

УДК 622.691.4

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-335-348

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ ТЕЧІЇ ГАЗУ В ГАЗОПРОВІДІ, ВИКЛИКАНОГО ПОЯВОЮ АВАРІЙНОГО ВИТОКУ ГАЗУ

**В. Б. Запукхляк , І. Б. Прокопів **

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +38 (0342) 72-71-38; e-mail: [vasyl.zapukhliak@nung.edu.ua](mailto:vasyl.zapukhliak@nung.edu.ua)

У статті розглянуто актуальну проблему оцінювання втрат газу під час трубопровідного транспортування, важливість якої зростає в період воєнних дій через ризик зовнішніх деструктивних впливів. Метою дослідження є створення математичної моделі нестационарного процесу течії газу в газопроводі, спричиненого появою аварійного витоку. Розроблено модель, що базується на рівняннях руху та нерозривності для опису коливань тиску і масової витрати газу, які виникають під час формування витоку. Система диференціальних рівнянь зведена до лінеаризованого рівняння, яке включає функцію джерела Дірака для моделювання зосередженого відбору газу в точці витоку. Розв'язок рівняння знайдено методом інтегрального синус-перетворення при початкових (стаціонарний лінійний розподіл тиску) та граничних умовах (сталій тиск на початку і в кінці ділянки). На основі отриманих залежностей для тиску та масової витрати сформульовано методику кількісного визначення загальних втрат газу як суми початкової маси газу в аварійній ділянці та перетоків газу із сусідніх ділянок за час до закриття лінійних кранів. Проведено числові розрахунки відносної величини витрат газу з урахуванням перетоків. Графіки показують, що масова витрата газу в перерізі крана №1 після витоку миттєво зростає, а потім плавно спадає, тоді як у перерізі крана №2 спостерігається різке падіння з подальшою стабілізацією та можливим зворотним потоком. Результати моделювання забезпечують підвищення точності оцінювання втрат газу. Отримані результати можуть бути використані для вдосконалення методів діагностування та прогнозування втрат газу в газотранспортних системах.

**Ключові слова:** газопровід, аварійний витік, нестационарний процес, математичне моделювання, масова витрата, тиск, функція Хевісайда, дельта-функція Дірака, інтегральні перетворення, втрати газу.

### Вступ

Оцінювання втрат газу під час трубопровідного транспортування є одним із ключових завдань забезпечення надійності та ефективності

газотранспортних систем. У період воєнних дій ця проблема набула особливої актуальності, оскільки пошкодження трубопроводів можуть виникати через зовнішні деструктивні впливи. Витоки газу зумовлені порушенням герметичності системи та поділяються на малі й великі. Малі витоки зазвичай не змінюють режимні параметри роботи газопроводу, що ускладнює їх своєчасне виявлення як за координатою, так і за інтенсивністю. На відміну від них, великі витоки спричиняють різке порушення гідравлічного режиму, що дозволяє визначити їх місце виникнення та оцінити обсяг втраченого газу. Аварійні витоки призводять до значних економічних та екологічних збитків, величина яких прямо пов'язана з обсягом газу, що потрапляє в атмосферу. Саме тому питання точної оцінки втрат газу під час транспортування набуває особливого значення і потребує поглибленого дослідження.

Питанням оцінки втрат газу при транспортуванні присвячено ряд наукових праць [1-3], в яких досліджується діагностика малих і великих аварійних витоків, методи і способи їх ліквідації, вплив на техніко-економічні показники газотранспортної системи та на екологію довкілля.

В [4-6] приведено методики визначення витрати газу малого витоку за загальновідомою формулою Сен-Венана-Вентцеля з урахуванням характеру режиму (критичний, докритичний) та характером падіння тиску в ємності. При цьому припускається, що характер процесу ізотермічний, а отвір витікання – круглий. В [7] показано вплив форми отвору витікання на величину витрат, одержано залежність поправкового коефіцієнту від форми отвору. Однак в ряді робіт [5-8] зауважено, що формула Сен-Венана-Вентцеля дає завищені результати визначені витрат як для критичного, так і для докритичного режимів витікання, що вимагає коригування результатів теоретичних розрахунків.

Визначення координати малого витоку є практично важливою, але складною задачею. Аналітичні дослідження [7, 8] показують, що поява малого витоку з газопроводу вносить збурення в характер нестационарного процесу коливання тиску в трубопроводі, причому характер збурення залежить від величини витрати витоку і його лінійної координати. На базі результатів цих досліджень розроблено методику діагностики аварійних витоків з газопроводу, однак практична її реалізація вимагає додаткових досліджень.

В [9-11] пропонується визначити координату місця малого витоку за пониженням температури ґрунту в точці витоку внаслідок ефекту Джоуля-Томсона. Даний метод вимагає постійного контролю за станом траси.

