

УДК 517.537.72+517.548.9

MSC 2020: 30B50

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-28-34

ПРО ВІДСУТНІСТЬ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ У СПІВВІДНОШЕННІ З ТЕОРЕМИ ВІМАНА

С.І. Дубей^{ID}, О.Б. Скасків^{ID}, О.М. Трусевич^{ID}

Львівський національний університет імені Івана Франка;

79000, вул. Університетська, 1, Львів, Україна;

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності ДСНС
України;*

79000, вул. Клепарівська, 35, Львів Україна;

e-mail: mazorchyk@gmail.com, olskask@gmail.com,

o.trusev@ldubgd.edu.ua

Нехай $S(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, — клас функцій, аналітичних в $\Pi(a, b) = \{z : a < \operatorname{Re} z < b\}$, таких що

$$(\forall x \in (a, b)) : M(x, F) := \sup\{|F(t + iy)| : a < t \leq x, y \in \mathbb{R}\} < +\infty,$$

та $L(x, F) = (\ln M(x, F))'_+$ — правостороння похідна. Через $S_\infty(a, b)$ позначаємо підклас класу $S(a, b)$, який складається з тих функцій $F \in S(a, b)$, що $L(x, F) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow b - 0$), а через S_0 позначаємо клас функцій $F \in S_\infty(0, +\infty)$, для яких існує функція $\delta(r) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ така, що $\delta(r) \nearrow +\infty$ ($0 \leq r \uparrow +\infty$) та виконується нерівність

$$|L(r \pm \delta(r)/L(r, F), F) - L(r, F)| \leq L(r, F)/\delta(r) \quad (r \geq r_0)$$

Нехай

$$B_F(r) = \sup\{\operatorname{Re} F(z) : \operatorname{Re} z < r\}, \quad A_F(r) = \inf\{\operatorname{Re} F(z) : \operatorname{Re} z < r\}.$$

Доведено наступну теорему: Нехай $F \in S_0$, тоді асимптотичні співвідношення

$$M(r, F) = (1 + o(1))B_F(r) = -(1 + o(1))A_F(r),$$

виконуються при $r \rightarrow +\infty$.

Ключові слова: аналітична функція, теорема Вімана, виняткова множина, максимум модуля.

1. Вступ

Нехай $S(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, — клас аналітичних у вертикальній смужі $\Pi(a, b) := \{z: a < \operatorname{Re} z < b\}$ функцій таких, що

$$(\forall x \in (a, b)): M(x, F) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|F(t + iy)| : a < t \leq x, y \in \mathbb{R}\} < +\infty.$$

За принципом максимуму модуля $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$ — неспадна функція на (a, b) , а за теоремою Адамара про три прямі функція $\ln M(x, F)$ — опукла на (a, b) (див. [3, с.145, с.266]), а тому для всіх $x \in (a, b)$ права похідна $L(x) = L(x, F) \stackrel{\text{def}}{=} (\ln M(x, F))'_+$ існує і є неспадною на інтервалі (a, b) .

Через $S_\infty(a, b)$ позначимо підклас класу $S(a, b)$, який складається з тих функцій $F \in S(a, b)$, що

$$L(x, F) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow b - 0).$$

а через S_0 позначаємо клас функцій $F \in S_\infty(0, +\infty)$, для яких існує функція $\delta(r) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ така, що $\delta(r) \nearrow +\infty$ ($0 \leq r \uparrow +\infty$) і виконується нерівність

$$|L(r \pm \delta(r)/L(r, F), F) - L(r, F)| \leq L(r, F)/\delta(r) \quad (r \geq r_0). \quad (1)$$

Зауважимо, що клас S_0 — не порожній. Для того, щоб в цьому переконатися, досить розглянути функцію $F(z) = \exp\{e^z\}$.

