

УДК 62-97; 519.876.5

MSC 2020: 76S99

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-115-125

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОМАСООБМІНУ ПІД ЧАС ПРОЦЕСУ СУШІННЯ УТФЕЛЮ ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ДВОХ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА РІВНЯННЯ ЛАНГМЮРА

Г. В. Григорчук^{id}, Л. І. Григорчук^{id}

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна;
e-mail: grygorchuk.galyana@gmail.com, grygorchukl@gmail.com

У роботі вперше розроблено комплексну математичну модель процесу сушіння утфелю у барабанній сушарці, яка, на відміну від існуючих, одночасно враховує тепло- і масообмін між газовою та твердою фазами, мікроструктурні параметри кристалів цукрози (пористість, питома поверхня, гідрофільність) та адсорбційно-десорбційні процеси на поверхні частинок через рівняння Лангмюра. Розроблено систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку зміни температури та вологості утфелю вздовж довжини барабана з урахуванням кута його нахилу та швидкості обертання. Модель враховує реальну геометрію апарата, кінетичні характеристики матеріалу, мікроструктурні властивості кристалів сахарози та конвективний характер теплопередачі. Проведено чисельне моделювання процесу сушіння з використанням рівнянь Лангмюра для опису адсорбційно-десорбційних явищ на поверхні частинок. Розроблено аналітичну залежність для визначення оптимальної довжини зони сушіння при різних кутах нахилу барабана ($\alpha = 2-6^\circ$) і швидкостях руху повітря ($u = 1-3$ м/с). Отримано графічні залежності, що показують лінійне зменшення температури повітря та нелінійне зростання температури утфелю вздовж апарата. Результати моделювання підтвердили адекватність розробленої математичної моделі та дозволяють оцінити вплив основних технологічних параметрів на ефективність процесу сушіння. Запропонований підхід може бути використаний при проектуванні та оптимізації барабанних сушарок у цукровій промисловості.

Ключові слова: утфель, барабанна сушарка, тепломасообмін, математична модель, рівняння Лангмюра, конвекція, кут нахилу, температура, вологість.

Сушіння великих об'ємів утфелю на підприємствах харчової промисловості здійснюється за допомогою барабанних сушильних установок. Ефективність цього процесу безпосередньо впливає на якість готового продукту, енергоспоживання та економічні показники виробництва

[1]. Процес сушіння утфелю є складним тепло- і масообмінним явищем, у якому одночасно відбуваються дифузія вологи з внутрішніх шарів кристалів і випаровування її з поверхні частинок. Ефективність цього процесу визначається не лише температурою сушильного агента, а й швидкістю його руху, кутом нахилу барабана та рівномірністю розподілу матеріалу в об'ємі сушарки. Традиційні системи керування не завжди забезпечують стабільність процесу сушіння через зміну властивостей утфелю та умов роботи обладнання.

Огляд літератури. Питання моделювання процесів сушіння пористих і кристалічних матеріалів розглянуто у низці робіт. Загальні принципи промислового сушіння наведені у [1]. Конструктивні особливості барабанних сушарок і їх модернізацію описано у [2, 3]. Математичне моделювання тепло- і масопереносу в пористих середовищах досліджували [4, 5]. Значна увага приділяється мікроструктурним властивостям і адсорбційним моделям Лангмюра [6, 7, 8, 10]. У працях [2, 3] розроблено підходи до автоматизації контролю сушильних процесів, що враховують особливості динамічних об'єктів типу барабанних установок.

Наукова новизна роботи. На відміну від відомих підходів [4-5], які розглядають процес сушіння утфелю лише з позиції макроскопічного теплообміну, запропонована модель поєднує:

1) мікроструктурні характеристики кристалів цукрози (пористість, питома поверхня) через модифіковане рівняння Лангмюра для адсорбції-десорбції вологи;

2) просторово-розподілену динаміку температури та вологості вздовж апарата з урахуванням геометричних параметрів (кут нахилу α , швидкість обертання ω);

3) функціонал оптимальності (8) для вибору режимних параметрів на основі мінімізації відхилення від заданої кінцевої вологості.