Для великих витоків визначення координати витоку і його витрати не представляє труднощів. Найпростішим методом є метод аналізу ліній падіння квадратів тисків по довжині [12, 13]. Як відомо [4, 12] при нормальній роботі газопроводу (стаціонарний режим) фактичні значен-

ня квадратів абсолютного тиску вздовж траси газопроводу лежать на прямій лінії, нахил якої до горизонту, характеризує витрату газу в газопроводі (рис.1). При появі великого витоку нахил лінії падіння квадратів тиску змінюється. Точка перетину побудованих ліній падіння квадратів тиску  $x_a$  характеризує координати витоку, а різниця нахилів ліній падіння квадратів тиску до і після координати  $x_a$  характеризує величину витрати витоку. Однак з часом величини тисків будуть змінюватися, що свідчить про зміну величини витрати аварійного витоку.

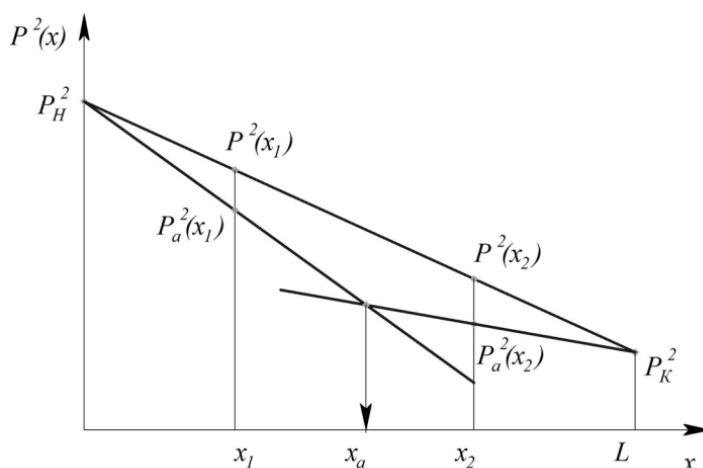


Рис. 1. Виникнення витоку в газопроводі

Як правило аварійна ділянка трубопроводу з великим витоком ізолюється від сусідніх шляхом закриття лінійних кранів, а газ, що містився в ній, витрачається в атмосферу. Обсяг газу, що містився в аварійній ділянці до появи витоку, легко визначити за відомими величинами тисків на початку і в кінці ділянки.

Слід зауважити, що від моменту появи великого витоку до повного закриття лінійних кранів на початку і в кінці аварійної ділянки проходить певний період часу, за який газ з сусідніх ділянок перетікатиме в аварійну. Величину цих перетоків слід віднести до втрат газу в результаті аварії. Для їх прогнозу можна використати аналітичні методи досліджень, оскільки емпіричні дослідження в даному випадку не виправдані як технологічно, так і екологічно.

### Постановка задач дослідження

Дослідження спрямоване на створення математичної моделі нестационарного процесу течії газу в газопроводі, зумовленого появою аварійного витоку. Для досягнення поставленої мети необхідно розробити опис коливань тиску і масової витрати газу, що виникають у трубопроводі під час формування витоку, та реалізувати відповідну модель для різних умов його появи. У ході роботи передбачається встановити

закономірності зміни тиску і масової витрати в нестационарному режимі, визначити особливості перебігу перехідних процесів і взаємозв'язок між параметрами витоків та динамікою газорозподілу. На основі отриманих результатів формулюється методика кількісного визначення втрат газу, спричинених аварійними витоків, що забезпечує підвищення точності оцінювання та ефективності реагування на порушення роботи газотранспортних систем.

### Математичне моделювання нестационарної течії газу в газопроводі за умов появи аварійного витоків

Математична модель, що описує процес руху газу в газопроводі, базується на рівняннях руху і нерозривності, які в загальному вигляді можуть бути представлені у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\lambda \rho \omega^2}{2d} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial p}{\partial t} \pm \frac{m(x,t)}{F} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де  $P(x,t)$  – тиск газу як функція лінійної координати  $x$  та часу  $t$ ;  $\omega(x,t)$  – лінійна швидкість газу;  $\rho$  – густина газу;  $\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору;  $m(x,t)$  – масова витрата відбору газу в точці  $x$ ;  $C$  – швидкість звуку в газі;  $d$  – внутрішній діаметр трубопроводу;  $\alpha$  – коефіцієнт Коріоліса;  $F$  – площа поперечного перерізу відбору;  $z$  – геодезична позначка траси.

Вважаючи газопровід горизонтальним і нехтуючи коріолісовими та інерційними втратами енергії з врахуванням лінеаризації  $\left( \frac{\lambda \omega}{2d} = 2a \right)$ , систему (1) можна привести до рівняння

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \pm \frac{C^2}{F} m(x,t), \quad (2)$$

де  $\alpha = \frac{C^2}{2a}$ .

