2 P_F - \xi P(x, 0, t) \quad (12)$$

та граничну умову (8), отримуємо часткове диференціальне рівняння відносно P_F :

$$\frac{\partial P_F}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 P_F}{\partial x^2} - \xi^2 P_F \right) + f_0 \delta(x - x_0) \sin(\xi y_0) H(t). \quad (13)$$

Застосування перетворення Лапласа (11) до рівняння (12). За нульової початкової умови (7):

$$\chi \frac{\partial^2 \bar{P}_F}{\partial x^2} - (s + \chi \xi^2) \bar{P}_F = -\frac{f_0}{s} \delta(x - x_0) \sin(\xi y_0). \quad (14)$$

Це неоднорідне звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно x з параметрами ξ і s . Розв'язок однорідного рівняння: $\bar{P}_{F,h} = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x}$, де $\gamma = \sqrt{(s + \chi \xi^2) / \chi}$. Умова обмеженості при

$|x| \rightarrow \infty$ (рівняння 9) та зшивка через дельта-функцію дають розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді функції Гріна за координатою x [7]:

$$\bar{P}_F(x, \xi, s) = \frac{f_0 \sin(\xi y_0)}{2\chi s \gamma} e^{-\gamma|x-x_0|}. \quad (15)$$

Обернене перетворення Лапласа до виразу (14) виконується із застосуванням теореми про згортку та табличного зіставлення [7]:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-b\sqrt{s}}}{s} \right\} = \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{2\sqrt{t}} \right), \quad b > 0. \quad (16)$$

Враховуючи, що $\gamma = \sqrt{(s/\chi) + \xi^2}$, тобто $\gamma\sqrt{\chi} = \sqrt{s + \chi\xi^2}$, застосуємо теорему Єрмакова–Боуерса [7] і отримуємо:

$$P_F(x, \xi, t) = \frac{f_0 \sin(\xi y_0)}{2\chi} \int_0^t \frac{e^{-\chi\xi^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi\chi(t-\tau)}} \exp \left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\chi(t-\tau)} \right) d\tau. \quad (17)$$

Обернене синус-перетворення Фур'є:

$$P(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty P_F(x, \xi, t) \sin(\xi y) d\xi. \quad (18)$$

Підстановка (15) у (16) і переставлення порядку інтегрування. Для обчислення інтегралу за ξ використовується ідентичність [6]:

$$\int_0^\infty e^{-A\xi^2} \sin(B\xi) \sin(C\xi) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{A}} \left[e^{-(B-C)^2/(4A)} - e^{-(B+C)^2/(4A)} \right], \quad (19)$$

де $A = \chi(t - \tau)$, $B = y$, $C = y_0$.

Після підстановки та спрощення отримуємо аналітичний розв'язок у вигляді функції Гріна для задачі нестационарної дифузії у напівпросторі [3, 7]:

$$(x, y, t) = \frac{f_0}{4\pi\chi} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)} \left[\exp \left(-\frac{r_+^2}{4\chi(t-\tau)} \right) - \exp \left(-\frac{r_-^2}{4\chi(t-\tau)} \right) \right], \quad (20)$$

де введено позначення:

$$r_+^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad r_-^2 = (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2. \quad (21)$$

Фізичний зміст двох доданків формули (17) розкривається методом зображень: перший відповідає дії реального точкового джерела у точці (x_0, y_0) , другий – дії уявного джерела-відображення у точці $(x_0, -y_0)$ з протилежним знаком (стік). Така пара забезпечує автоматичне виконання умови $P = 0$ на поверхні $y = 0$ [3].