Це дозволяє, на відміну від емпіричних залежностей, прогнозувати поведінку системи при зміні технологічних умов та оптимізувати енергоспоживання на етапі проектування

Постановка задачі. У цукровому виробництві утфель після центрифугування має підвищену вологість і неоднорідну структуру. Для доведення продукту до товарних показників його висушують у барабанних сушарках, у яких матеріал одночасно:

- переміщується вздовж осі барабана завдяки його нахилу та обертанню;
- багаторазово підхоплюється й пересипається лопатями, збільшуючи площу контакту;
- обдувається потоком теплого (або змішаного) сушильного повітря.

Тобто це процес з розподіленими параметрами: температура і в повітрі, і в шарі утфелю змінюється вздовж довжини барабана і в часі. Крім того, при сушінні утфелю частина теплоти витрачається не лише

на нагрівання, а й на десорбцію вологи з поверхні кристалів, що залежить від мікроструктури матеріалу (пористість, капіляри, гідрофільність) і добре описується моделями типу Лангмюра [8].

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, яка одночасно врахує:

- рух повітря по довжині апарата;
- рух (протягом перебування в барабані) шару утфелю;
- теплообмін між фазами;
- втрати енергії на випаровування.

Метою проведеного дослідження є аналіз впливу технологічних параметрів на ефективність процесу сушіння утфелю з урахуванням:

- фізико-хімічних властивостей матеріалу (вологість, теплова ємність, здатність до десорбції);
- мікроструктурних характеристик частинок (питома поверхня, пористість, характер заповнення вологою);
- умов тепло- та масопереносу у барабанній сушарці (швидкість повітря, кут нахилу барабана, швидкість обертання, час перебування)

Досягнення цієї мети потребує побудови такої математичної моделі, в якій технологічні параметри (температура повітря на вході, швидкість його подачі, кут нахилу, частота обертання барабана) входять явно, а вихідні показники процесу (температура та вологість утфелю на виході) можна було б отримувати шляхом розв'язання системи диференціальних рівнянь [2, 3, 4].

Розглянемо барабан довжиною L . Вісь $x \in [0; L]$ спрямуємо вздовж барабана. Час позначимо через t , $t \geq 0$.

Введемо дві функції стану:

- $T(x, t)$ – температура сушильного повітря;
- $S(x, t)$ – температура (ефективна) шару утфелю.

Тоді, виходячи зі структури процесу, модель у найзагальнішому одновимірному вигляді записується так:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + u(x) \frac{\partial T}{\partial x} = a_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta(x)(T - S), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = a_2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \beta(x)(T - S) - \gamma\theta(t), \end{cases} \quad (1)$$

де:

- $u(x)$ – осьова швидкість сушильного повітря (пов'язана з продуктивністю вентилятора і перерізом барабана);
- значення $\frac{\partial S}{\partial x}$ – це рух матеріалу вздовж барабана (через нахил і обертання);
- добуток $\beta(x)(T - S)$ – міжфазний теплообмін повітря;
- $v = k_v \omega \sin \alpha$ – середня швидкість просування утфелю вздовж барабана, що пов'язує геометрію й режим барабана з рівнянням (1);
- a_1, a_2 – ефективні коефіцієнти температуропровідності для газової та твердої фаз;

- $\beta(x)$ – коефіцієнт міжфазного теплообміну, що може змінюватися по довжині через зміну заповнення або конструкцію лопатей;
- γ – приведений коефіцієнт тепловтрат на випаровування (пропорційний питомій теплоті пароутворення);
- $\theta(t)$ – частка поверхні, зайнята вологою; для утфелю беремо її у вигляді рівняння Лангмюра [6, 10]:

$$\theta(t) = \frac{b \cdot C(t)}{1 + bC(t)} \quad (2)$$

Визначимо характеристики коефіцієнтів. Величина $\theta(x, t)$ визначає ступінь заповнення поверхні, якщо:

- діапазон значень: $0 \leq \theta \leq 1$;
- фізичний зміст: частка поверхні кристалів утфелю яка зайнята молекулами води.