Розглянемо газопровід кінцевої довжини  $L$  з тиском на початку  $P_H$  і в кінці  $P_K$ . Нехай в момент часу  $t = 0$  в точці  $x$  з'явився зосереджений відбір газу зі сталою масовою витратою  $M_x$ . Тоді,

$$M_x = -\frac{F}{2a} \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial x} \right). \quad (3)$$

З метою побудови моделі газопроводу з зосередженим відбором припустимо, що на ділянці газопроводу  $[x_1, x_2]$  відбувається рівномірно розподілений відбір загальною витратою  $M_x$ . Тоді

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2a}{C^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2M_x}{F(x_2 - x_1)} [\sigma(x - x_1) - \sigma(x - x_2)], \quad (4)$$

де  $\sigma(x - x_i)$  – одинична функція Хевісайда  $\sigma(x - x_i) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > x_i \\ 0 \text{ при } x \leq x_i \end{cases}$ .

Якщо відрізок  $\Delta x = x_2 - x_1$  прямує до координати  $x$ , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\bar{\sigma}(x - x_1) - [\bar{\sigma}(x - x_2) - \Delta x]}{\Delta x} = \delta(x - x_1), \quad (5)$$

де  $\delta(x - x_1)$  – функція джерела Дірака [15, 16]. Її властивості:

$$\begin{aligned} \text{а) } \bar{\sigma}(x - x_1) &= \begin{cases} 0 \text{ при } x \neq x_1 \\ \infty \text{ при } x = x_1 \end{cases}; \\ \text{б) } \int_{x_0}^{x_2} \delta(x - x_1) dx &= \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_1 \in (x_0, x_2); \\ 0, \text{ якщо } x_1 \notin (x_0, x_2); \end{cases} \\ \text{в) } \int_{x_0}^{x_2} f(x) \delta(x - x_1) dx &= \begin{cases} f(x_1), \text{ якщо } x_1 \in (x_0, x_2); \\ 0, \text{ якщо } x_1 \notin (x_0, x_2); \end{cases} \\ \text{г) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_1) dx &= f(x_1); \\ \text{д) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_1) dx &= -f'(x_1), \end{aligned}$$

де  $\delta'$  та  $f'$  – похідні від функцій  $\delta(x)$  та  $f(x)$ .

Тоді рівняння (4) зведеться до вигляду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2a}{C^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2aM_x}{F} \delta(x - x_1). \quad (6)$$

Розглянемо нетривалий проміжок часу, за який тиск на початку і в кінці газопроводу не зміниться, тобто

$$P(0, t) = P_H; \quad P(L, t) = P_K. \quad (7)$$

Вважаємо, що до появи витoku газопровід працював в стаціонарному режимі. У відповідності до [12] можна вважати з достатньою точністю розподіл тисків по довжині лінійним, тобто

$$P(x, t) = P_H - \frac{P_H - P_K}{L} x. \quad (8)$$

Таким чином задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння (6) при початкових (8) і граничних (7) умовах.

Розв'язок шукається методом інтегрального перетворення, використовуємо синус-перетворення

$$P_s = \frac{2}{L} \int_0^L \rho(x, t) \sin \frac{\pi n x}{L} dx. \quad (9)$$

Помножимо (6) на  $\frac{2}{L} \sin \frac{\pi n x}{L} dx$  і проінтегруємо в межах  $(0; L)$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \\ & = \frac{2}{xL} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial t} \sin \frac{\pi n x}{L} dx + \frac{4aM_x}{FL} \int_0^L \delta(x - x_1) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \end{aligned} \quad (10)$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} & \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{2\pi n}{L^2} [(-1)^{n-1} P_s + P_H] \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 P_s; \\ & \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial P}{\partial t} \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{dP_s}{dt}; \\ & \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{\pi n x}{L} \delta(x - x_1) dx = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi n x_1}{L}. \end{aligned}$$

Тоді з (10) після нескладних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{dP_s}{dL} + \frac{C^2}{2a} \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 P_s = \\ & = \frac{\pi n C^2}{aL^2} [(-1)^{n-1} P_K + P_H] - \frac{2C^2 M_x}{FL} \sin \frac{\pi n x_1}{L}. \end{aligned} \quad (11)$$

