

УДК 517.98

MSC 2020: 46B45

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-19-27

СТРУКТУРА НЕПЕРЕРВНИХ СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ НА ПРОСТОРИ АБСОЛЮТНО СУМОВНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Т.В. Васишлин^{ORCID}, М.Р. Коцеловська^{ORCID}

Карпатський національний університет імені Василя Стефаника;

76018, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, Україна;

e-mail: taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua, mariia.kotselovska.22@pnu.edu.ua

Дану роботу присвячено дослідженню симетричних неперервних однорідних поліномів на банаховому просторі ℓ_1 над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ всіх абсолютно сумовних послідовностей елементів поля $\mathbb{K}$. Розглядається поняття симетрії в наступному сенсі. Кожна бієкція τ на множині $\mathbb{N}$ породжує деякий ізометричний ізоморфізм $J_\tau : \ell_1 \rightarrow \ell_1$, який переставляє елементи стандартного базису Шаудера відповідно до бієкції τ . В результаті, кожна підгрупа S групи всіх бієкцій на множині $\mathbb{N}$ породжує групу G_S відповідних ізометричних ізоморфізмів простору ℓ_1 . В даній роботі досліджується структура G_S -симетричних однорідних неперервних $\mathbb{K}$ -значних поліномів на просторі ℓ_1 .

Ключові слова: поліном, симетрична функція, банахів простір, абсолютно сумовна послідовність.

1. Вступ

В класичних роботах з теорії симетричних функцій на банахових просторах (див., напр., [3]) симетричну функцію на банаховому просторі із симетричним базисом Шаудера визначають як функцію, інваріантну відносно дії на її аргумент довільного ізометричного ізоморфізму, який здійснює перестановку базису Шаудера цього простору. В ширшому сенсі, функцію, задану на довільному банаховому просторі X , яка є інваріантною відносно дії на її аргумент елементів деякої фіксованої групи G ізометричних ізоморфізмів простору X , називають G -симетричною. В даній роботі розглядаються однорідні неперервні поліноми на банаховому просторі ℓ_1 над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ всіх абсолютно сумовних послідовностей елементів поля $\mathbb{K}$, які є симетричними відносно підгруп класичної групи всіх перестановок базису Шаудера цього простору. В роботі [1] описано структуру всіх лінійних неперервних функціоналів на просторі

ℓ_1 , які є симетричними у згаданому вище сенсі. Цей результат в даній роботі узагальнено на випадок довільного m -однорідного неперервного симетричного полінома на просторі ℓ_1 .

2. Попередні відомості

Нехай $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Нехай ℓ_1 – це банахів простір абсолютно сумовних послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n \dots)$ елементів множини $\mathbb{K}$ із нормою

$$\|x\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, де X – нормований простір, називається базисом Шаудера, якщо для кожного $x \in X$ існує єдина числова послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ збігається до елемента x .

Нехай

$$e_m = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, 1, 0, \dots), \quad (1)$$

де $m \in \mathbb{N}$. Множина $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ є базисом Шаудера для простору ℓ_1 .

Нехай X і Y – банахові простори із введеними на них нормами $\|\cdot\|_X$ та $\|\cdot\|_Y$ відповідно. Відображення $X^m \rightarrow Y$, де $m \in \mathbb{N}$, називається m -лінійним, якщо воно лінійне відносно кожного аргументу окремо, коли інші $m-1$ аргументи фіксовані. Норма m -лінійного відображення $A : X^m \rightarrow Y$ визначається формулою:

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|_X \leq 1, \dots, \|x_m\|_X \leq 1} \|A(x_1, \dots, x_m)\|_Y. \quad (2)$$

Норма є скінченною тоді і тільки тоді, коли відображення A є неперервним. m -Лінійне відображення $A : X^m \rightarrow Y$ називається симетричним, якщо

$$A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \dots, x_m) \quad (3)$$

для кожного бієктивного відображення $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ і для всіх $x_1, \dots, x_m \in X$.

Означення 2.1. Відображення $P : X \rightarrow Y$ називається m -однорідним поліномом для $m \in \mathbb{N}$, якщо існує m -лінійне відображення $A_P : X^m \rightarrow Y$ таке, що $P(x) = A_P(\underbrace{x, \dots, x}_m)$ для всіх $x \in X$.