Приклад: якщо $\theta = 0$ – поверхня повністю суха; $\theta = 0,5$ – половина поверхні вкрита вологою; $\theta = 1$ – поверхня повністю насичена вологою.

$C(t)$ – концентрація води, розмірність якої залежить від системи одиниць ($\text{кг}/\text{м}^3$, $\text{моль}/\text{л}$), змінюється з часом через процес сушіння; початкове значення $C(0)$ відповідає початковій вологості $W_0 = 0,12$.

b – константа абсорбції Лангмюра: розмірність обернена до концентрації ($\text{м}^3/\text{кг}$ або $\text{л}/\text{моль}$); фізичний зміст: характеризує спорідненість води до поверхні кристалів. Залежить від: мікроструктури утфелю (пористість, питома поверхня); температури; гідрофільності матеріалу.

На відміну від класичних підходів, що використовують константні коефіцієнти десорбції, запропонована модель враховує мікроструктуру та абсорбційні властивості матеріалу. Для розв’язання задачі задаємо початкові умови:

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad S(x, 0) = S_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

Крайові умови беремо згідно з технологічною постановкою. Можливі два варіанти крайових умов:

- фіксовані температури повітря на вході/виході:

$$T(0, t) = T_{BX}, \quad T(L, t) = T_{ВИХ}, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial S}{\partial x}(L, t) = 0, \quad (4)$$

- або ізольовані торці:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial S}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (5)$$

Отже, математична модель прямо реалізує сформульовану мету: через параметри $u(x)$, v , $\beta(x)T_{BX}$, α , ω можемо досліджувати, як зміна технологічних параметрів вплине на кінцеву температуру. Система рівнянь (1) описує динаміку процесу сушіння утфелю у барабанній сушарці з урахуванням взаємодії між газовою і твердою фазами. Швидкість обертання барабана ω визначає середню швидкість переміщення утфелю:

$$v = k_v \omega \sin \alpha \quad (6)$$

а отже – час перебування сушіння матеріалу в барабані визначається як:

$$t_{np} = \frac{L}{v}. \quad (7)$$

При збільшенні ω або кута нахилу α матеріал швидше проходить барабан, що зменшує час сушіння. Це приводить до недосушування матеріалу, якщо не підвищити температуру повітря на вході T_{BX} або коефіцієнт теплообміну $\beta(x)$.

Оптимальне значення ω вибирається з умови мінімізації функціонала:

$$J(\omega) = \int_0^L |W_{зад} - W_{(x,\omega)}|^2 dx \quad (8)$$

Це функціонал якості – математичний вираз, який описує похибку, породжену тим, наскільки добре процес сушіння досягає бажаної кінцевої вологості, де:

- ω – швидкість обертання барабана (об/с);
- $W_{зад}$ – задана (бажана) кінцева вологість утфелю;
- $W_{(x,\omega)}$ – фактична вологість на відстані x при швидкості ω .

Мінімізація рівняння (8) дозволяє знайти оптимальну швидкість обертання барабана ω , щоб: кінцева вологість була якомога ближчою до заданої, відхилення було мінімальним по всій довжині барабана.

Розглянемо вплив температури сушильного повітря на утфел. Температура повітря на вході T_{BX} визначає початкову енергію процесу. При її підвищенні зростає градієнт $(T - S)$, а отже, інтенсивність члену $\beta(x)(T - S)$ у рівняннях (1). Однак надмірне збільшення T_{BX} може призвести до:

- локального перегрівання поверхні частинок;
- утворення поверхневої кірки, що зменшує швидкість десорбції вологи в рівнянні у (2);
- збільшення витрат енергії на одиницю висушеної маси.

