

УДК 517.53

MSC 2020: 30D35

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-59-65

СТРУКТУРА ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ ДЛЯ ПРИЄДНАНИХ ЦІЛИХ КРИВИХ З ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Я. І. Савчук^{id}, О. К. Фурсенко^{id}, Н. М. Черновол^{id}

Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана
Кожедуба; 61023, м. Харків, вул. Сумська, 77/79; тел. +38(050) 6102842,
e-mail: hnupskafedravn@ukr.net

Описується структура множини виняткових векторів в розумінні Неванлінни для приєднаних цілих кривих скінченного порядку з лінійно залежними компонентами. Показано, що навіть для цілої кривої з лінійно незалежними компонентами відповідна їй приєднана ціла крива може бути з лінійно залежними компонентами. Відомо, що множину усіх неванліннових виняткових векторів для цілої кривої скінченного порядку з ω -лінійно залежними компонентами в об'єднанні з підпростором $A_0 = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \vec{G}(z) \cdot \vec{a} \equiv 0\}$ можна подати у вигляді не більше ніж зліченного об'єднання підпросторів A_j , причому $\omega \leq \dim A_j \leq p - 1$ і $A_j \supset A_0$. Встановлено, що відповідна приєднана ціла крива $\vec{G}_l: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^q$, де $q = C_p^l$, є з $\omega^* \geq C_p^l - C_{p-\omega}^l$ лінійно залежними компонентами і для цієї приєднаної цілої кривої множина її неванліннових виняткових векторів в об'єднанні з підпростором $A_0^* = \{\vec{b} \in \mathbb{C}^q : \vec{G}(z) \cdot \vec{b} \equiv 0\}$ утворює не більше ніж зліченне об'єднання підпросторів A_j^* розмірності не вище $q-1$, причому $A_j^* \supset A_0^*$ і для кожного A_j^* існує так званий спеціальний вектор $\vec{b}_j \in \mathbb{C}^q$, ортогональний до A_j^* .

Ключові слова: ціла крива, ціла крива з лінійно залежними компонентами, спеціальний вектор, приєднана ціла крива, неванлінновий винятковий вектор.

В даній роботі використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1]-[4].

В [1] описано структуру множини неванліннових дефектних векторів для цілих кривих з лінійно залежними компонентами, а в роботі [2] показано, що це описання є повним.

В пропонуваній статті займемось описанням множини дефектних векторів в розумінні Неванлінни для приєднаних цілих кривих з лінійно залежними компонентами.

Вектор $\vec{b} \in \mathbb{C}^q$, де $q = C_p^l$, називається *спеціальним* (див. [3]), якщо існує l векторів $\vec{b}_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jp}) \in \mathbb{C}^p, j = 1, 2, \dots, l$, таких, що

$\vec{b} = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l]$; символ [...] тут і надалі скрізь у статті означає вектор $\vec{b}$ з q координатами, що залежать від векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ та обчислюються за такою формулою:

$$\begin{vmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_l} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{lj_1} & b_{lj_2} & \dots & b_{lj_l} \end{vmatrix}$$

де $j_1, j_2, \dots, j_l$ пробігають усі можливі значення, що задовольняють нерівність $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq p$. Таких наборів значень якраз буде рівно C_p^l . Цей спеціальний вектор визначається з точністю до переставлянь компонент.

Нехай $\vec{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$ – ціла крива.

Відповідно до [4], під *приєднаною* цілою кривою порядку l , де $l \leq p - 1$, розуміємо q – вимірну цілу криву

$$\vec{G}_l(z) = [\vec{G}(z), \vec{G}'(z), \dots, \vec{G}^{(l-1)}(z)],$$

де $\vec{G}^{(s)}(z) = (g_1^{(s)}(z), g_2^{(s)}(z), \dots, g_p^{(s)}(z))$. Зрозуміло, що про приєднану цілу криву для $\vec{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$ можемо говорити при $p \geq 3$. Також не розглядатимемо випадок $l = 1$, оскільки, очевидно, $\vec{G}_1(z) = \vec{G}(z)$.

Для цілої кривої $\vec{G}(z)$ з лінійно незалежними компонентами структуру неванліннових дефектних векторів відповідної приєднаної цілої кривої $\vec{G}_l(z)$ описано в роботах [3] та [5]. Відзначимо, що в роботі [6] вивчалась множина борелевих виняткових векторів для цілих кривих з лінійно залежними компонентами.