Початкова умова інтегрування (11) матиме вигляд

$$\begin{aligned} & P_s|_{t=0} = \frac{2}{L} \int_0^L \left( P_H - \frac{P_H - P_K}{L} x \right) \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \\ & = \frac{2}{L} \left( P_H \int_0^L \sin \frac{\pi n x}{L} dx - \frac{P_H - P_K}{L} \int_0^L x \sin \frac{\pi n x}{L} dx \right). \\ & \int_0^L \sin \frac{\pi n x}{L} dx = -\frac{L}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{L} \Big|_L^0 = -\frac{L}{\pi n} [1 - (-1)^{(n-1)}]. \\ & \int_0^L x \sin \frac{\pi n x}{L} dx = -\frac{xL}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{L} \Big|_L^0 + \frac{L}{\pi n} \int_0^L \cos \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{L}{\pi n} (-1)^{n-1}. \quad (12) \\ & P_s|_{t=0} = \left( P_H \frac{L}{\pi n} [1 - (-1)^{(n-1)}] \right) - \frac{P_H - P_K}{L} \frac{L^2}{\pi n} (-1)^{(n-1)} = \\ & = \frac{2}{\pi n} [P_H [1 + (-1)^{(n-1)}] - (P_H - P_K) (-1)^{(n-1)}] = \frac{2}{\pi n} [P_H + P_K (-1)^{n-1}] = P_{s0}. \end{aligned}$$

Розв'язок (11) при умові (12) має вигляд

$$P_s = \frac{2}{\pi n} \left[ P_H + (-1)^{(n-1)} P_K \right] - \frac{4aM_x L}{F \pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x_1}{L} + \\ + C_n \exp \left( -\frac{C^2}{2a} \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 t \right), \quad (13)$$

$$\text{де } C_n = P_{s0} - \frac{2}{\pi n} \left[ P_H + (-1)^{(n-1)} P_K \right] + \frac{4aM_x L}{F \pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x_1}{L} = \frac{4aM_x L}{F \pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x_1}{L}.$$

Тиск як функція лінійної координати і часу знаходиться за формулою

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_s \sin \frac{\pi n x}{L}. \quad (14)$$

Після ряду перетворень одержимо

$$P(x, t) = P_H - \frac{P_H - P_K}{L} x - \sum_{n=1}^{\infty} \ln \exp \left( -\frac{C^2}{2a} \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 t \right) \sin \frac{\pi n x}{L} - \\ - \frac{2aM_x}{F} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x(L - x_1)}{L} \text{ при } x < x_1 \\ \frac{x_1(L - 1)}{L} \text{ при } x > x_1 \end{array} \right\}. \quad (15)$$

Масова витрата через довільний переріз трубопроводу визначиться з формули

$$M(x, t) = \frac{F}{2a} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{F}{2a} \left\{ \frac{P_H - P_K}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n C_n}{L} e^{-\frac{C^2}{2a} \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 t} \cos \frac{\pi n x}{L} \right\} + \\ + M_x \left\{ \begin{array}{l} \frac{L - x_1}{L} \text{ при } x < x_1 \\ -\frac{x}{L} \text{ при } x > x_1 \end{array} \right\}. \quad (16)$$

Для задачі про витрати газу при аваріях важливими перерізами є точки розміщення лінійних кранів №1 та №2 з координатами  $l_1$  та  $l_2$ . Масові витрати в цих перерізах

$$M(l_1, t) = \frac{F}{2aL} \left\{ (P_H - P_K) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n C_n e^{-\frac{C^2}{2a} \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 t} \cos \frac{\pi n l_1}{L} \right\} + \\ + M_x \left( 1 - \frac{(l_1 + x_1)}{L} \right). \quad (17)$$

$$M(l_2, t) = \frac{F}{2aL} \left\{ (P_H - P_K) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n C_n e^{-\frac{C^2 \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t}{2a}} \cos \frac{\pi n l_2}{L} \right\} - M_x \frac{l_2 - x_1}{L}. \quad (18)$$

Якщо від моменту аварії (розриву трубопроводу в точці  $x_1$ ) до закриття лінійних кранів  $N_1$  та  $N_2$  пройшов проміжок часу  $\tau$ , то кількість газу, яка поступила в аварійну ділянку через кран  $N_1$

$$m_1 = \int_0^{\tau} M(l_1, t) dt = \frac{F}{2aL} \left\{ \left[ (P_H - P_K) + \frac{2aL}{F} M_x \left( 1 - \frac{x_1}{L} \right) \right] \tau - \frac{\pi^3 a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 C_n \cos \frac{\pi n l_1}{L} \left( 1 - e^{-\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{L^2}} \right) \right\}. \quad (19)$$

Кількість газу, яка поступила в аварійну ділянку за час  $\tau$

$$m_2 = \int_0^{\tau} M(l_2, t) dt = \frac{F}{2aL} \left\{ \left[ (P_H - P_K) - \frac{2aL}{F} M_x \frac{x_1}{L} \right] \tau - \frac{\pi^3 a}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 C_n \cos \frac{\pi n l_2}{L} \left( 1 - e^{-\frac{\pi^2 n^2 a \tau}{L^2}} \right) \right\}. \quad (20)$$

Загальна кількість газу в масових одиницях, яка витрачена в результаті появи великого аварійного витоку, може бути знайдена як сума

$$m_z = m_0 + (m_1 - m_2), \quad (21)$$

де  $m_0$  – маса газу, що знаходилась в аварійній ділянці до появи витоку.

$$m_0 = \frac{\pi d^2}{4} L \rho_{cp} = \frac{\pi d^2}{4} L \frac{P_{cp}}{z R T_{cp}}, \quad (22)$$

де  $d$ ,  $L$  – діаметр і довжина аварійної ділянки;  $\rho_{cp}$  – середня густина газу;  $P_{cp}$ ,  $T_{cp}$ ,  $z$  – середній тиск і температура газу і коефіцієнт стисливості при цих умовах;  $R$  – газова стала.