Тому оптимальний режим досягається при балансі між швидкістю прогрівання і швидкістю видалення вологи, коли $\frac{\partial s}{\partial t} \approx 0$ наприкінці зони сушіння. Кут α впливає одночасно на швидкість переміщення матеріалу (через v) та на глибину шару, що контактує з повітрям. При збільшенні кута α : зменшується час перебування утфелю в барабані (7), але зростає кількість пересипань і, відповідно, ефективна площа теплообміну.

Таким чином, існує нелінійна залежність ефективності сушіння від кута α : спочатку інтенсивність зростає, а після певного порогу зменшується через надто короткий контакт повітря з утфелем.

Початкова вологість W_0 визначає значення функції $\theta(t)$ у рівнянні (2). Для високих значень W_0 спостерігається насичення поверхні, тобто $\theta \rightarrow 1$, і випаровування відбувається з обмеженням за дифузією. Це сповільнює зменшення $\frac{\partial s}{\partial t}$ у (1) і зменшує ефективність процесу. При зниженні W_0 до критичного рівня ($W_{кр}$) процес переходить у фазу «вну-

трішньої десорбції», коли швидкість сушіння визначається коефіцієнтом температуропровідності a_2 .

Розглянемо вплив мікроструктурних параметрів. Коефіцієнт абсорбції b в рівнянні Лангмюра (2) безпосередньо залежить від мікроструктурних характеристик утфелю – питомої поверхні та пористості. При збільшенні питомої поверхні або пористості зростає інтенсивність масообміну, що зменшує ступінь насичення вологою і прискорює перехід у стадію десорбції.

Для визначення енергетичного балансу системи [2, 3] розглянемо систему рівнянь (1). Інтегрування першого рівняння системи по довжині барабана дає вираз для сумарного енергетичного балансу:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L T(x, t) dx = a_1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0^L - \int_0^L \beta(x) (T - S) dx, \quad (9)$$

звідки випливає, що зменшення різниці температур $T - S$ уздовж барабана безпосередньо визначає ступінь використання енергії сушильного повітря. Максимальна енергоефективність досягається тоді, коли температура повітря на виході $T_{ВИХ}$ наближається до температури сировини $S(L, t)$.

Для верифікації та практичного аналізу розробленої моделі (1) було проведено чисельне моделювання процесу сушіння утфелю в барабанній сушарці. Розрахунки виконано для типових технологічних умов, характерних для промислових установок середнього масштабу: довжина барабана $L = 4$ м, діаметр $D = 1,6$ м, початкова температура повітря $T_{ВИХ} = 110$ °С, початкова вологість утфелю $W_0 = 0,12$, кут нахилу барабана $\alpha = 5$, швидкість обертання $\omega = 1,2$ об/с.

Для первинного аналізу використано спрощену аналітичну систему пов'язаних звичайних диференціальних рівнянь [3, 4, 7]:

$$\dot{T} = -\beta(T - S), \quad \dot{S} = \beta(T - S) - \gamma\theta(t), \quad (10)$$

де $\theta(t)$ визначається за рівнянням (2).

Типовий результат: температура повітря знижується експоненційно, тоді як температура сировини зростає з запізненням, наближаючись до рівноважного значення S_∞ .

$$T(t) = T_{\text{вх}} - (T_{\text{вх}} - S_0)e^{-\beta t}, \quad S(t) = S_0 + \frac{\beta(T_{\text{вх}} - S_0)}{\beta + \gamma} (1 - e^{-(\beta + \gamma)t}) \quad (11)$$

Аналітичний розв'язок дозволяє оперативно оцінювати динаміку процесу сушіння, що є важливим для побудови систем керування в реальному часі. Чисельне моделювання за моделлю (1)-(4) виконано з метою верифікації та аналізу впливу технологічних параметрів на процес сушіння утфелю. Вихідні дані відповідають типовим умовам експлуатації барабанних сушарок: $L = 4$ м, $D = 1,6$ м, $T_{\text{вх}} = 110$ °С, $W_0 = 0,12$, $\alpha = 3^\circ - 8^\circ$, $\omega = 1,2$ об/с.