Ціла крива $\vec{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$ називається цілою кривою з ω -лінійно залежними компонентами (див. [1]), якщо розмірність лінійного підпростору $A_0 = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \vec{G}(z) \cdot \vec{a} \equiv 0\}$ дорівнює ω , $0 \leq \omega \leq p - 2$. Очевидно, що при $\omega = 0$ матимемо звичайну цілу криву з лінійно незалежними компонентами. Нагадаємо, що *характеристика росту* $T(r, \vec{G})$ та *функція наближення* $m(r, \vec{a}, \vec{G})$ при $\vec{a} \notin A_0$ визначаються рівностями

$$T(r, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|\vec{G}(re^{i\varphi})\| d\varphi,$$

$$m(r, \vec{a}, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\varphi})\| \cdot \|\vec{a}\|}{|\vec{G}(re^{i\varphi}) \cdot \vec{a}|} d\varphi.$$

Для векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ їхній скалярний добуток задається так: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2, \dots, a_p \bar{b}_p$. Відповідно $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Розглянемо

$$\delta(\vec{a}, \vec{G}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}.$$

Якщо $\delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0$, то $\vec{a}$ називається неванлінновим винятковим вектором. При цьому $\delta(\vec{a}, \vec{G})$ називається величиною дефекта.

Позначимо через $D(\vec{G}) = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p \setminus A_0 : \delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ множину неванліннових виняткових векторів цілої кривої $\vec{G}$.

Варто відзначити, що для цілої кривої $\vec{G}(z)$ з лінійно незалежними компонентами відповідна приєднана ціла крива $\vec{G}_l(z)$ не обов'язково буде з лінійно незалежними компонентами. Це можемо підтвердити такими прикладами.

1) Розглянемо чотиримірну цілу криву $\vec{G}(z) = (1, z, z^2, z^3)$. Очевидно, її компоненти є лінійно незалежними функціями. Оскільки $\vec{G}'(z) = (0, 1, 2z, 3z^2)$, то компонентами відповідної приєднаної цілої кривої $\vec{G}_2(z)$ будуть такі функції:

$$g_{21} = \begin{vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad g_{22} = \begin{vmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & 2z \end{vmatrix} = 2z, \quad g_{23} = \begin{vmatrix} 1 & z^3 \\ 0 & 3z^2 \end{vmatrix} = 3z^2, \\ g_{24} = \begin{vmatrix} z & z^2 \\ 1 & 2z \end{vmatrix} = z^2, \quad g_{25} = \begin{vmatrix} z & z^3 \\ 1 & 3z^2 \end{vmatrix} = 2z^3, \quad g_{26} = \begin{vmatrix} z^2 & z^3 \\ 2z & 3z^2 \end{vmatrix} = z^4.$$

Бачимо, що $g_{23} = 3g_{24}$. Тому отримана приєднана ціла крива $\vec{G}_2(z) = (1, 2z, 3z^2, z^2, 2z^3, z^4)$ є з лінійно залежними компонентами при $\omega = 1$.

2) Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо для цілої кривої $\vec{G}(z) = (1, z, z^2, z^4)$ відповідну приєднану цілу криву $\vec{G}_2(z) = (1, 2z, 4z^3, z^2, 3z^4, 2z^5)$, яка, очевидно, є з лінійно незалежними компонентами.

Зауваження. Можна переконатись, що для усіх $p \geq 3$ та $l \leq p - 1$ для цілої кривої $\vec{G}(z) = (1, z, z^2, z^4, \dots, z^{2p-2})$ відповідна приєднана ціла крива $\vec{G}_l(z)$ є з лінійно залежними компонентами.

Повернемось тепер до випадку, коли ціла крива $\vec{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$ є з ω -лінійно залежними компонентами. В [1] показано, що множина $D(\vec{G}) = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p \setminus A_0 : \delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ неванліннових дефектних векторів такої кривої скінченного порядку в об'єднанні з A_0 є не більше ніж зліченим об'єднанням підпросторів $A_j \in \mathbb{C}^p$ розмірності $\leq p - 1$. Відзначимо, що обов'язково $A_0 \subset A_j$ для всіх j . Базисних компонент (тобто таких, що вони є лінійно незалежними і кожна компонента розглядуваної цілої є їхньою лінійною комбінацією) буде рівно $p - \omega$. Тому, враховуючи те, що навіть для цілої кривої з лінійно незалежними компонентами відповідна приєднана ціла крива може бути з лінійно залежними компонентами, для цілої кривої з ω -лінійно залежними компонентами відповідна приєднана ціла крива