Відносна величина втрат газу

$$k_w = \frac{m_z}{m_0} = 1 + \frac{m_1 - m_2}{m_0}. \quad (23)$$

### Вихідні дані та результати розрахунків

За (23) виконано розрахунки відносної величини витрат газу при аварійних розривах трубопроводу з врахуванням перетоків газу в аварійну ділянку за час закриття лінійних кранів, виконаних за залежностями (19) і (20). Вихідними даними для проведених розрахунків вважалися значення тисків  $P_H$  та  $P_K$  на початку і в кінці лінійної ділянки га-

зопроводу до аварії, часу витікання газу до кранів  $\tau$ , відносної координати аварійного витоку  $x/L$  та його відносної величини  $M_x/M_0$ . Числові значення перерахованих величин вибрано у відповідності до методики раціонального планування експерименту [17] за 5-ма рівняннями і приведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Вихідні дані

| №  | Незалежні параметри |                |                  |                   | Функція відгук |            |
|----|---------------------|----------------|------------------|-------------------|----------------|------------|
|    | Тиск $P$ , Мпа      | Час $\tau$ , с | Координати $x/L$ | Витрата $M_x/M_0$ |                |            |
| 1  | 7,5                 | 50             | 0,1              | 0,459             | 1,014671       | 0,8054359  |
| 2  | 7                   | 100            | 0,3              | 0,459             | 1,024031       | 0,9768241  |
| 3  | 6,5                 | 150            | 0,5              | 0,459             | 1,027291       | 0,80418234 |
| 4  | 6                   | 200            | 0,7              | 0,349             | 1,023533       | 0,79943929 |
| 5  | 5,5                 | 250            | 0,9              | 0,459             | 1,011696       | 0,78152868 |
| 6  | 7,5                 | 100            | 0,9              | 0,573             | 1,026291       | 0,78841089 |
| 7  | 7                   | 150            | 0,1              | 0,573             | 1,03736        | 0,81992129 |
| 8  | 6,5                 | 200            | 0,3              | 0,573             | 1,037867       | 0,80061248 |
| 9  | 6                   | 250            | 0,5              | 0,573             | 1,030889       | 0,7578048  |
| 10 | 5,5                 | 50             | 0,7              | 0,573             | 1,002551       | 0,77287616 |
| 11 | 7,5                 | 150            | 0,7              | 0,688             | 1,040207       | 0,78892356 |
| 12 | 7                   | 200            | 0,9              | 0,688             | 1,044109       | 0,78730932 |
| 13 | 6,5                 | 250            | 0,1              | 0,688             | 1,050069       | 0,80877028 |
| 14 | 6                   | 50             | 0,3              | 0,688             | 1,006659       | 0,80376513 |
| 15 | 5,5                 | 100            | 0,5              | 0,688             | 1,005915       | 0,0471787  |
| 16 | 7,5                 | 200            | 0,5              | 0,803             | 1,055283       | 0,7914869  |
| 17 | 7                   | 250            | 0,7              | 0,803             | 1,054359       | 0,77922875 |
| 18 | 6,5                 | 50             | 0,9              | 0,803             | 1,007633       | 0,78049891 |
| 19 | 6                   | 100            | 0,1              | 0,803             | 1,01465        | 0,81758766 |
| 20 | 5,5                 | 150            | 0,3              | 0,803             | 1,01068        | 0,80699662 |
| 21 | 7,5                 | 250            | 0,3              | 0,917             | 1,072007       | 0,79132112 |
| 22 | 7                   | 50             | 0,5              | 0,917             | 1,011394       | 0,77909678 |
| 23 | 6,5                 | 100            | 0,7              | 0,917             | 1,016183       | 0,78547998 |
| 24 | 6                   | 150            | 0,9              | 0,917             | 1,013371       | 0,78953877 |
| 25 | 5,5                 | 200            | 0,1              | 0,917             | 1,017429       | 0,8128996  |

За залежностями (17) та (18) побудовано графіки, які представлені на рисунках 2 та 3.