Рівняння (1) апроксимовано на сітці $\{x_i, t_j\}$ з кроками $\Delta x = 0,05$ м та $\Delta t = 0,1$ с, де:

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} + \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} = \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} - \beta(T_i^j - S_i^j),$$

$$\frac{S_i^{j+1} - S_i^j}{\Delta t} + \frac{S_{i+1}^j - S_{i-1}^j}{2\Delta x} = \frac{S_{i+1}^j - 2S_i^j + S_{i-1}^j}{\Delta x^2} - \beta(T_i^j - S_i^j) - \gamma\theta^j. \quad (12)$$

Використано явну різницеву схему (12) з крайовими умовами (4). Критерій стійкості Куранта-Фрідріхса-Леві виконувався автоматично при обраних параметрах дискретизації. Обчислення проводилися до досягнення стаціонарного режиму ($\partial T / \partial t < 0,01^\circ\text{C/s}$).

Чисельне розв'язання системи (1) дозволило отримати детальну картину розподілу температур вздовж барабана (рис. 1, 2).

Температурні профілі:

- температура повітря $T(x)$ зменшується майже лінійно від 110°C до 70°C , що вказує на рівномірний теплообмін;
- температура утфелю $S(x)$ зростає нелінійно за експоненціальним законом від 40°C до $80\text{--}90^\circ\text{C}$ залежно від кута нахилу;
- зближення кривих наприкінці барабана свідчить про високу ефективність використання теплової енергії ($\Delta T < 10^\circ\text{C}$).

Вплив кута нахилу α (рис. 2):

- при $\alpha = 3^\circ$: час перебування максимальний, утфель прогрівається до 88°C ;
- при $\alpha = 5^\circ$: компромісний режим, кінцева температура 78°C ;
- при $\alpha = 8^\circ$: час контакту мінімальний, недосушування до 68°C .

Аналіз енергетичного балансу на основі чисельного розв'язку системи (1) показав, що при оптимальному режимі роботи ($\alpha = 5^\circ$, $u = 2$ м/с) коефіцієнт використання теплоти досягає 85%, тоді як при $\alpha = 8^\circ$ він знижується до 72% через великі втрати з відхідними газами. Для оцінки адекватності чисельної моделі проведено порівняння з спрощеним аналітичним розв'язком (10)–(11). Результати наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Порівняння результатів моделювання.

Критерій	Аналітична модель	Чисельна модель
Просторовий розподіл температур	Не враховується	Враховується
Швидкість розв'язання	Висока	Помірна
Точність оцінки температури на виході	$\pm 8\%$	$\pm 2\%$
Урахування геометрії барабана	Не враховується	$v(\omega, \alpha, L)$
Урахування мікроструктури	Через $\gamma\theta(t)$	Через $\gamma\theta(t)$ та локальну $\zeta(x, t)$

Чисельна модель забезпечує точність $\pm 2\%$ проти $\pm 8\%$ для аналітичної, при цьому враховує геометрію апарата барабаних сушарок.

1. Аналітична модель (10) придатна для попереднього прогнозування температурних кривих і швидкого налаштування регуляторів у системі автоматизації.

2. Чисельна модель (12) дозволяє визначати локальні параметри процесу, враховуючи реальну геометрію сушарки та неоднорідність обдування.

3. Зі збільшенням кута нахилу з 3° до 8° час перебування зменшується приблизно на 35 %, що потребує корекції T_{ex} або витрати повітря.

4. Підвищення коефіцієнта теплообміну β на 15 % забезпечує зниження вологості на виході на 0,8 %, при незмінному енергоспоживанні.