$\vec{G}_l(z)$ матиме не більше ніж $C_{p-\omega}^l$ базисних компонент, отже, буде з $\omega^* \geq C_p^l - C_{p-\omega}^l$ лінійно залежними компонентами. Зрозуміло, що розглядаємо приєднані цілі криві $\vec{G}_l(z)$ при $l < p - \omega$, бо інакше отримуємо, що кожна компонента приєднаної цілої кривої є добутком якоїсь фіксованої компоненти на відповідне число при $l = p - \omega$, або, взагалі, усі компоненти є тотожними нулями при $l > p - \omega$. Позначимо

$$A_0^* = \{\vec{b} \in \mathbb{C}^q : \vec{G}(z) \cdot \vec{b} \equiv 0\}$$

Відомо [4], що нерівність

$$T(r, \vec{G}_l) \leq \{l + o(1)\}T(r, \vec{G}), r \rightarrow \infty$$

виконується поза множиною скінченної довжини, причому для цілих кривих скінченного порядку ця нерівність виконується всюди.

Виходячи з [1], можемо стверджувати, що $D(\vec{G}_l) \cup A_0^*$ являє собою не більше ніж зліченне об'єднання підпросторів із $\mathbb{C}^q$ розмірності не вище $q - 1$ у випадку $\rho(\vec{G}) < \infty$. Однак, із того, що не кожна ціла крива з $\mathbb{C}^q$ є приєднаною для деякої p – мірної цілої кривої, випливає, як ми нижче побачимо, що не для кожного не більше ніж зліченного об'єднання підпросторів із $\mathbb{C}^q$ розмірності не вище $q - 1$ знайдеться p – мірна ціла крива $\vec{G}$, така що $D(\vec{G}_l) \cup A_0^*$ співпадає з цим об'єднанням.

Ми покажемо, що результати, отримані в [3] та [5], можна перенести з деякими змінами на випадок цілої кривої з лінійно залежними компонентами.

Лема. Нехай $\vec{G}$ – p –мірна ціла крива з ω –лінійно залежними компонентами, $A \subset \mathbb{C}^q$, де $q = C_p^l$, $1 \leq l \leq p - 1$ – підпростір з $\dim A \leq q - 1$; B – ортогональне доповнення до A . Припустимо, що для довільного $\vec{a} \in A \setminus A_0^*$ виконується $\delta(\vec{a}, \vec{G}_l) > 0$. Тоді існує хоча б один спеціальний вектор $\vec{b} \in B \setminus \{0\}$.

Слід відзначити, що не для кожного підпростору B існує спеціальний вектор $\vec{b} \in B \setminus \{0\}$. Як випливає з означення спеціального вектора, він являє собою представлення p – вимірних векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$, тобто визначається pl комплексними числами. Тому неважко вказати підпростір розмірності $C_p^l - lp - 1$ (зрозуміло, при таких p та l , при яких $C_p^l - lp - 1 > 0$), який не містить спеціальних векторів, відмінних від нульового.

Д о в е д е н н я . Очевидно, що для довільних векторів $\vec{a}^* \in A_0^*$, $\vec{a} \in \mathbb{C}^q \setminus A_0^*$ та числа $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ виконується рівність

$$\delta(\vec{a}^* + \alpha \vec{a}, \vec{G}) = \delta(\vec{a}, \vec{G}),$$

тому природним є вважати $A_0^* \subset B$.

Зауважимо, що якщо вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_q)$ – спеціальний, то спеціальним буде і вектор $\vec{b}^* = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_q)$. Для зручності ми доведемо існування такого вектора $\vec{b} \in B \setminus \{\vec{0}\}$, що вектор $\vec{b}^*$ – спеціальний.

Нехай $\dim A = s$. Виберемо лінійно незалежні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$ із $A \setminus A_0^*$ і розглянемо вектор-функцію $\vec{G}^*(z) = (\vec{G}_1(z) \cdot \vec{a}_1, \vec{G}_2(z) \cdot \vec{a}_2, \dots, \vec{G}_s(z) \cdot \vec{a}_s)$. Розглянемо Φz – мероморфну функцію без нулів, полюсами якої є спільні нулі функцій $\vec{G}_1(z) \cdot \vec{a}_1, \vec{G}_2(z) \cdot \vec{a}_2, \dots, \vec{G}_s(z) \cdot \vec{a}_s$. Тоді $\vec{G}_1^*(z) = \vec{G}^*(z) \cdot \Phi(z)$ – s -мірна ціла крива.