За допомогою поляризаційної формули можна для m -однорідного полінома P відновити симетричне m -лінійне відображення асоційоване з поліномом P [2, теорема 1.10] при $k \in \{1, \dots, m\}$:

$$A_P(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{j_k \in \{-1, 1\}} j_1 \cdot \dots \cdot j_m P(j_1 x_1 + \dots + j_m x_m). \quad (4)$$

3. Основний результат

Нехай $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – довільна бієкція. Відображення $J_\tau : \ell_1 \rightarrow \ell_1$, задане формулою

$$J_\tau((x_1, x_2, \dots)) = (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots) \quad (5)$$

є ізометричним ізоморфізмом.

Нехай S_∞ – група всіх бієкцій на множині $\mathbb{N}$ відносно операції композиції. Нехай S – довільна підгрупа групи S_∞ . Побудуємо групу операторів G_S на просторі ℓ_1 так: $G_S = \{J_\tau : \tau \in S\}$. Відображення $f : \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ називають G_S -симетричним, якщо $f(J_\tau(x)) = f(x)$ для кожних $\tau \in S$ і $x \in \ell_1$.

Лема 3.1. Нехай $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – бієкція. Для кожного m -однорідного полінома $P : \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ такого, що

$$P(J_\tau(x)) = P(x) \quad (6)$$

для кожного $x \in \ell_1$, маємо

$$A_P(J_\tau(x_1), J_\tau(x_2), \dots, J_\tau(x_m)) = A_P(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

для всіх $x_1, x_2, \dots, x_m \in \ell_1$, де A_P – m -лінійне симетричне відображення асоційоване з поліномом P .

Доведення. З поляризаційної формули (4), лінійності оператора J_τ і з рівності (6) для всіх $x_1, x_2, \dots, x_m \in \ell_1$ маємо:

$$\begin{aligned} A_P(J_\tau(x_1), \dots, J_\tau(x_m)) &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{j_k \in \{-1, 1\}} j_1 \cdot \dots \cdot j_m P(j_1 J_\tau(x_1) + \dots + j_m J_\tau(x_m)) = \\ &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{j_k \in \{-1, 1\}} j_1 \cdot \dots \cdot j_m P(J_\tau(j_1 x_1 + \dots + j_m x_m)) = \\ &= \frac{1}{2^m m!} \sum_{j_k \in \{-1, 1\}} j_1 \cdot \dots \cdot j_m P(j_1 x_1 + \dots + j_m x_m) = \\ &= A_P(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

□

Теорема 1. Для кожного неперервного m -однорідного полінома $P: \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ і для кожного $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$ виконується рівність

$$P(x) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} x_{n_1} \cdots x_{n_m} A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m}), \quad (7)$$

де A_P – це m -лінійне симетричне відображення асоційоване з поліномом P , а ряд в правій частині рівності є абсолютно збіжним.

Доведення. Оскільки $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис Шаудера для простору ℓ_1 , то для кожного $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ збіжний до елемента x .

Доведемо абсолютну збіжність ряду у правій частині рівності (7). Із неперервності полінома P і поляризаційної формули (4) випливає неперервність відображення A_P . Тому $\|A_P\|$ є скінченною величиною. Оскільки $\|e_{n_i}\|_{\ell_1} = 1$, то

$$|A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m})| \leq \sup_{\|x_{n_1}\|_{\ell_1} \leq 1, \dots, \|x_{n_m}\|_{\ell_1} \leq 1} |A_P(x_{n_1}, \dots, x_{n_m})|.$$

Тому, враховуючи рівність (2), отримаємо

$$|A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m})| \leq \|A_P\|.$$

Звідси

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} |x_{n_1} \cdots x_{n_m} A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m})| \leq \\ & \leq \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} |x_{n_1}| \cdots |x_{n_m}| \cdot \|A_P\| = \|A_P\| \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} |x_{n_1}| \cdots |x_{n_m}| = \\ & = \|A_P\| \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} |x_{n_1}| \right) \cdots \left(\sum_{n_m=1}^{\infty} |x_{n_m}| \right) = \|A_P\| \cdot \|x\|_{\ell_1}^m. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд у правій частині рівності (7) абсолютно збіжний.