Як видно з графіків, масова витрата газу в перерізі кранів при появі аварійного витoku змінюється в часі, причому в початковий момент спостерігається її зростання, а в подальшому плавний спад зі стабілізацією. Характер кривих залежить від величини тиску в газопроводі, об'єму порожнини аварійної ділянки, координати розміщення аварійного витoku і величини його витрати. З фізичної точки зору миттєве зростання масової витрати пояснюється різким зменшенням гідравлічного опору газопроводу, викликаним появою відбору газу, що призведе до розширення газового потоку з певною втратою потенційної енергії і, як наслідок, плавного зменшення і стабілізації масової витрати.

В перерізі лінійного крану №2 спостерігається різке падіння масової втрати газу з подальшою плавною стабілізацією процесу, що в подальшому викликає зворотній потік.

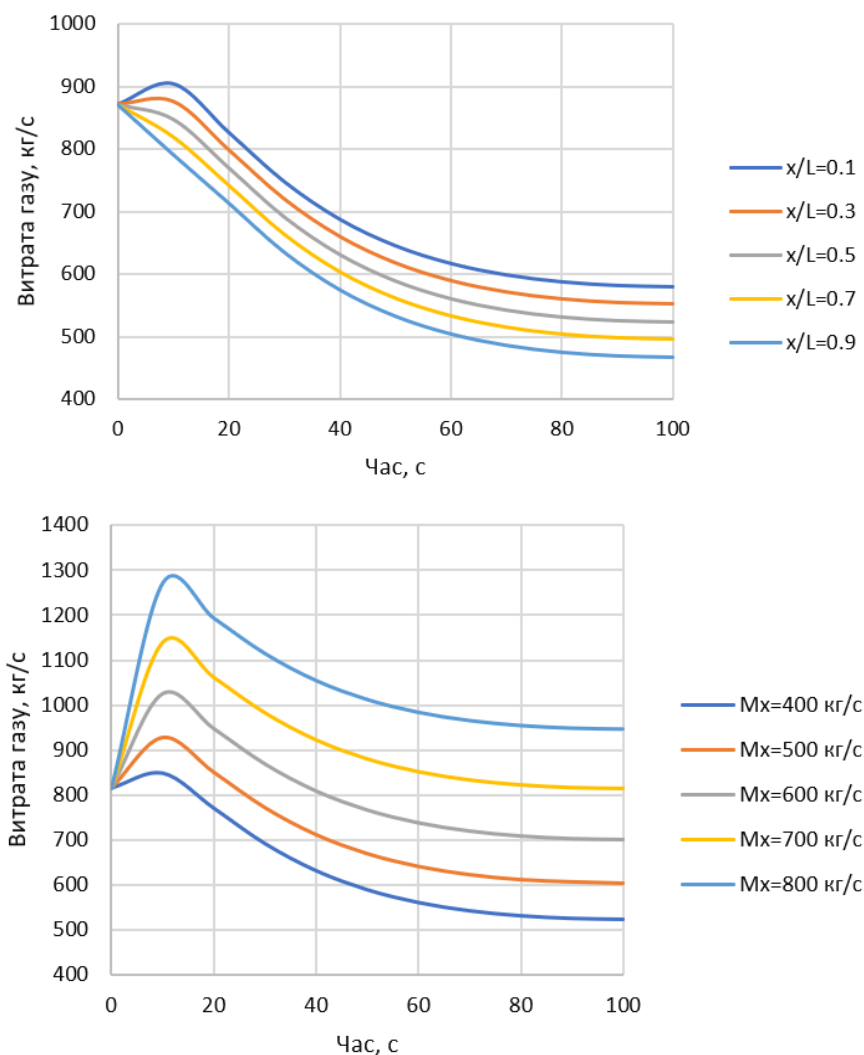


Рис. 2. Характер зміни витрати газу в часі на крані №1

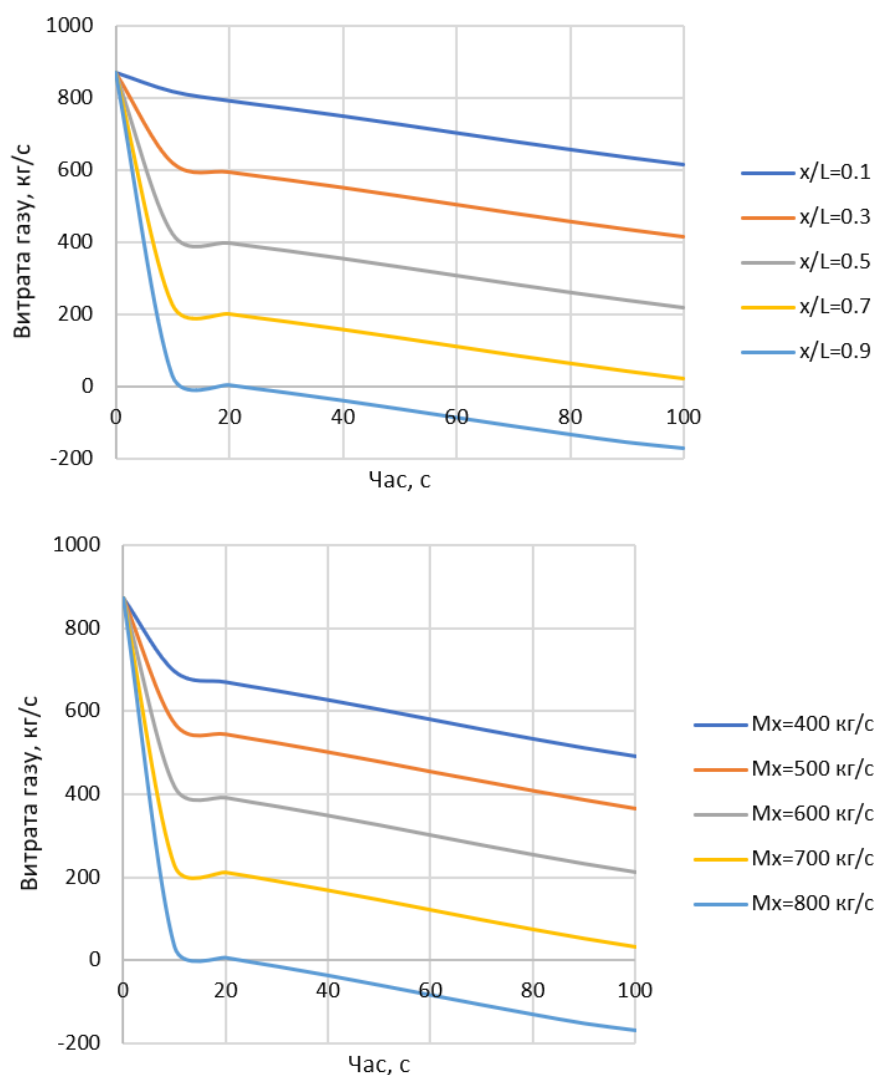


Рис. 3. Характер зміни витрати газу в часі на крані №2

### Висновки

У роботі розроблено математичну модель нестационарного процесу течії газу в газопроводі під час появи аварійного витoku, що дозволило вперше в аналітичній формі описати зміну тиску та масової витрати в перехідному режимі. Використання функцій Хевісайда та Дірака забезпечило коректне врахування миттєвості виникнення витoku та впливу цього фактора на розподіл параметрів у трубопроводі. Отримані диференціальні та інтегральні залежності дали змогу простежити динаміку поширення хвилі збурення вздовж газопроводу та оцінити реакцію системи на аварійний витік газу.

Запропонована модель дозволила визначити закономірності зміни тиску і масової витрати залежно від координати та часу, що є необхід-

ним для подальшої побудови ефективних методів локалізації витоків. На основі моделювання встановлено, що характер перехідного процесу суттєво залежить від величини витoku, гідравлічних параметрів газопроводу та режиму його роботи. Проведене раціональне планування експерименту дало змогу отримати узагальнені залежності та визначити вплив основних факторів на обсяг аварійних втрат.