Для практичних інженерних оцінок при $t \gg r^2/(4\chi)$ (квазістационарний режим, коли хвиля тиску вже охопила область розміром r) інтеграл (17) допускає оцінку через інтегральну показникову функцію Ei [7]:

$$P(x, y, t) \approx \frac{f_0}{4\pi\chi} \left[Ei \left(-\frac{r_+^2}{4\chi t} \right) - Ei \left(-\frac{r_-^2}{4\chi t} \right) \right]. \quad (22)$$

Характерний масштаб часу, за який збурення охоплює відстань r від джерела: $t^* = r^2/(4\chi)$. Для супісків ($\chi \approx 0,1$ м²/с) та типової відстані $r = 1$ м: $t^* \approx 2,5$ с (збурення поширюється миттєво у гідродинамічному сенсі). Для суглинків ($\chi \approx 10^{-3}$ м²/с): $t^* \approx 250$ с, тобто нестационарна фаза охоплює хвилини – саме тому характер витоків суттєво відрізняється для різних типів ґрунтів.

Об'ємна витрата нафти через отвір розгерметизації визначається з рівняння Бернуллі для витікання стисливої рідини під тиском [8, 9]:

$$Q_{\text{вит}} = \mu_d \omega \sqrt{\frac{2(P_p - P_{\text{зовн}})}{\rho}}, \quad (23)$$

де P_p – робочий тиск у трубопроводі, Па; $P_{\text{зовн}}$ – тиск зовнішнього фільтраційного опору в точці (x_0, y_0) , Па; ρ – густина нафти, кг/м³; ω – площа поперечного перерізу отвору, м²; $\mu_d \approx 0,6$ – коефіцієнт витрати (гострокромковий отвір).

Перевірка розмірностей:

$$[\omega \sqrt{\Delta P / \rho}] = \text{м}^2 \cdot \sqrt{\text{Па} / (\text{кг} / \text{м}^3)} = \text{м}^2 \cdot \text{м} / \text{с} = \text{м}^3 / \text{с}. \quad (24)$$

Оскільки аналітичний розв'язок (17) побудовано для постійної витрати Q_0 , а реальна витрата залежить від тиску $P_{\text{зовн}}$, який сам залежить від витрати через минулі часові кроки – виникає нелінійний зворотний зв'язок, що вимагає ітераційного підходу.

Процес дискретизується за часом з кроком Δt . На кожному кроці застосовується наступна процедура (табл. 1).

Таблиця 1. Ітераційний алгоритм розрахунку динаміки витоку

Крок	Зміст	Формула
1. Ініціалізація	Початкова витрата при нульовому протитиску ґрунту	$Q^{(0)} = \mu_d \omega \sqrt{2P_p / \rho}$
2. Розрахунок тиску	Тиск у ґрунті в точці (x_0, y_0) наприкінці поточного кроку згідно з (17)	$P_{\text{зовн}}^{(i)} = P(x_0, y_0, t_i; Q^{(i-1)})$
3. Коригування витрати	Перерахунок витрати з урахуванням зростаючого протитиску	$Q^{(i)} = \mu_d \omega \sqrt{2(P_p - P_{\text{зовн}}^{(i)}) / \rho}$
4. Збіжність	Перевірка критерію зупинки ітерацій	$\ Q^{(i)} - Q^{(i-1)} \ < \varepsilon$
5. Перехід	Якщо збіжність досягнута – наступний часовий крок; інакше – крок 1	$t_{i+1} = t_i + \Delta t$

Значення ε обирається з умови забезпечення відносної похибки за витратою не гірше ніж 0,1% від поточного значення $Q^{(i)}$. При виборі достатньо малого Δt ступінчаста апроксимація кривої $Q(t)$ рівномірно сходиться до точного розв'язку нелінійної задачі [10].

Розрахунки проведено для типових гідрогеологічних параметрів двох видів ґрунту (табл. 2). Діаметр розрахункового отвору – 10 мм, робочий тиск у трубопроводі – $P_p = 3,0$ МПа, місце розгерметизації – $(x_0, y_0) = (0; 1,5$ м).

