

Алгебра і геометрія

УДК 512.64

MSC 2020: 11C99, 15A23

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-78-91

СКІНЧЕННІ ТА НЕСКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ДІЛЬНИКИ У ПОБУДОВІ ФАКТОРИЗАЦІЙ СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМНИХ МАТРИЦЬ

М. І. Кучма¹, А. І. Гаталевич²

¹Національний університет “Львівська політехніка”;
79013, вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, Україна;
e-mail: mariia.i.kuchma@lpnu.ua;

²Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, вул. Університетська, 1, м. Львів, Україна;
e-mail: andriy.gatalevych@lnu.edu.ua

У багатьох прикладних задачах факторизацію симетричних поліномних матриць з дійсними і комплексними коефіцієнтами застосовують для побудови синтезованого локально оптимального керування, побудови інтегрованих систем класичної механіки, зокрема, для розв’язування задачі Ейлера-Арнольда про рух багатовимірного твердого тіла, більярдів у просторах сталої кривини.

Для ∇ -симетричних матриць над кільцем поліномів з інволюцією отримано умови існування факторизації $A(x) = B(x)C(x)B(x)^\nabla$ із сингулярним множником $B(x)$ із заданою канонічною формою Сміта і системою нескінченних елементарних дільників.

Встановлено відповідність між у факторизаціями ∇ -симетричних сингулярних поліномних матриць та ∇ -симетричних регулярних поліномних матриць, яка здійснена з використанням понять зворотного та j -зворотного матричного поліномів та системи нескінченних елементарних дільників. Ця відповідність базується на властивостях перетворень зворотного та j -зворотного матричних поліномів і понятті нескінченних елементарних дільників факторизованої матриці.

Одержано необхідні і достатні умови існування факторизації оборотної над кільцем поліномів ∇ -симетричної матриці $A(x)$ степеня t , в якій множник $B(x)$ оборотна поліномна матриця степеня $\deg B(x) = \deg A(x)/2$. У таких факторизаціях виконується умова

рівності суми степенів факторизованих множників степеню факторизованої матриці. Якщо ця умова рівності степенів не виконується, то існування факторизації ∇ -симетричної оборотної матриці пов'язано з існуванням недопустимої факторизації j -звотної поліномної матриці.

Ключові слова: регулярна поліноміальна матриця, факторизація ∇ -симетричної поліномної матриці, канонічна форма Сміта, зворотний та j -звотний матричний поліном, скінченні і нескінченні елементарні дільники.

Вступ

Нехай $M_n(C[x])$ – кільце поліноміальних $n \times n$ матриць над полем комплексних чисел C і $GL_n(C[x])$ – повна лінійна група цього кільця.

Розглянемо неособливу поліноміальну матрицю (матричний поліном) $A(x)$ степеня $m \geq 1$ вигляду

$$A(x) = \sum_{i=0}^m A_i x^{m-i}, \quad A_i \in M_n(C), \quad \det A(x) \neq 0. \quad (1)$$

Матрицю $A(x)$ називають регулярною, якщо $\det A_0 \neq 0$ і унітальною, якщо старший матричний коефіцієнт $A_0 = E$ – одинична матриця. У працях [1-4] була розроблена теорія виділення з матричного полінома $A(x)$ регулярного множника, тобто зображення $A(x)$ у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x), \quad (2)$$

де $B(x) = \sum_{i=0}^r B_i x^{r-i}$, причому $\det B_0 \neq 0$. У роботі [5] було запропоновано метод факторизації (2) із сингулярним множником $B(x)$ ($\det B_0 = 0$), а в [6] – із сингулярним множником $B(x)$ спеціального вигляду.

Нехай $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^{m-i}$ – деякий скалярний поліном, зокрема $A(x)$ вигляду (1). Позначимо через $\text{rev } f(x)$ зворотний поліном до $f(x)$:

$$\text{rev } f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

(походить від назви англ. reversal). Якщо $\deg f(x) = m$, то, очевидно, що $\text{rev } f(x) = x^m f(1/x)$.

Означення. Корені скалярного полінома $\det A(x)$ називають власними значеннями матриці $A(x)$.

Відомо, що поліномні матриці можуть мати нескінченні власні значення [8], які пов'язані з відповідним поняттям нескінченних елементарних дільників. З метою визначення цього поняття розглянемо концепцію зворотного матричного полінома $\text{rev } A(x)$ до полінома $A(x)$, визначеного за аналогією до скалярного полінома.

Якщо $\det A_0 = 0$ у матричному поліномі $A(x)$, то кажуть, що $A(x)$ має нескінченне власне значення кратності, що дорівнює кратності власного значення $\lambda = 0$ полінома $\text{rev } A(x)$.

Гохбергом, Каашуком та Ланкастером в [8] введено поняття “розширеного степеня” матричного полінома, який дозволяє деяким старшим матричним коефіцієнтам полінома дорівнювати нулю, а в роботі [7] введено поняття узагальненого зворотного полінома відносно деякого степеня вищого за степені m поліномної матриці $A(x)$. Ці введені у розгляд поняття визначають перетворення j -зворотного полінома, який дає можливість одержувати деякі додаткові нескінченні елементарні дільники поліномної матриці.