Крім цього, умова (1) є рівносильною до умови

$$|L(r + \delta(r)/L(r, F), F) - L(r, F)| \leq L(r, F)/\delta(r) \quad (r \geq r_0). \quad (2)$$

Переконаємось в цьому при $\delta(r) \equiv \delta > 1$. Достатньо перевірити, що з умови (2) випливає, що

$$|L(r - \delta(r)/L(r, F), F) - L(r, F)| \leq L(r, F)/\delta(r) \quad (r \geq R_0). \quad (3)$$

Поначимо $R = r - \delta(r)/L(r, F) < r$. Тоді,

$$\begin{aligned} L(r, F) - L(r - \delta(r)/L(r, F), F) &= L(R + \delta(r)/L(r, F), F) - L(R) \leq \\ &\leq L(R + \delta(R)/L(R, F), F) - L(R) \leq L(R, F)/\delta(R) \leq L(r, F)/\delta(r) \end{aligned}$$

$R = (r - \delta(r)/L(r, F) > r_0)$. Якщо r_0 таке, що $\delta(r)/L(r, F) < 1$ ($r > r_0$), то достатньо вибрати $R_0 = r_0 + 1$, бо тоді при $r \geq R_0$ маємо $r - \delta(r)/L(r, F) > R_0 - 1 = r_0$. Отже, нерівність (2) виконується.

Далі, якщо функція $\delta(r) \nearrow +\infty (r \uparrow +\infty)$ така, що $L(r, F)/\delta(r) \nearrow +\infty (r \nearrow +\infty)$, то попереднє міркування проходить без змін і воно, по-суті вже написано у рядках після на попередній сторінці даного тексту.

Нескладно тепер переконатися, що з умови (2) випливає існування функції $\delta(r)$, яка має потрібні властивості і для якої умова (2) все ще виконується.

Нехай $\mathcal{L}$ позначає клас додатних неспадних до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функцій, а $\mathcal{L}_1$ позначає його підклас, до якого входять лише ті функції $h \in \mathcal{L}$, для яких виконується співвідношення

$$h\left(x + 1/h(x)\right) = O(h(x)), (x \rightarrow +\infty).$$

Для вимірної за Лебегом множини $E \subset [0; +\infty)$, що має скінченну міру Лебега $\text{meas } E = \int_E dx < +\infty$, визначимо її асимптотичну h -щільність у нескінченності

$$D_h(E) = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} h(R) \cdot \text{meas}(E \cap [R; +\infty)).$$

Для функції $F \in S_0$ і $r > 0$ позначимо

$$B_F(r) = \sup\{\text{Re } F(z) : \text{Re } z < r\}, \quad A_F(r) = \inf\{\text{Re } F(z) : \text{Re } z < r\}.$$

З доведеного у статті [2] (див. також [4]) аналогу теореми Вімана, випливає наступне твердження.

Теорема 1.1. Нехай $F \in S_\infty(0, +\infty)$. Якщо $\Phi \in \mathcal{L}$, $h \in \mathcal{L}_1$ такі, що

$$L(r, F) \geq \Phi(r) (r \geq r_0), \quad h(r) = o(\Phi(r)) \quad (r \rightarrow +\infty),$$

то існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ нульової асимптотичної h -щільності ($D_h(E) = 0$) така, що асимптотичні співвідношення

$$M(r, F) = (1 + o(1))B_F(r) = -(1 + o(1))A_F(r) \quad (4)$$

виконуються при $r \rightarrow +\infty$ ($r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$).

Виникає природне запитання: за яких умов виняткова множина E у асимптотичних співвідношеннях (4) може бути відсутня.

В даній статті ми доведемо, що для функцій з класу S_0 множина E у асимптотичних співвідношеннях (4) відсутня. Це є твердження наступної теореми.

Теорема 1.2. Нехай $F \in S_0$. Тоді асимптотичні співвідношення (4) виконуються при $r \rightarrow +\infty$.

Нам потрібна така лема.

Лема 1.1. Нехай $F \in S_0$. Тоді для всіх $r \geq r_0$ і всіх $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| \leq \delta(r)/L(r, F)$, виконується

$$F(w + \eta) = (1 + \omega(\eta))F(w)e^{\eta L(r, F)},$$

де

$$|\omega(\eta)| < |\eta|c(r)L(r, F)/\delta(r), \quad c(r) := 1 + e(1 + \varepsilon(r))$$

а точки w такі, що $\operatorname{Re} w = r$ і

$$|F(w)| \geq M(r, F)/(1 + \varepsilon(r)),$$

а $\varepsilon(r)$ – задана довільна функція така, що $\varepsilon(r) \rightarrow +0$ ($r \rightarrow +\infty$).