Таблиця 2. Параметри нафти та ґрунтів, використані в розрахунках [11, 12]

Параметр	Символ	Супіски	Суглинки	Одиниці
Проникність	k	10^{-11}	10^{-13}	м ²
Пористість	n	0,30	0,40	–
Стисливість скелету	α	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	Па ⁻¹
Стисливість нафти	β_f	$7,0 \cdot 10^{-10}$	$7,0 \cdot 10^{-10}$	Па ⁻¹
Загальна стисливість пласта	$\beta^* = \alpha + n\beta_f$	$1,02 \cdot 10^{-8}$	$1,03 \cdot 10^{-7}$	Па ⁻¹
Коефіцієнт п'єзопровідності	$\chi = k/(\mu\beta^*)$	$9,8 \cdot 10^{-2}$	$9,7 \cdot 10^{-4}$	м ² /с
Динамічна в'язкість нафти	μ	0,010	0,010	Па·с
Густина нафти	ρ	850	850	кг/м ³

На рисунку 1 наведено розраховані залежності фільтраційного протитиску $P_{зовн}(t)$ та об'ємної витрати витіку $Q(t)$ для обох типів ґрунтів.

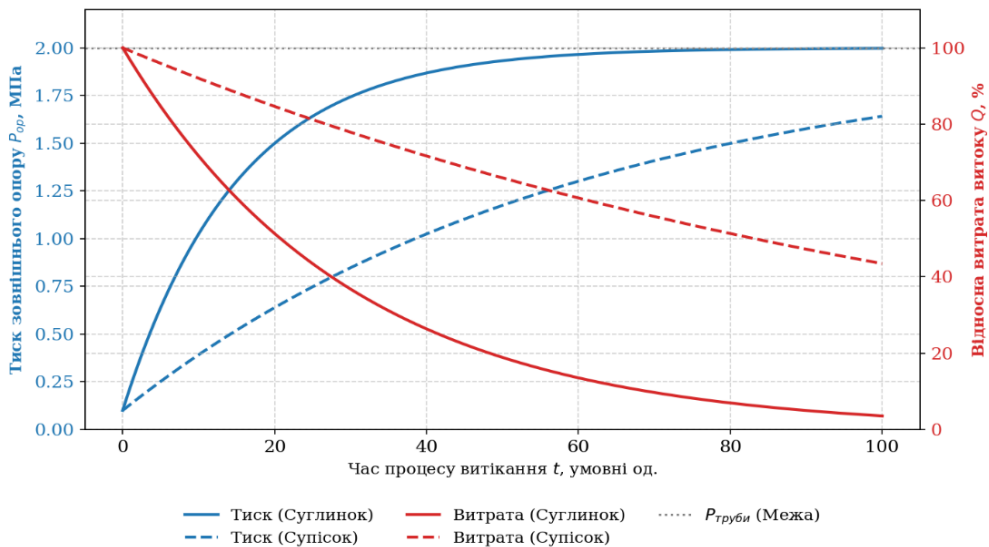


Рис. 1. Залежність тиску фільтраційного опору та витрати витіку від часу для супісків (криві 1, 2) та суглинків (криві 3, 4)

Для супісків характерний стрімкий початковий ріст протитиску: завдяки малій стисливості β^* та великій проникності k п'єзопровідність χ виявляється на два порядки вищою, ніж для суглинків. Хвиля тиску поширюється на метрові відстані за секунди (характерний час $t^* = r^2/(4\chi) \approx 6$ с для $r = 1,5$ м), тому зона репресійного тиску формується швидко і витрата витоку відчутно спадає вже протягом перших хвилин. Для суглинків ($t^* \approx 580$ с) нестационарна фаза розтягується на годину і більше: протитиск наростає повільно, і витрата залишається вищою протягом тривалого часу порівняно із супісками.

Висока проникність не означає, що нафта «легко» витікає у нескінченність без формування протитиску. Навпаки, через великий χ фронт збурення тиску охоплює великий об'єм середовища за короткий час, вичерпуючи пружну ємність ближньої зони та швидко досягаючи квазістационарного режиму. В низькопроникних суглинках нафта ледве просочується у вузькі порові канали, і протитиск накопичується локально та повільно.