Із неперервності відображення A_P по кожному аргументу отримаємо

$$\begin{aligned} P(x) &= A_P(x, \dots, x) = A_P\left(\sum_{n_1=1}^{\infty} x_{n_1} e_{n_1}, \dots, \sum_{n_m=1}^{\infty} x_{n_m} e_{n_m}\right) = \\ &= A_P\left(\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \sum_{n_1=1}^{N_1} x_{n_1} e_{n_1}, \dots, \lim_{N_m \rightarrow \infty} \sum_{n_m=1}^{N_m} x_{n_m} e_{n_m}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{N_m \rightarrow \infty} A_P \left(\sum_{n_1=1}^{N_1} x_{n_1} e_{n_1}, \dots, \sum_{n_m=1}^{N_m} x_{n_m} e_{n_m} \right) = \\
&= \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{N_m \rightarrow \infty} \sum_{n_1=1}^{N_1} \dots \sum_{n_m=1}^{N_m} A_P(x_{n_1} e_{n_1}, \dots, x_{n_m} e_{n_m}) = \\
&= \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=1}^{\infty} A_P(x_{n_1} e_{n_1}, \dots, x_{n_m} e_{n_m}) = \\
&= \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=1}^{\infty} x_{n_1} \cdot \dots \cdot x_{n_m} A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m}).
\end{aligned}$$

Таким чином, рівність (7) правильна. $\square$

Теорема 2. Нехай $m \in \mathbb{N}$. Нехай S – довільна підгрупа групи S_{∞} . Введемо на множині $\mathbb{N}^m$ відношення “ $\sim$ ” наступним чином. Нехай $(j_1, j_2, \dots, j_m) \sim (k_1, k_2, \dots, k_m)$ для $(j_1, j_2, \dots, j_m), (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$, якщо існують $\tau \in S$ та бієктивне відображення $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ такі, що

$$(J_{\tau}(e_{j_{\sigma(1)}}), J_{\tau}(e_{j_{\sigma(2)}}), \dots, J_{\tau}(e_{j_{\sigma(m)}})) = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m}), \quad (8)$$

де e_n визначено формулою (1) і J_{τ} визначено формулою (5). Тоді відношення “ $\sim$ ” є відношенням еквівалентності на множині $\mathbb{N}^m$.

Доведення. Доведемо рефлексивність даного відношення. Нехай $\tau \in S$ та $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ є тотожними відображеннями. Тоді

$$(J_{\tau}(e_{j_{\sigma(1)}}), J_{\tau}(e_{j_{\sigma(2)}}), \dots, J_{\tau}(e_{j_{\sigma(m)}})) = (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}),$$

тому з формули (8) випливає, що $(j_1, j_2, \dots, j_m) \sim (j_1, j_2, \dots, j_m)$. Отже, відношення є рефлексивним. Доведемо його симетричність. Нехай

$$(j_1, j_2, \dots, j_m) \sim (k_1, k_2, \dots, k_m).$$

Тоді існують $\tau \in S$ та бієктивне відображення $\sigma : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ такі, що

$$(J_{\tau}(e_{j_{\sigma(1)}}), J_{\tau}(e_{j_{\sigma(2)}}), \dots, J_{\tau}(e_{j_{\sigma(m)}})) = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m}).$$

Оскільки S – група, то $\tau^{-1} \in S$. Тоді, із попередньої рівності,

$$(J_{\tau^{-1}}(J_{\tau}(e_{j_{\sigma(1)}})), J_{\tau^{-1}}(J_{\tau}(e_{j_{\sigma(2)}})), \dots, J_{\tau^{-1}}(J_{\tau}(e_{j_{\sigma(m)}})))$$

$$= (J_{\tau^{-1}}(e_{k_1}), J_{\tau^{-1}}(e_{k_2}), \dots, J_{\tau^{-1}}(e_{k_m})).$$

Оскільки τ^{-1} – обернене відображення до τ , то $J_{\tau^{-1}} \circ J_{\tau} = J_{1_{\mathbb{N}}}$, де $1_{\mathbb{N}}$ – тотожне відображення на множині $\mathbb{N}$. Тому

$$(e_{j_{\sigma(1)}}, e_{j_{\sigma(2)}}, \dots, e_{j_{\sigma(m)}}) = (J_{\tau^{-1}}(e_{k_1}), J_{\tau^{-1}}(e_{k_2}), \dots, J_{\tau^{-1}}(e_{k_m})).$$