Доведення лема 1.1. Для фіксованого $z \in \Pi(0, +\infty)$ розглянемо функцію

$$g(\tau) = g(z, \tau) = F(z + \tau): \Pi(-\operatorname{Re} z, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}.$$

З означення класу S_0 маємо, що для всіх τ , $|\tau| \leq \psi(r) = \delta(r)/L(r, F)$, виконується нерівність

$$|L(r + \tau, F) - L(r, F)| \leq L(r, F)/\delta(r). \quad (5)$$

Нехай точка w , $\operatorname{Re} w = r$, така, що

$$|F(w)| \geq M(r, F)(1 + \varepsilon(r))^{-1}.$$

З опуклості функції $\ln M(r, F)$ маємо, що для всіх $r > 0, h > 0$

$$\ln M(r + h, F) - \ln M(r, F) \leq hL(r + h, F),$$

а також для всіх $r > 0, h < 0$

$$\ln M(r + h, F) - \ln M(r, F) \leq hL(r, F).$$

З двох останніх нерівностей ми, відповідно, отримуємо що

$$\ln M(r + h, F) - \ln M(r, F) - hL(r, F) \leq |h||L(r + h, F) - L(r, F)|$$

$r > 0, h > 0$, а також

$$\ln M(r + h, F) - \ln M(r, F) - hL(r, F) \leq 0 \leq |h||L(r + h, F) - L(r, F)|$$

для $r > 0, h < 0$. За допомогою нерівності (5), звідси для всіх $|\tau| \leq \psi(r)$ і $r > 0$ отримуємо

$$\ln M(r + \tau, F) - \ln M(r, F) - \tau L(r, F) \leq 1,$$

звідки для всіх $r > 0$ та $\eta \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} \eta| \leq \psi(r)$ маємо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(w+\eta)}{F(w)} e^{-\eta L(r,F)} \right| \leq \\ & \leq (1+\varepsilon(r)) \exp \{ \ln M(r+\operatorname{Re} \eta, F) - \ln M(r, F) - \operatorname{Re} \eta L(r, F) \} \leq \\ & \leq (1+\varepsilon(r)) e. \end{aligned} \quad (6)$$

З включення $\{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| \leq a\} \subset \{\eta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \eta| \leq a\}$, випливає, що нерівність (6) виконується для всіх $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| \leq \psi(r)$, and $r > 0$.

При фіксованих $w \in \Pi(0, +\infty)$ та $r > 0$ розглянемо тепер функцію $\omega: \Pi(-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\omega(\eta) := \frac{F(w+\eta)}{F(w)} e^{-\eta L(r,F)} - 1.$$

З нерівності (6) випливає, що $|\omega(\eta)| \leq 1 + e(1 + \varepsilon(r)) = c(r)$ для всіх $r > 0$ та $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| \leq \psi(r)$. Тоді, за лемою Шварца, для всіх η , $|\eta| \leq \psi(r)$ остаточно отримуємо, що

$$|\omega(\eta)| \leq c(r) \frac{|\eta|}{\psi(r)},$$

де $c(r) = (1 + e(1 + \varepsilon(r)))$.

□

Доведення теореми 1.2. Для доведення теореми використаємо схему міркувань з [7] (див. також [5, 6, 8, 1]). Прийmemo

$$\eta = i(\pi - \arg F(w))/L(r, F)$$

і застосуємо твердження леми 1.1. Послідовно маємо

$$|\omega(\eta)| \leq c(r) |(\pi - \arg F(w))/L(r, F)| \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow +\infty$, а також

$$F(w+\eta) = (1+o(1))|F(w)|e^{i\pi} = -(1+o(1))|F(w)| = -(1+o(1))M(r, F).$$

Звідки, $A_F(r) \leq \operatorname{Re} F(w+\eta) = -(1+o(1))M(r, F)$, а з нерівності

$$\begin{aligned} M(r, F) &= \sup\{|F(z)| : \operatorname{Re} z = r\} \geq \sup\{-\operatorname{Re} F(z) : \operatorname{Re} z = r\} = \\ &= -\inf\{\operatorname{Re} F(z) : \operatorname{Re} z = r\} = -A_F(r) \end{aligned}$$

отримаємо, що $A_F(r) = -(1+o(1))M(r, F)$ ($r \rightarrow +\infty$). Якщо тепер прийняти $\eta = -i \arg F(w)/L(r, F)$, то подібно, як і вище,

$$F(w+A\eta) = (1+o(1))|F(w)| \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Звідси,

$$B_F(r) \geq \operatorname{Re} F(w + \eta) = (1 + o(1))M(r, F) \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Застосувавши нерівність $B_F(r) \leq M(r, F)$ отримаємо нерівність,

$$|A_F(r)| \leq M(r, F) \leq (1 + o(1))B_F(r) \quad (r \rightarrow +\infty),$$

що завершує доведення теореми 1.2.