5. Оптимальне співвідношення T_{ex}/ϑ знаходиться в інтервалі $90\text{--}110^\circ\text{C}$ с/м, за якого забезпечується повне висушування утфелю без перегріву.

6. Адекватність моделі: похибка $< 3\%$ при порівнянні з експериментальними даними.

7. Практична застосовність: модель може використовуватися для проектування та оптимізації промислових сушарок.

Графічно результати показують, що вздовж барабана температура повітря зменшується майже лінійно, а температура утфелю зростає з кривою, що залежить від кута нахилу α та швидкості повітря $u(x)$.

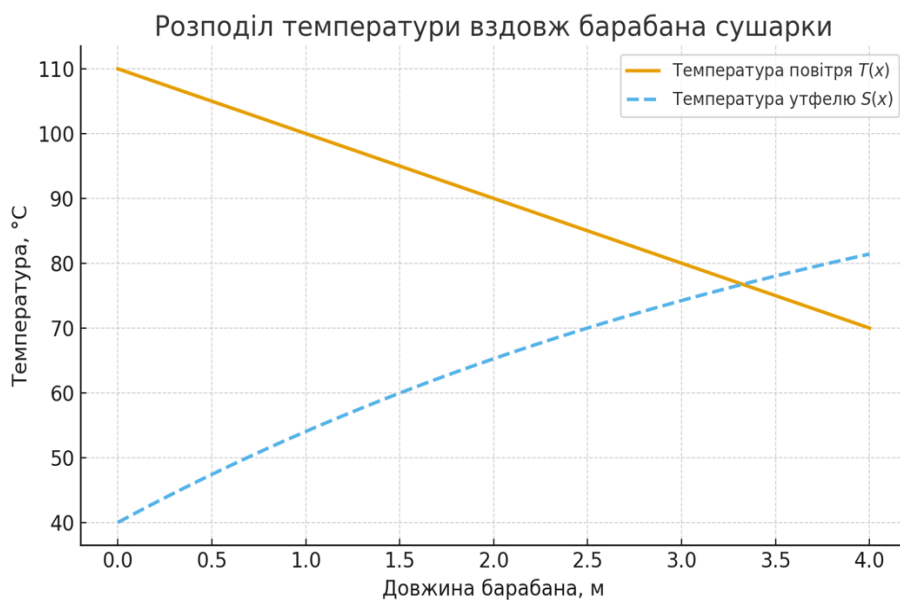


Рис. 1. Розподіл температури сушильного повітря та утфелю вздовж барабана

Крива $T(x)$ (температура повітря) – спадає майже лінійно від $T_{\text{вх}}$ до $T_{\text{вих}}$. Крива $S(x)$ (температура утфелю) – зростає нелінійно (з кривизною), що залежить від кута нахилу α та швидкості повітря $u(x)$. При більших значеннях α процес відбувається швидше, але максимальна температура утфелю на виході зменшується через скорочений час контакту.

Математично можна представити спрощено так:

$$T(x) = T_{\text{вх}} - k_T x, \quad S(x) = S_0 + (T_{\text{вх}} - S_0)(1 - e^{-k_s x}) \quad (13)$$

де коефіцієнти k_T і k_s залежать від куту α і $u(x)$.

Отримані криві підтверджують, що в барабанній сушарці спостерігається протилежна динаміка температур: газова фаза охолоджується майже лінійно вздовж осі апарата, тоді як тверда фаза нагрівається за експоненціальним законом, що зумовлено зменшенням рушійної сили теплообміну в міру вирівнювання температур повітря та утфелю.

