

МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.5

MSC 2020: 26A51

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-11-18

ДО ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕРІВНОСТІ МІЖ ОПУКЛИМИ ФУНКЦІЯМИ

Андрій Бандура¹, **Анастасія Мохналь²**¹ Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу

76019, вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, Україна;

² Львівський національний університет імені Івана Франка;

79000, вул. Університетська, 1, Львів, Україна;

e-mail: andriykopanytsia@gmail.com, smohnal9@gmail.com

У статті доведено таке твердження: для будь-якої сталої $K > 1$ існують опуклі необмежені зверху на $[0; +\infty)$ функції f та g такі, що нерівність $f(x) \leq g(x)$ виконується для всіх $x \geq 0$, а для множини $E_1 = \{x \geq 0 : f'_+(x) \leq Kg'_+(x)\}$ виконується $dE_1 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas}(E_1 \cap [0, R]) = \frac{K-1}{K}$, де f'_+ та g'_+ – правосторонні похідні функцій f та g , відповідно.

Ключові слова: опукла функція, виняткова множина, диференціювання нерівності.

1. Вступ

Якщо для двох опуклих необмежених зверху диференційовних функцій $f, g: [r_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ для всіх $x \in [a, b]$ виконується нерівність $f(x) < g(x)$, то подібна нерівність між їхніми правосторонніми похідними може не виконуватись в жодній точці.

Справді, розглянемо на $[3, +\infty)$ функції

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

Зауважимо, що

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}, \quad g'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} \geq 0, \quad g''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} \geq 0$$

для всіх $x \geq 2$. Тому, функції опуклі на $[3, +\infty)$.

Оскільки, $x^2 > x \geq 1$, то $f(x) < g(x)$ ($x \geq 3$), але

$$f'(x) > g'(x) \quad (x \geq 3).$$

При цьому для будь-якої функції $K(x)$ такої, що $K(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) виконується

$$f'(x) < K(x) \cdot g'(x) \quad (x \geq x_0).$$

Висновок. Отже, даний простий приклад, зокрема, ілюструє той факт, що в загальному диференціювати нерівності між опуклими функціями не можна.

Зауваження. В загальному для пари опуклих функцій f, g , для яких виконується нерівність

$$f(x) < g(x),$$

протилежна нерівність

$$f'_+(x) > Kg'_+(x)$$

між їхніми правостонніми похідними f'_+ та g'_+ може не виконуватись в жодній точці навіть зі сталою $K > 1$, і до того ж довільно близькою до 1.

Справді, припустимо, що додатні опуклі функції f, g такі, що $g(x) \rightarrow +\infty$ або $f(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) і

$$f'_+(x) > Kg'_+(x)$$

для всіх досить великих значень $x \geq x_0$. Інтегруючи останню нерівність, отримуємо

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x_0}^x f'_+(t)dt + f(x_0) \geq \\ &\geq K \int_{x_0}^x g'_+(t)dt + f(x_0) = Kg(x) + f(x_0) - Kg(x_0). \end{aligned}$$

Але $f(x_0) - Kg(x_0) = o(g(x))$ або $f(x_0) - Kg(x_0) = o(f(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, що означає:

у першому випадку $f(x) \geq (1 + o(1))Kg(x) > g(x)$ ($x \geq x_0$),
у другому випадку $f(x) \geq Kg(x) + o(f(x))$, тобто $(1 + o(1))f(x) \geq Kg(x)$
($x \geq x_0$).

Останні дві нерівності неможливі, бо суперечать умові, що $f(x) < g(x)$.

У статтях [1]– [4] розглянуто задачу, коли нерівність між опуклими функціями все ж таки можна диференціювати.

Нехай

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$$

– об'єднання попарно неперетинних інтервалів. Міру Лебега множини $E \cap [0; R]$ позначимо через

$$\text{meas } (E \cap [0; R]) = \sum_{b_k \leq R} (b_k - a_k) + R - a_m,$$

де m таке, що $a_m < R \leq b_m$, а також через dE позначимо *нижню лінійну щільність* множини E

$$dE \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas } (E \cap [0; R]) > 0.$$

У статті [3] В. Бергвайлер довів таку теорему. Подібні результати у багатьох випадках знаходять важливі застосування (див., наприклад, [2–4]).