Із цієї рівності випливає, що

$$e_{j_{\sigma(t)}} = J_{\tau^{-1}}(e_{k_t})$$

для кожного $t \in \{1, \dots, m\}$. Оскільки σ – бієктивне відображення, то існує обернене відображення σ^{-1} . Нехай $u \in \{1, \dots, m\}$. Підставимо $t = \sigma^{-1}(u)$ в попередню рівність. Отримаємо

$$e_{j_{\sigma(\sigma^{-1}(u))}} = J_{\tau^{-1}}(e_{k_{\sigma^{-1}(u)}}),$$

тобто $e_{j_u} = J_{\tau^{-1}}(e_{k_{\sigma^{-1}(u)}})$. Звідси

$$(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}) = (J_{\tau^{-1}}(e_{k_{\sigma^{-1}(1)}}), J_{\tau^{-1}}(e_{k_{\sigma^{-1}(2)}}), \dots, J_{\tau^{-1}}(e_{k_{\sigma^{-1}(m)}})),$$

тому $(k_1, k_2, \dots, k_m) \sim (j_1, j_2, \dots, j_m)$. Отже, відношення є симетричним.

Доведемо транзитивність даного відношення. Нехай

$$(j_1, j_2, \dots, j_m) \sim (k_1, k_2, \dots, k_m) \text{ і } (k_1, k_2, \dots, k_m) \sim (s_1, s_2, \dots, s_m).$$

Тоді існують $\tau_1, \tau_2 \in S$ та бієктивні відображення $\sigma_1, \sigma_2 : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ такі, що

$$(J_{\tau_1}(e_{j_{\sigma_1(1)}}), J_{\tau_1}(e_{j_{\sigma_1(2)}}), \dots, J_{\tau_1}(e_{j_{\sigma_1(m)}})) = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m}) \quad (9)$$

і

$$(J_{\tau_2}(e_{k_{\sigma_2(1)}}), J_{\tau_2}(e_{k_{\sigma_2(2)}}), \dots, J_{\tau_2}(e_{k_{\sigma_2(m)}})) = (e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_m}). \quad (10)$$

Із рівності (9) випливає, що

$$J_{\tau_1}(e_{j_{\sigma_1(t)}}) = e_{k_t} \quad \text{для кожного } t \in \{1, \dots, m\}. \quad (11)$$

Із рівності (10) випливає, що

$$J_{\tau_2}(e_{j_{\sigma_2(u)}}) = e_{s_u} \quad \text{для кожного } u \in \{1, \dots, m\}. \quad (12)$$

Нехай $u \in \{1, \dots, m\}$. Підставивши $t = \sigma_2(u)$ в рівність (11), отримаємо

$$J_{\tau_1}(e_{j_{\sigma_1(\sigma_2(u))}}) = e_{k_{\sigma_2(u)}}. \quad (13)$$

Подіавши на рівність (13) відображенням J_{τ_2} , отримаємо

$$J_{\tau_2}(J_{\tau_1}(e_{j_{\sigma_1(\sigma_2(u))}})) = J_{\tau_2}(e_{k_{\sigma_2(u)}}).$$

Тоді, враховуючи рівність (12), отримаємо

$$J_{\tau_2}(J_{\tau_1}(e_{j_{\sigma_1(\sigma_2(u))}})) = e_{s_u},$$

таким чином, $(k_1, k_2, \dots, k_m) \sim (s_1, s_2, \dots, s_m)$. Отже, відношення є транзитивним. $\square$

Лема 3.2. Нехай $m \in \mathbb{N}$. Нехай S – довільна підгрупа групи S_∞ . Нехай $(j_1, j_2, \dots, j_m) \sim (k_1, k_2, \dots, k_m)$ для $(j_1, j_2, \dots, j_m), (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$, де відношення “ $\sim$ ” введено так, як у формулюванні теореми 2. Нехай $P: \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ – m -однорідний неперервний G_S -симетричний поліном. Тоді

$$A_P(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}) = A_P(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m}),$$

де A_P – це m -лінійне симетричне відображення асоційоване з поліномом P .