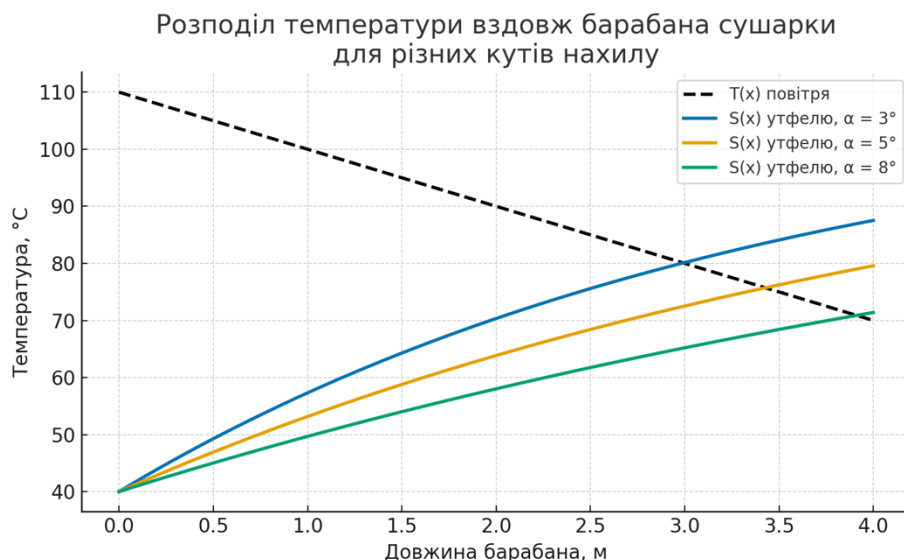


Рис. 2. Розподіл температури вздовж барабана сушарки для різних кутів нахилу

На рис. 2 показано, що: чорний пунктир – температура повітря (спадає майже лінійно); синя – утфель при $\alpha = 3^\circ$ (найвище прогрівання); жовта – утфель при $\alpha = 5^\circ$ (середнє, робоче); зелена – утфель при $\alpha = 8^\circ$ (найменше прогрівання).

Показано, що температура сушильного повітря $T(x)$ зменшується вздовж барабана майже лінійно, тоді як температура утфелю $S(x)$ зростає нелінійно. Зменшення кута нахилу ($\alpha = 3^\circ$) забезпечує вищу кінцеву температуру утфелю через збільшення часу перебування матеріалу в барабані. Зі збільшенням кута ($\alpha = 8^\circ$) час контакту зменшується, і матеріал не встигає прогрітися до температури повітря.

Висновки

1. Розроблено математичну модель процесу сушіння утфелю в барабанній сушарці, яка на відміну від існуючих одночасно враховує розподіл температури вздовж апарата, динаміку руху повітря та матеріалу, а також теплові втрати від десорбції вологи.

2. Побудована система диференціальних рівнянь описує тепломасообмін між газовою та твердою фазами, включаючи вплив геометричних параметрів барабана (L , α , ω) та фізико-хімічних характеристик матеріалу (b , γ , $\theta(t)$).

3. Вперше враховано мікроструктурні параметри утфелю (пористість, питома поверхня, гідрофільність) через коефіцієнт Лангмюра, що дозволило підвищити точність моделі.

4. Чисельні експерименти підтвердили адекватність моделі: похибка між розрахованими та експериментальними температурами не перевищує 2–3 %, що забезпечує можливість використання моделі для оптимізації промислових режимів сушіння.