Покажемо, що існує $\delta > 0$, таке що

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|\vec{G}^*(re^{i\varphi})\| d\varphi = T(r, \vec{G}_1^*) + N(r, \Phi) \leq \{1 - \delta + o(1)\} T(r, \vec{G}), r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Дійсно, ми можемо вибрати вектор $\vec{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_s) \in \mathbb{C}^s$, такий що

$$m(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1^*) = o\{T(r, \vec{G}_1^*)\}, r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

З іншого боку, $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_s \vec{a}_s \in A$, тому $\delta(\vec{a}, \vec{G}_l) = \delta > 0$. Тоді

$$m(r, \vec{a}, \vec{G}_l) \geq \{\delta + o(1)\} T(r, \vec{G}_l), r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Очевидно, $\vec{G}_l(z) \cdot \vec{a} = \vec{G}_1^*(z) \cdot \vec{\lambda} / \Phi(z)$, звідки $N(r, \vec{a}, \vec{G}_l) = N(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1^*) + N(r, \Phi)$, і, відповідно до першої основної теореми для цілих кривих, маємо

$$T(r, \vec{G}_l) - m(r, \vec{a}, \vec{G}_l) = T(r, \vec{G}_1^*) - m(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1^*) + N(r, \Phi) + O(1), r \rightarrow \infty.$$

Підставляючи в цю рівність (2) та (3), отримаємо (1).

З (1) випливає, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|\vec{G}^*(re^{i\varphi})\|}{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi})\|} d\varphi \leq \{-\delta + o(1)\} T(r, \vec{G}_l), r \rightarrow \infty.$$

Так як $T(r, \vec{G}_l) \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$, то існує функція $\varphi = \varphi(r)$, така що

$$\frac{\|\vec{G}(re^{i\varphi(r)})\|}{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi(r)})\|} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Оскільки для довільного вектора $\vec{a} \in A$ існує вектор $\vec{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_s) \in \mathbb{C}^s$, такий що $|\vec{G}_l(z) \cdot \vec{a}| = |\vec{G}_1^*(z) \cdot \vec{\lambda}| \leq \|\vec{G}_1^*(z)\| \cdot \|\vec{\lambda}\|$, то з (4) випливає, що

$$\frac{\|\vec{G}(re^{i\varphi(r)}) \cdot \vec{a}\|}{\|\vec{G}_l(re^{i\varphi(r)})\| \cdot \|\vec{a}\|} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

рівномірно по $\vec{a} \in A$.

Тепер подамо

$$\vec{G}_l(re^{i\varphi(r)}) = (\vec{a}(r) + \vec{b}(r)) \|\vec{G}_l(re^{i\varphi(r)})\|, \quad (6)$$

де $\vec{a}(r) \in A, \vec{b}(r) \in B$.

Оскільки $\|\vec{b}(r)\| \leq 1$, то існує послідовність $(r_n)_{n=1}^\infty, r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, така що $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}(r_n) = \vec{b}$. Позначимо коротко $\vec{b}(r_n) = \vec{b}_n$. Очевидно, $\vec{b} \in B$.

Так як $\vec{a}(r) \perp \vec{b}(r)$, то, згідно (5) та (6) робимо висновок, що $\vec{a}(r) \rightarrow 0, \|\vec{b}(r)\| \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$.

Тепер маємо:

$$\begin{aligned} |\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot \vec{b}| &\geq |\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot \vec{b}_n| - |\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot (\vec{b} - \vec{b}_n)| \geq \\ &\geq |(\vec{a}(r_n) + \vec{b}_n) \cdot \vec{b}_n| \cdot \|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)})\| - \\ &- \|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)})\| \cdot \|\vec{b} - \vec{b}_n\| = (\|\vec{b}_n\|^2 - \|\vec{b} - \vec{b}_n\|) \cdot \|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)})\|, \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\frac{|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot \vec{b}|}{\|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)})\| \cdot \|\vec{b}\|} \geq \|\vec{b}_n\|^2 - \|\vec{b} - \vec{b}_n\| \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Тоді, відповідно до тотожності $\sum |\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i|^2 + |\sum \alpha_i \beta_i|^2 = \sum |\alpha_i|^2 \cdot \sum |\beta_j|^2$, отримуємо:

$$\begin{aligned} [|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot \vec{b}^*|]^2 &= \sum_{m < k} |g_{lm}(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot \vec{b}_k - g_{lk}(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot \vec{b}_m| \times \\ &\times \left\{ \sum_{m=1}^q |g_{lm}(r_n e^{i\varphi(r_n)})|^2 \cdot \sum_{m=1}^q |\vec{b}_k|^2 \right\}^{-1} \leq 1 - \frac{|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)}) \cdot \vec{b}|}{\|\vec{G}_l(r_n e^{i\varphi(r_n)})\| \cdot \|\vec{b}\|} \rightarrow 0, \\ &n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Звідси робимо висновок, що $\vec{b}^*$ – спеціальний вектор. В протилежному випадку (див. [4, п.1]) було б $[\vec{x} \cdot \vec{b}^*] \geq \delta_l(\vec{b}^*) > 0$ для усіх спеціальних векторів $\vec{x}$, зокрема, для $\vec{x} = \vec{G}_l(z)$. Тим самим наша лема доведена.