Теорема ([3], W. Bergweiler). *Нехай додатні функції f та g – опуклі на $[0; +\infty)$. Якщо нерівність $f(x) \leq g(x)$ виконується для всіх $x \geq 0$, то для довільного $K > 1$ для нижньої щільності множини*

$$E_1(K) = \{x \geq 0 : f'_+(x) \leq Kg'_+(x)\}$$

виконується нерівність

$$dE_1(K) \geq \frac{K-1}{K},$$

де f'_+ та g'_+ – *правосторонні похідні відповідних функцій*.

Іншими словами, хоча нерівність між опуклими функціями не можна диференціювати скрізь, але на множині додатної нижньої щільності, для якої справедлива нерівність між правосторонніми похідними, це

можна робити з тією поправкою, що похідну більшої функції потрібно помножити на сталу більшу за 1 (одиницю).

Виникає запитання: що можна сказати про нерівність $f'_+(x) \leq K(x)g'_+(x)$ у випадку, коли виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, а функція $K(x)$ така, що $K(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$)?

Зрозуміло, що, якщо взяти $K(x) = f'_+(x)\beta$, де $1/\beta \leq g'_+(x)$ ($x \geq x_0$), то $K(x)g'_+(x) = f'_+(x)$ ($x \geq x_0$).

Тому наше **запитання** потрібно уточнити. **Уточнене запитання:** Якщо виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то чи існує додатна функція $K(x)$ така, що $K(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) і $K(x) = o(f'_+(x))$ ($x \rightarrow +\infty$) і виконується нерівність $f'_+(x) < K(x)g'_+(x)$:

i) для всіх $x \geq x_0$;

ii) на множині E нижньої щільності $dE = 1$?

Наразі ми схилиємося до таких **припущень**:

у випадку i) відповідь швидше за все є негативною;

у випадку ii) відповідь швидше за все є позитивною.

Нескладно також зрозуміти, що у випадку $g'_+(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) відповідь як у випадку i), так і у випадку ii) є позитивною. Для цього достатньо взяти $K(x) = \frac{f'_+(x)}{\sqrt{g'_+(x)}}$. Тоді,

$$K(x)g'_+(x) = f'_+(x)\sqrt{g'_+(x)} > f'_+(x) \quad (x \geq x_0), \quad K(x) = o(f'_+(x)) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

У обговоренні з авторами проф. Скасків О.Б. (Львів) сформулював таке припущення.

Гіпотеза 1 (Скасків О.Б.). З теореми В. Бергвайлера випливає таке твердження:

Нехай додатні функції f та g – опуклі на $[0; +\infty)$. Якщо нерівність $f(x) \leq g(x)$ виконується для всіх $x \geq 0$, то для довільної функції $K(x)$ такої, що $K(x) > 1$ ($x > 0$) і $K(x) \uparrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) для нижньої щільності множини $E_1 = \{x \geq 0 : f'_+(x) \leq K(x)g'_+(x)\}$ виконується рівність $dE_1 = 1$.

Стала $\frac{K-1}{K}$ у теоремі Бергвайлера є точною. На це вказує таке наше твердження.

Твердження 1.1. Для будь-якої сталої $K > 1$ існують опуклі необмежені зверху на $[0; +\infty)$ функції f та g такі, що нерівність $f(x) \leq g(x)$ виконується для всіх $x \geq 0$, а для множини

$$E_1 = \{x \geq 0 : f'_+(x) \leq Kg'_+(x)\}$$

ВИКОНУЄТЬСЯ

$$dE_1 = \frac{K-1}{K}.$$

Доведення. В основі побудови опуклих на $[0; +\infty)$ функцій f та g , з описаними у формулюванні властивостями, лежить ідея, запозичена зі схеми доведення теореми Бергвайлера. Власне, будуватимемо дві опуклі ламані, що зростають. Спочатку вибираємо ламану (кусково-лінійну) функцію $g(x)$ таку, що $x_0 = 0$ – її початок, а (x_k) – послідовність її вершин, що також зростають $x_0 < x_k < x_{k+1}$ ($k \geq 1$). Крім цього, вважаємо, що