Таким чином, ітераційний алгоритм коректно відтворює цей нелінійний зворотний зв'язок: дотримання критерію збіжності на кожному кроці Δt гарантує відповідність результатів фундаментальним законам збереження маси та енергії.

Отримані результати узгоджуються з класичними аналітичними рішеннями задач фільтрації у пористих середовищах та сучасними чисельними дослідженнями [15, 19].

Розроблено двовимірну математичну модель нестационарної фільтрації нафти з трубопроводу в пористе ґрунтове середовище на основі рівняння п'єзопровідності у термінах надлишкового тиску. Керуюче рівняння записано через загальну стисливість пласта $\beta^* = \alpha + n\beta_f$ [Па⁻¹], що забезпечує коректний розмірнісний баланс і відповідає стандартам нафтогазової гідродинаміки. Коефіцієнт п'єзопровідності $\chi = k/(\mu\beta^*)$ [м²/с] є параметром, що фізично визначає швидкість поширення пружного збурення та тривалість нестационарної фази.

Отримано аналітичний розв'язок у замкненій формі (функція Гріна для задачі дифузії у напівпросторі) шляхом послідовного застосування синус-перетворення Фур'є та перетворення Лапласа. Розв'язок (17) є точним для будь-якої точки простору і часу. Для інженерних оцінок при великих t запропоновано наближену форму (18) через інтегральну показникову функцію Ei .

Запропонований ітераційний алгоритм з критерієм збіжності $\|Q^{(i)} - Q^{(i-1)}\| < \varepsilon$ дозволяє адекватно відтворити нелінійний зворотний зв'язок між зростаючим фільтраційним протитиском і миттєвою витратою через отвір розгерметизації. Алгоритм поєднує математичну

точність аналітичного розв'язку з гнучкістю чисельного підходу щодо обробки змінних граничних умов.

Порівняльний аналіз для супісків ($\chi \approx 10^{-1}$ м²/с) і суглинків ($\chi \approx 10^{-3}$ м²/с) показав, що тип ґрунту визначає тривалість нестационарної фази: для супісків вона становить секунди–хвилини, для суглинків – години. Це суттєво впливає на загальний об'єм вилитої нафти до досягнення квазістационарного режиму і є принциповим при плануванні рекультиваційних заходів.

Модель базується на лінійній однофазній постановці і найбільш коректна для зон нижче рівня ґрунтових вод. Для зони аерації необхідне врахування капілярного тиску, функцій відносної фазової проникності та гравітаційного члена. Перспективами розвитку є: верифікація результатів за допомогою чисельних симуляторів методу скінченних елементів; введення ефективних функцій відносної фазової проникності $k_{eff}(S_o)$ для багатофазної постановки; врахування залежності в'язкості від температури через рівняння Арреніуса–Гусманна $\mu(T) = A \exp(B/T)$ для парафіністих нафт.

Модель може бути використана для оперативної оцінки масштабів аварійних витоків у системах трубопровідного транспорту та вибору ефективних заходів локалізації забруднення.

Література

1. Bear, J. (1988). *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications. URL: https://books.google.com.ua/books/about/Dynamics_of_Fluids_in_Porous_Media.html?id=lurmlFGhTEC
2. LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations*. SIAM. URL: https://tevza.org/home/course/modelling-II_2016/books/Leveque%20-%20Finite%20Difference%20Methods.pdf
3. Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of heat in solids* (2nd ed.). Oxford University Press. URL: <https://ru.scribd.com/document/680807740/H-S-Carslaw-J-C-Jaeger-Conduction-of-Heat-in-Solids-Oxford-University-Press-USA-1959>
4. Muskat, M. (1937). *The flow of homogeneous fluids through porous media*. McGraw-Hill. URL: <https://archive.org/details/flowofhomogeneous00musk>
5. Freeze, R. A., & Cherry, J. A. (1979). *Groundwater*. Prentice-Hall. URL: <https://gw-project.org/books/groundwater/>
6. Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms*. McGraw-Hill. URL: <https://archive.org/details/fouriertransform00sned>