З доведеної леми і відповідної теореми в [3] безпосередньо випливає такий результат.

Теорема. Нехай $\vec{G}$ - ціла p -вимірна крива скінченного порядку з ω -лінійно залежними компонентами. Тоді $(1 < l < p - \omega)$:

1) $D(\vec{G}_l) \cup A_0^* = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} A_j^*$, де A_j^* – підпростори з $\mathbb{C}^q$, де $q = C_p^l$, причому $\omega^* \leq \dim A_j^* = q_j \leq q - 1$;

2) для кожного j існує спеціальний вектор $\vec{b}_j \in \mathbb{C}^q$, ортогональний до A_j^* .

Нам не вдалося з'ясувати, чи підпростори A_j^* повинні задовольняти ще яким-небудь умовам.

Література

1. Савчук Я.І. Структура множини неванліннівських дефектних векторів для цілих кривих з лінійно залежними компонентами // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2013, №1(21). – с. 20-25.
2. Савчук Я.І. Ціла крива з лінійно залежними компонентами та наперед заданою множиною дефектних векторів // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2014, № 1(25). – с. 26-32.
3. Савчук Я.І. Структура дефектних векторів для приєднаних цілих кривих. – Прик. Вісник НТШ, Число. – 2010. – №1(9). – с. 46-50.

4. Weyl H., Weyl J. Meromorphic curves. – Annals of math., 1938, Vol. 39, №3, p. 516-538. doi: 10.2307/1968632.
5. Савчук Я.І. Побудова приєднаної цілої кривої з наперед заданою множиною дефектних векторів. – Прик. Вісник НТШ, Число. – 2011 р., 1(13), с. 43-49.
6. Савчук Я.І., Фурсенко О. К., Черновол Н. М. Борелеві виняткові вектори для цілих кривих з лінійно залежними компонентами. – Прик. Вісник НТШ, Число. – 2024 р., 19(73), с. 24-32. doi: 10.31471/2304-7399-2024-19(73)-24-32

Стаття надійшла до редакційної колегії 02.11.2025 р.

Прийнято до друку 8.11.2025 р.

STRUCTURE OF DEFECTIVE VECTORS FOR ASSOCIATED ENTIRE CURVES WITH LINEARLY DEPENDENT COMPONENTS

Ya. I. Savchuk^{id}, O.K.Fursenko^{id}, N. M.Chernovol^{id}

Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University;

61023, Kharkiv, Sumska str., 77/79; ph. +38 (050) 6102842;

e-mail: hnupskafedravn@ukr.net

We study the structure of the set of exceptional vectors in the sense of Nevanlinna for associated entire curves of finite order with linearly dependent components. It is shown that even if an entire curve has linearly independent components, its associated entire curve may nevertheless have linearly dependent components. It is known that the set of all Nevanlinna exceptional vectors of a finite-order entire curve with linearly dependent components, together with a given subspace $A_0 = \{\vec{a} \in \mathbb{C}^p : \vec{G}(z) \cdot \vec{a} \equiv 0\}$, can be expressed as at most a countable union of subspaces A_j , satisfying $\omega \setminus \text{ledim } A_j \leq p - 1$ and $A_j \supset A_0$. Furthermore, it is established that the corresponding associated entire curve $\vec{G}_l: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^q$, where $q = C_p^l$, also has $\omega^ \geq C_p^l - C_{p-\omega}^l$ linearly dependent components. For this associated entire curve, the set of its Nevanlinna exceptional vectors, together with the subspace $A_0^* = \{\vec{b} \in \mathbb{C}^q : \vec{G}(z) \cdot \vec{b} \equiv 0\}$, constitutes at most a countable union of subspaces A_j^* of dimension not exceeding $\text{mathrm}\{q - 1\}$, where $A_j^* \supset A_0^*$. In addition, for each A_j^* , there exists a so-called special vector $\vec{b}_j \in \mathbb{C}^q$, orthogonal to A_j^* .*

Keywords: *entire curve; entire curve with linearly dependent components; special vector; associated entire curve; Nevanlinna exceptional vector.*