Запропонована методика дозволяє оцінювати кількість газу, втраченого внаслідок аварії, з урахуванням перетоків між сусідніми ділянками та часової зміни параметрів потоку. Отримані результати можуть бути використані під час розроблення систем діагностики та прогнозування аварійних ситуацій у газотранспортних мережах, а також для вдосконалення алгоритмів визначення місця та величини витоків у режимі, близькому до реального часу.

### *Література*

1. B. Danylytsiv, O. Khymko. Analysis of methods for leak detection and monitoring the main gas pipeline sections. *Energy Engineering and Control Systems*, 2024, Vol. 10, No. 2, pp. 73-80. <https://doi.org/10.23939/jeecs2024.02.073>
2. F. Matiko, L. Lesovoy, V. Dzhigirei, (2016) "Improvement of mathematical models of natural gas flow during its outflow from a damaged gas pipeline". *Bulletin of the Engineering Academy of Ukraine* (1), pp. 224-230 .
3. Y. V. Doroshenko, (2020) "Modeling of gas leaks from gas pipelines in emergency situations", *Visnyk VPI*, Vol.3, с. 22-28.
4. Грудз В. Я., Тимків Д. Ф., Михалків В. Б., Костів В. В. Обслуговування і ремонт газопроводів: монографія. Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2009. 712 с.
5. Запuxляк В. Б., Грудз В. Я., Стасюк Р. Б. Обслуговування та ремонт газонафтопроводів: конспект лекцій. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2020. 149 с.
6. Ding Y., Xu P., Lu Y., Yang M., Zhang J., Liu K. Research on Pipeline Leakage Calculation and Correction Method Based on Numerical Calculation Method. *Energies*. 2023. Vol. 16, No. 21. Art. 7255. DOI: <https://doi.org/10.3390/en16217255>
7. Дрінь Н. Ю. Оцінка втрат газу при трубопровідному транспорті і формування ареалу загазованості довкілля: дис. ... канд. техн. наук: 05.15.13. Івано-Франківськ, 2020. 146 с.
8. Стасюк Р. Б. Удосконалення методів діагностування витоків з газових мереж: дис. ... канд. техн. наук: 05.15.13. Івано-Франківськ, 2015. 142 с.
9. Johansson F., Häger J., Goransson P. Pipeline leakage detection using distributed fibre optical temperature sensing. *Measurement*. 2012. Vol. 45,