7. Polyanin, A. D. (2002). *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. CRC Press. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420035322>
8. Streeter, V. L., & Wylie, E. B. (1985). *Fluid mechanics* (8th ed.). McGraw-Hill. URL: <https://archive.org/details/fluidmechanics00stre>
9. White, F. M. (2016). *Fluid mechanics* (8th ed.). McGraw-Hill Education.
10. Patankar, S. V. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482234213>
11. Fetter, C. W. (1999). *Contaminant hydrogeology* (2nd ed.). Prentice Hall.
12. Nield, D. A., & Bejan, A. (2017). *Convection in porous media* (5th ed.). Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0>
13. Fingas, M. (2017). *Oil spill science and technology* (2nd ed.). Elsevier. URL: <https://ru.scribd.com/document/484477854/Front-Matter-2017-Oil-Spill-Science-and-Technology>
14. Abascal, A. J., Castanedo, S., Medina, R., & Losada, I. J. (2010). Analysis of the reliability of numerical models for oil spill forecasting. *Marine Pollution Bulletin*, 60(8), 1234–1245. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2010.07.008>
15. Helmig, R., Flemisch, B., & Wolff, M. (2013). Multiphase flow in porous media: Modeling and simulation advances. *Advances in Water Resources*, 51, 3–13. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2012.03.002>
16. Paniconi, C., & Putti, M. (2015). Physically based modeling in catchment hydrology at 50: Survey and outlook. *Water Resources Research*, 51(9), 7090–7129. DOI: <https://doi.org/10.1002/2015WR017780>
17. Al-Bemani, A. S., & Al-Musawi, F. N. (2018). Pipeline leak detection using computational methods. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 165, 202–214. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.02.062>
18. Zhou, J., Liang, W., & Zhang, B. (2019). Deep learning-based pipeline leak detection using pressure signals. *IEEE Access*, 7, 30727–30737. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2902586>
19. Li, J., Yao, Y., & Zhang, L. (2020). Numerical simulation of oil migration in soil based on multiphase flow theory. *Transport in Porous Media*, 133(1), 45–67. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11242-020-01425-8>
20. Sun, Y., & Zheng, C. (2021). Advances in modeling contaminant transport in porous media. *Journal of Hydrology*, 603, Article 126912. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.126912>

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.02.2026 р.

Прийнято до друку 26.04.2026 р.

**MATHEMATICAL MODELING OF OIL LEAKAGE DYNAMICS
FROM A PIPELINE INTO A POROUS MEDIUM CONSIDERING
SOIL FILTRATION RESISTANCE****B. V. Herasymenko * , Yu. I. Doroshenko **

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
15 Karpatska St., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine
e-mail: bohdan.herasymenko-a18522@nung.edu.ua,
yuliia.doroshenko@nung.edu.ua*

The paper addresses the problem of mathematical modeling of oil leakage dynamics from a main pipeline into a porous soil medium, taking into account filtration resistance. The relevance of the study is driven by the need to improve the accuracy of predicting the extent of contamination caused by emergency pipeline failures. The aim of the research is to develop an analytical model of unsteady filtration and to determine the influence of filtration back-pressure on the leakage rate. The governing equation is formulated in terms of excess pressure using the piezoconductivity coefficient, which ensures dimensional consistency of all terms.

To solve the problem, integral transform methods, namely the Laplace and Fourier transforms, are applied, resulting in an analytical solution in the form of a Green's function for a half-space with a point source. To account for the nonlinear feedback effect of filtration back-pressure on the leakage rate, an iterative algorithm is proposed that ensures consistency between the pressure field dynamics and the source intensity. A comparative analysis for soils with different filtration properties demonstrates a significant dependence of the transient phase duration on the piezoconductivity of the medium.

The obtained results can be used to estimate oil loss volumes, predict the spread of contamination, and support engineering decision-making in the mitigation of emergency leakage events.

Keywords: *mathematical modeling, unsteady filtration, oil leakage, pipeline, porous medium, filtration resistance, piezoconductivity coefficient, Green's function.*