$$g'_+(x) = b_k \quad (\forall x \in [x_k, x_{k+1})), \quad k \geq 1.$$

Далі, вибираємо ламану (кусково-лінійну) функцію $f(x)$ таку, що

$$f(x_k) = g(x_k) \quad (k \geq 1),$$

а її послідовність вершин (y_k) така, що

$$x_k < y_k < x_{k+1} \quad (k \geq 1).$$

При цьому

$$f'_+(x) = a_k \quad (\forall x \in [y_k, y_{k+1})), \quad k \geq 1.$$

Нехай тепер $K > 1$, а дві додатні зростаючі послідовності $(a_k), (b_k)$ такі, що

$$b_{k+1} > a_k > Kb_k > b_k \quad (k \geq 0),$$

$$\frac{a_k}{b_k} \rightarrow K \quad (k \rightarrow +\infty),$$

$$\frac{b_k - Kb_{k-1}}{b_k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Зауважимо, що з умов $b_k > a_{k-1}$, $f(x_k) = g(x_k)$ випливає, що для всіх $x \in [x_k, y_k)$

$$f'_+(x) = a_{k-1} < b_k = g'_+(x) \iff f(x) \leq g(x), \quad (1)$$

позаяк лінійні відрізки цих двох ламаних проходять через лівий кінець відрізка $[x_k, y_k)$, а нерівність (1) є нерівністю між кутовими коефіцієнтами відрізків цих ламаних.

Подібно розглядаємо на відрізку $[y_k, x_{k+1})$. З тих самих умов $b_{k+1} > a_k$, $f(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$ випливає, що для всіх $x \in [y_k, x_{k+1})$

$$f'_+(x) = a_k > b_k = g'_+(x) \iff f(x) \leq g(x), \quad (2)$$

позаяк лінійні відрізки цих двох ламаних проходять через правий кінець відрізка $[y_k, x_{k+1}]$, а нерівність (2) є нерівністю між кутовими коефіцієнтами відрізків цих ламаних.

Зауважимо тепер, що для кутових коефіцієнтів відповідних відрізків ламаних маємо рівності

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f(x_{k+1}) - f(y_k)}{x_{k+1} - y_k}, & b_k &= \frac{g(x_{k+1}) - g(y_k)}{x_{k+1} - y_k}, \\ f(x_k) &= g(x_k), & f'_+(x) &= a_k, \quad (y_k \leq x < y_{k+1}), \\ g'_+(x) &= b_k \quad (x_k \leq x < x_{k+1}). \end{aligned}$$

Отже,

$$f'_+(x) = a_k > Kb_k = Kg'_+(x) \quad (y_k \leq x \leq x_{k+1}).$$

Далі, нехай $s_k = y_k - x_k$, $t_k = x_{k+1} - y_k$. Тоді,

$$\begin{aligned} f(x_{m+1}) &= \sum_{k=0}^m (a_{k-1}s_k + a_k t_k) > K \sum_{k=0}^m (b_{k-1}s_k + b_k t_k), \\ g(x_{m+1}) &= \sum_{k=0}^m (b_k s_k + b_k t_k), \end{aligned}$$

але $f(x_k) = g(x_k)$, тому,

$$\begin{aligned} 0 = g(x_{m+1}) - f(x_{m+1}) &< \sum_{k=0}^m \left((b_k - Kb_{k-1})s_k + (1-K)b_k t_k \right) \implies \\ (K-1) \sum_{k=0}^m b_k t_k &< \sum_{k=0}^m (b_k - Kb_{k-1})s_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Звідси, послідовно маємо

$$\begin{aligned} (K-1) \sum_{k=0}^n t_k &= (K-1) \left[\frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^n b_k t_k + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{b_m} - \frac{1}{b_{m+1}} \right) \sum_{k=0}^m b_k t_k \right] < \\ &< \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^n (b_k - Kb_{k-1})s_k + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{b_m} - \frac{1}{b_{m+1}} \right) \sum_{k=0}^m (b_k - Kb_{k-1})s_k = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{b_k - Kb_{k-1}}{b_k} s_k. \end{aligned} \quad (4)$$

У доведенні (3) та (4) використовувалася нерівність $a_k > Kb_k$. Натомість можна скористатися властивістю $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow K \quad (k \rightarrow +\infty)$, тоді вище замість