Доведення. Оскільки $(j_1, j_2, \dots, j_m) \sim (k_1, k_2, \dots, k_m)$, то існують $\tau \in S$ та бієктивне відображення $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ такі, що

$$(J_\tau(e_{j_{\sigma(1)}}), J_\tau(e_{j_{\sigma(2)}}), \dots, J_\tau(e_{j_{\sigma(m)}})) = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m}).$$

Тому, згідно із лемою 3.1,

$$A_P(e_{j_{\sigma(1)}}, e_{j_{\sigma(2)}}, \dots, e_{j_{\sigma(m)}}) = A_P(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m}).$$

Звідси, оскільки відображення A_P є симетричним і відображення σ є бієкцією, то, зважаючи на рівність (3), отримуємо потрібну рівність. $\square$

Теорема 3. Нехай S – підгрупа групи S_∞ . Для кожного m -однорідного неперервного G_S -симетричного полінома $P: \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ виконується рівність

$$P(x) = \sum_{M \in \mathbb{N}^m / \sim} \gamma_M \sum_{(n_1, \dots, n_m) \in M} x_{n_1} \cdot \dots \cdot x_{n_m}, \quad (14)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$, відношення “ $\sim$ ” визначено в теоремі 2 і $\gamma_M = A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m})$ для $(n_1, \dots, n_m) \in M$, де A_P – це m -лінійне симетричне відображення асоційоване з поліномом P . При цьому, γ_M не залежить від вибору $(n_1, \dots, n_m) \in M$.

Доведення. Згідно із теоремою 1, можемо записати $P(x)$ згідно з формулою (7). Оскільки ряд у правій частині рівності (7) є абсолютно збіжним, то можемо переставити члени цього ряду наступним чином:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=1}^{\infty} x_{n_1} \cdots x_{n_m} A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m}) &= \\ &= \sum_{M \in \mathbb{N}^m / \sim} \sum_{(n_1, \dots, n_m) \in M} x_{n_1} \cdots x_{n_m} A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m}). \end{aligned}$$

Оскільки, згідно із лемою 3.2, величина $A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m})$ не залежить від вибору $(n_1, \dots, n_m) \in M$, то можемо $A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m})$ позначити через γ_M і винести за знак другої суми. Отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{M \in \mathbb{N}^m / \sim} \sum_{(n_1, \dots, n_m) \in M} x_{n_1} \cdots x_{n_m} A_P(e_{n_1}, \dots, e_{n_m}) &= \\ &= \sum_{M \in \mathbb{N}^m / \sim} \gamma_M \sum_{(n_1, \dots, n_m) \in M} x_{n_1} \cdots x_{n_m}. \end{aligned}$$

Рівність (14) доведено. □

Подяка. Дана робота виконана за підтримки Міністерства освіти і науки України, реєстраційний номер гранту 0125U000403.

References

1. Nykorovych S.I., Vasylyshyn T.V. *Symmetric linear functionals on the Banach space generated by pseudometrics*, Mat. Stud., **62** (2024), no. 1, 81–92. doi:10.30970/ms.62.1.81-92
2. Mujica J. *Complex Analysis in Banach Spaces*. North Holland, 1986.
3. Nemirovskii A.S., Semenov S.M. *On polynomial approximation of functions on Hilbert space*, Mat. USSR Sbornik, **21** (1973), no. 2, 255–277. doi:10.1070/SM1973v021n02ABEH002016

Стаття надійшла до редакційної колегії 6.11.2025 р.

Прийнято до друку 23.11.2025 р.

STRUCTURE OF CONTINUOUS SYMMETRIC POLYNOMIALS ON THE SPACE OF ABSOLUTELY SUMMABLE SEQUENCES

T.V. Vasylyshyn , **M.R. Kotselovska** 
Vasyl Stefanyk Carpathian National University;

76018, 57 Shevchenko street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;

e-mail: taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua, mariia.kotselovska.22@pnu.edu.ua

The work is devoted to the study of symmetric continuous homogeneous polynomials on the Banach space ℓ_1 over the field $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ of all absolutely summable sequences of elements from $\mathbb{K}$. We consider the notion of symmetry in the following sense. Every bijection τ on $\mathbb{N}$ generates some isometrical isomorphism $J_\tau : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ that rearranges elements of the standard Schauder basis according to τ . As a result, every subgroup S of the group of all bijections on $\mathbb{N}$ generates the group G_S of corresponding isometrical isomorphisms on ℓ_1 . The structure of G_S -symmetric homogeneous continuous $\mathbb{K}$ -valued polynomials on ℓ_1 is investigated in the present work.

Key words: *polynomial, symmetric function, Banach space, absolutely summable sequence.*