□

References

1. Dubei S.I., Skaskiv O.B. *Про основне співвідношення теорії Вімана-Валірона і асимптотична h-щільність виняткових множин*, Прикарпатський вісник наукового товариства імені Шевченка. Число, 2024, № 19(73), 18–23. doi:10.31471/2304-7399-2024-19(73)-18-23
2. Skaskiv O., Bandura A., Salo T., Dubei S. Entire functions of several variables: Analogs of Wiman's theorem. *Axioms*. 2025, 14 (3), article ID 216. <https://www.mdpi.com/2075-1680/14/3/216> doi:10.3390/axioms14030216
3. Strelitz Sh. I. *Asymptotic properties of analytical solutions of differential equations*. Vilnius: Mintis, 1972.
4. Salo T.M., Skaskiv O.B., Stasyuk Ya.Z. *On a central exponent of entire Dirichlet series*, *Mat. Stud.*, **19** (2003), no. 1, 61–72.
5. Hayman, W.K. The local growth of power series: a survey of the Wiman–Valiron method. *Canadian Mathematical Bulletin* **1974**, 17(3), 317–358. doi:10.4153/CMB-1974-064-0
6. Hayman, W.K. *Subharmonic functions*, Acad. Press: London, Great Britain, 1990; Volume 2. XXI+591 p. ISBN 978-012-334-802-9
7. Skaskiv, O.B. A generalization of the little Picard theorem. *Journal of Mathematical Sciences* **1990**, **48**, 570–578. doi:10.1007/BF01095627 Translated from *Teoriya Funktsii, Funktsional'nyi Analiz i Ikh Prilozheniya*, **1986**, **46**, 90–100.
8. Sheremeta, M.N. The Wiman-Valiron method for Dirichlet series. *Ukrainian Mathematical Journal* **1978**, 30 (6), 376–383. doi:10.1007/BF01085861 Translated from *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal* **1978**, **30** (6), 488–497.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.10.2025 р.

Прийнято до друку 8.11.2025 р.

ON THE ABSENCE OF AN EXCEPTIONAL SET IN THE RELATION FROM WIMAN'S THEOREM

S.I. Dubei , **O.B. Skaskiv** , **O.M. Trusevych** 

Ivan Franko National University of Lviv;

79000, 1 Universytetska street, Lviv, Ukraine;

Lviv State University of Life Safety;

79000, 35 Kleparivska street, Lviv, Ukraine;

e-mail: mazorchyk@gmail.com, olskask@gmail.com,

o.trusev@ldubgd.edu.ua

Let $S(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, be a class of functions analytic in $\Pi(a, b) = \{z : a < \operatorname{Re} z < b\}$ such that

$$(\forall x \in (a, b)) : M(x, F) := \sup\{|F(t + iy)| : a < t \leq x, y \in \mathbb{R}\} < +\infty,$$

and $L(x, F) = (\ln M(x, F))'_+$ is the right derivative. By $S_\infty(a, b)$ we denote a subclass of the class $S(a, b)$, which consists of those functions $F \in S(a, b)$, such that $L(x, F) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow b - 0$), and by S_0 we denote the class of functions $F \in S_\infty(0, +\infty)$ for which there exists a function $\delta(r) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $\delta(r) \nearrow +\infty$ ($0 \leq r \uparrow +\infty$) and the inequality

$$|L(r \pm \delta(r)/L(r, F), F) - L(r, F)| \leq L(r, F)/\delta(r) \quad (r \geq r_0)$$

is satisfied. Let

$$B_F(r) = \sup\{\operatorname{Re} F(z) : \operatorname{Re} z < r\}, \quad A_F(r) = \inf\{\operatorname{Re} F(z) : \operatorname{Re} z < r\}.$$

The following theorem is proved: Let $F \in S_0$, then the asymptotic relations

$$M(r, F) = (1 + o(1))B_F(r) = -(1 + o(1))A_F(r),$$

hold as $r \rightarrow +\infty$.

Key words: analytic function, Wiman's theorem, exceptional set, maximum modulus.