нерівності буде асимптотична рівність, з якої з врахуванням $\frac{b_k - Kb_{k-1}}{b_k} \rightarrow 1$ ($k \rightarrow +\infty$) отримуємо

$$(K-1) \sum_{k=0}^n t_k = (1+o(1)) \sum_{k=0}^n \frac{b_k - Kb_{k-1}}{b_k} s_k = (1+o(1)) \sum_{k=0}^n s_k \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (5)$$

Асимптотична рівність (5) тепер при $n \rightarrow +\infty$ дає

$$\begin{aligned} \frac{K-1}{K} x_{n+1} &= \frac{K-1}{K} \sum_{k=0}^n t_k + \frac{K-1}{K} \sum_{k=0}^n s_k = \\ &= \left(\frac{1}{K} + o(1) + \frac{K-1}{K} \right) \sum_{k=0}^n s_k = (1+o(1)) \sum_{k=0}^n s_k. \end{aligned}$$

Для міри множини $E_1 = \cup_{k=0}^{+\infty} [x_k, y_k]$ тепер послідовно маємо

$$\text{meas} (E_1 \cap [0, x_{n+1}]) = \sum_{k=0}^n s_k,$$

звідки

$$\frac{1}{x_{n+1}} \text{meas} (E_1 \cap [0, x_{n+1}]) = \frac{1}{x_{n+1}} \sum_{k=0}^n s_k = \frac{K-1}{K} + o(1)$$

при $n \rightarrow +\infty$. Тобто,

$$dE_1 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas} (E_1 \cap [0, R]) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n+1}} \text{meas} (E_1 \cap [0, x_{n+1}]) = \frac{K-1}{K}.$$

Залишається пригадати, що за теоремою Бергвайлера $dE_1 \geq (K-1)/K$. Звідси випливає потрібна рівність $dE_1 = (K-1)/K$. $\square$

Подяка. Автори висловлюють щирю подяку проф. Олегу Скасківу (Львів) за привернення уваги до цікавої задачі та безцінні поради стосовно її розв'язання. Один з авторів (Бандура А.) вперше з цією задачею познайомився ще у 2004 році, будучи магістром ЛНУ ім. І. Франка, але тоді його увага зачепилася за функції обмеженого індексу. Сподіваємося ця замітка стане початком таких широких досліджень, які останні двадцять років супроводжують поняття обмеженості індексу.

Перший автор (А. Бандура) висловлює подяку за фінансову підтримку досліджень, що призвели до цієї публікації, надану Національним фондом досліджень України (проект 2023.04/0160, 0124U003748).

References

1. W.K. Hayman, J.F. Rossi, *Characteristic, maximum modulus and value distribution*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 651–664. doi:10.1090/S0002-9947-1984-0743737-2
2. W.K. Hayman, F.M. Stewart, *Real inequalities with applications to function theory*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **50** (1954), 250–260. doi:10.1017/S0305004100029297
3. W. Bergweiler, *An inequality for real functions with applications to function theory*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 171–175. doi:10.1112/blms/21.2.171
4. Скасків О.Б. Диференціювання нерівності між дійсними опуклими функціями, Мат. Студії, **19** (2003), №2, С.141–148.

Стаття надійшла до редакційної колегії 05.11.2025 р.

Прийнято до друку 23.11.2025 р.

TO THE THEOREM ON DIFFERENTIATION OF INEQUALITIES BETWEEN CONVEX FUNCTIONS

Andriy Bandura¹, **Anastasiya Mokhnal²**

¹ *Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
76019, 15 Karpatska street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;*

² *Ivan Franko National University of Lviv;*

79000, 1 Universytetska street, Lviv, Ukraine;

e-mail: andriykopanytsia@gmail.com, smohnal9@gmail.com

The following statement is proved in the article: For any constant $K > 1$, there exist upper unbounded convex functions f and g on $[0; +\infty)$ such that the inequality $f(x) \leq g(x)$ holds for all $x \geq 0$, and for the set $E_1 = \{x \geq 0 : f'_+(x) \leq Kg'_+(x)\}$ holds $dE_1 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \text{meas} (E_1 \cap [0, R]) = \frac{K-1}{K}$,

where f'_+ and g'_+ are the right-hand derivatives of the functions f and g , respectively.

Key words: *convex function, exceptional set, differentiation of inequality.*