- No. 6. P. 1682-1691. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224112000624>
10. Li H.-J., Xu F., Wang P., Hou B., Li S. Detecting pipeline leakage using active distributed temperature sensing (ADTS). *Sensors*. 2019. Vol. 19, No. 16. Art. 3533. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2023.105065>
11. Chang W., Gu X., Zhang X., Gou Z., Zhang X., Xiong Z. Numerical study of the soil temperature field affected by natural gas pipeline leakage. *Processes*. 2025. Vol. 13, No. 1. Art. 36. DOI: <https://doi.org/10.3390/pr13010036>
12. Трубопровідний транспорт газу / М. П. Ковалкота ін. Київ: Арена-ЕКО, 2002. 600 с.
13. Zhang H., Shen M., Huo Z., Zhang Y., Shu L., Li Y. Research on Gas Drainage Pipeline Leakage Detection and Localization Based on the Pressure Gradient Method. *Processes*. 2024. Vol. 12, No. 8. Art. 1590. DOI: <https://doi.org/10.3390/pr12081590>
14. Schipachev A., Fetisov V., Nazyrov A., Donghee L., Khamrakulov A. Study of the pipeline in emergency operation and assessing the magnitude of the gas leak. *Energies*. 2022. Vol. 15, No. 14. Art. 5294. DOI: <https://doi.org/10.3390/en15145294>
15. «Операційне числення» / Войцеховський О. А. – Вінницький державний технічний університет, 2000. – с. 148. У підручнику: «Одна одинична функція Хевісайда». URL: [https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Voytsehov\\_2000\\_148.pdf](https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Voytsehov_2000_148.pdf)
16. «Операційне числення» / В.Т. Швець (Навч. посібник) – містить розділ «дельта-функції Дірака». ISBN978-966-413-456-6. URL: [https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2025/Shvets\\_2015\\_138.pdf](https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2025/Shvets_2015_138.pdf)
17. Методика та організація наукових досліджень: Навч. посіб. / С. Е. Важинський, Т. І. Щербак. – Суми: СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. – 260 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 07.11.2025 р.*

*Прийнято до друку 11.11.2025 р.*

## MATHEMATICAL MODELING OF NON-STATIONARY GAS FLOW PROCESS IN A GAS PIPELINE CAUSED BY AN EMERGENCY GAS LEAK

**V. B. Zapukhliak** , **I. B. Prokopiv** 

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;*

*76019, Ivano-Frankivsk, 15 Karpatska Street;*

*tel. +38 (0342) 72-71-38; e-mail: [vasyl.zapukhliak@nungeu.ua](mailto:vasyl.zapukhliak@nungeu.ua)*

*The article addresses the pressing issue of estimating gas losses during pipeline transportation, the importance of which has increased during*

*the period of military action due to the risk of external destructive influences. The purpose of the study is to create a mathematical model of the non-stationary gas flow process in a gas pipeline caused by an emergency leak. A model based on the equations of motion and continuity was developed to describe the pressure and mass flow rate oscillations of the gas that occur during leak formation. The system of differential equations is reduced to a linearized equation, which includes the Dirac delta function for modeling concentrated gas withdrawal at the leak point. The solution to the equation is found using the integral sine transformation under initial (stationary linear pressure distribution) and boundary conditions (constant pressure at the beginning and end of the section). Based on the resulting dependencies for pressure and mass flow rate, a methodology for quantitative determination of total gas losses is formulated as the sum of the initial mass of gas in the emergency section and gas overflows from adjacent sections during the time until the linear valves are closed. Numerical calculations of the relative value of gas flow rates are performed, taking into account the overflows. Graphs show that the mass flow rate of gas at valve No. 1's cross-section instantly increases after a leak and then smoothly declines, while at valve No. 2's cross-section, a sharp drop is observed, followed by stabilization and a possible reverse flow. The modeling results ensure improved accuracy in estimating gas losses. The obtained results can be used to improve methods for diagnosing and predicting gas losses in gas transportation systems.*

**Keywords:** *gas pipeline, emergency leak, non-stationary process, mathematical modeling, mass flow rate, pressure, Heaviside function, Dirac delta function, integral transforms, gas losses.*