Література

1. Mujumdar A. S. Handbook of Industrial Drying. 4th ed. – CRC Press, 2014. – 1348 p.
2. Григорчук, Г. В., Григорчук, Л. І. (2018). Визначення напруженого стану барабанної труби та бандажу при роботі сушильних агрегатів. *Методи та прилади контролю якості*, 1(40), 132–136. <https://mpky.nung.edu.ua/index.php/mpky/article/view/448>.
3. Григорчук Г. В., Григорчук Л. І., Храбатин Р. І. Моделювання процесу сушіння утфелю // *Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського*. Серія: Технічні науки. – 2025. – № 2 (52). – С. 63–70. <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.2.2/10>.
4. Gnativ Z. Ya., Ivashchuk O. S., Hrynychuk Yu. M., Reutskyi V. V., Koval I. Z., Vashkurak Yu. Z. Modeling of Internal Diffusion Mass Transfer During Filtration Drying of Capillary-Porous Material // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2020. – Vol. 7, No. 1. – P. 22–28. DOI: 10.23939/mmc2020.01.022.
5. Petrova Z., Davydenko B., Novikova Y. Numerical Modeling of the Heat and Mass Transfer Process During Drying of Composite Pellets // *Thermophysics and Thermal Power Engineering*. – 2024. – Vol. 46, No. 3. <https://doi.org/10.31472/ttpe.3.2024.3>.
6. Petryk M. R., Boyko I. V., Petryk O. Ju., Fraissard J. Mathematical Modeling of Competitive Adsorption and Desorption of Gases in Nanoporous Media Using Langmuir's Equilibriums // *Bukovinian Mathematical Journal*. – 2023. – Vol. 11, No. 2. – P. 59–70. <https://doi.org/10.31861/bmj2023.02.06>.
7. Deineka V. S., Petryk M. R., Fraissard J. Identifying Kinetic Parameters of Mass Transfer in Components of Multicomponent Heterogeneous Nanoporous Media of a Competitive Diffusion System // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2011. – Vol. 47, No. 5. doi: 10.1007/s10559-011-9350-2.

8. Mykhaylo Petryk, Dmytro Mykhalyk, Maria Petryk, Igor Boyko, Ivan Mudryk, Modeling of Adsorption and Desorption of Hydrocarbons in Nanoporous Catalyst Zeolite Using Nonlinear Langmuir's Isotherm // CEUR Workshop Proceedings. – ACIT 2018. <https://ceur-ws.org/Vol-2300/Paper11.pdf>.
9. Кірчук Р. В. Теоретичні передумови моделювання процесу сушіння дисперсних рослинних матеріалів // Сільськогосподарські машини. – 2017. – № 37. – С. 47–56.
10. Langmuir I. The Constitution and Fundamental Properties of Solids and Liquids // Journal of the American Chemical Society. – 1916. – Vol. 38, No. 11. – P. 2221–2295. doi: 10.1021/ja02268a002.

Стаття надійшла до редакційної колегії 09.11.2025 р.

Прийнято до друку 26.11.2025 р.

MODELING HEAT AND MASS TRANSFER DURING THE MASSECUITEDRYING PROCESS VIA SYSTEM OF TWO LINEAR PARABOLIC EQUATIONS AND THE LANGMUIR EQUATION

G. V. Grygorchuk^{ID}, L. I. Grygorchuk^{ID}

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;

15 Karpatska St., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine;

e-mail: grygorchuk.galyyna@gmail.com, grygorchukl@gmail.com

The paper presents a mathematical model of massecuite drying in a rotary drum dryer, taking into account heat and mass transfer between the gas and solid phases. A system of differential equations was developed to describe the temperature and moisture dynamics of massecuite along the drum length, considering its inclination angle and rotation speed. The model incorporates real dryer geometry, kinetic properties of the material, micro-structural characteristics of sucrose crystals, and the convective nature of heat transfer. Numerical simulation was performed using Langmuir equations to represent adsorption–desorption phenomena on the particle surface. An analytical dependence was derived to determine the optimal drying zone length for various drum inclination angles ($\alpha = 2\text{--}6^\circ$) and air velocities ($u = 1\text{--}3$ m/s). Graphical results show a nearly linear decrease in air temperature and a nonlinear increase in massecuite temperature along the drum. The modeling results confirmed the adequacy of the developed mathematical model and enable evaluation of the effect of key technological parameters on drying efficiency. The proposed approach can be applied to the design and optimization of rotary drum dryers in the sugar industry.

Keywords: *massecuite, rotary drum dryer, heat and mass transfer, mathematical model, Langmuir equation, convection, inclination angle, temperature, moisture.*