Означення. j -зворотним матричним поліномом до матриці $A(x)$ степеня $m \geq 1$ вигляду (1) називають матричний поліном $\text{rev}_j A$, заданий рівністю

$$\text{rev } A(x) = x^j A(1/x), \quad j \geq m. \quad (3)$$

Зокрема, якщо $j = m$, то j -зворотний матричний поліном збігається із зворотним, визначеним вище.

Наприклад, нехай задано $A(x) = A_2 x^2 + A_1 x$, де $A_1, A_2 \neq 0$ – нульова матриця. Оскільки $\deg A(x) = 2$, то зворотний поліном до $A(x)$:

$$\text{rev} A(x) = \text{rev}_2 A(x) = A_2 + A_1 x$$

є матричним поліномом степеня 1. Звернемо увагу, що зворотний поліном ставить коефіцієнти $A(x)$ у зворотному порядку без збільшення степеня полінома. Це означає, що

$$(\text{rev}(\text{rev } A(x))) = (\text{rev}_1(A_1 x + A_2)) = A_2 x + A_1 \neq A(x).$$

З іншого боку, двічі взявши 2-зворотний поліном до полінома $A(x)$, отримуємо

$$(\text{rev}_2(\text{rev}_2 A(x))) = \text{rev}_2(A_1 x + A_2) = A_2 x^2 + A_1 x = A(x).$$

Бачимо, що спочатку 2-зворотний поліном понижує степені $A(x)$ до одиниці, а потім повторне застосування 2-зворотного до $\text{rev}_2 A$ повертає поліном до $A(x)$, ілюструючи інволютивну властивість, яка виконується загалом.

Якщо розглянути 4-зворотний матричний поліном до $A(x)$: $\text{rev}_4 A(x) = A_2 x^2 + A_1 x^3 \neq A(x)$, то одержимо поліном степеня 3. Як бачимо, перетворення зворотності поліномної матриці можна розглядати як різновид “зміщеної зворотності” коефіцієнтів полінома і його степені може збільшуватися, зменшуватися або залишатися незмінним.

Формування мети дослідження

Нехай в кільці поліномів $C[x] = \{f(x) = \sum_{i=0}^p a_i x^i, a_i \in C\}$ введена інволюція ∇ одним із таких можливих способів [9]:

$$(\alpha) \quad \left(\sum_{i=0}^p a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i (-x)^i,$$

$$(\beta) \quad \left(\sum_{i=0}^p a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^p a_i (-x)^i,$$

$$(\gamma) \quad \left(\sum_{i=0}^p a_i x^i\right)^{\nabla} = \sum_{i=0}^p a_i x^i.$$

На кільце матриць $M_n(C[x])$ інволюцію ∇ перенесено так: $A(x)^{\nabla} = \|a_{ij}(x)\|^{\nabla} = \|a_{ji}(x)^{\nabla}\|$.

Матрицю $A(x)$ називатимемо ∇ – симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$.

У пропонованій роботі досліджуємо факторизації ∇ -симетричної матриці $A(x)$ з кільця $M_n(C[x])$ вигляду

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}, \quad (4)$$

де $B(x)$ – сингулярний множник, $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – деяка неособлива матриця, які у випадку $C(x) = C$ охоплюють факторизації із робіт [9].

Метою даної роботи є отримання умов факторизацій ∇ -симетричних поліномних матриць із сингулярним множником із наперед заданою формою Сміта і системою нескінченних елементарних дільників над кільцем з інволюцією.

Інструментом одержання факторизацій ∇ -симетричних регулярних матриць є перетворення зворотного матричного полінома, яке дозволяє перенести результати про один клас факторизованих матричних поліномів на інший клас факторизованих матриць.

Основним результатом цього дослідження є встановлена відповідність між у факторизаціями ∇ -симетричних регулярних поліномних матриць та ∇ -симетричних оборотних поліномних матриць, яка здійснена з використанням понять зворотного та j -зворотного матричного поліномів, їх властивостей та системи нескінченних елементарних дільників.

Виклад нових результатів дослідження

Нехай $S_A(x)$ – канонічна форма Сміта поліноміальної матриці $A(x) \in M_n(C[x])$:

$$S_A(x) = U(x)A(x)V(x) = \text{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_n(x)), \quad (5)$$

де матриці $U(x), V(x) \in GL_n(C[x])$, $\text{rang } A(x) = n$ і $|\varepsilon_1(x)| \dots |\varepsilon_n(x)|$ – інваріантні множники (або інваріантні поліноми).

Якщо кожний з інваріантних поліномів $\varepsilon_i(x)$ зобразити у вигляді добутку незвідних множників

$$\varepsilon_i(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_{i1}} (x - \lambda_2)^{\alpha_{i2}} \dots (x - \lambda_t)^{\alpha_{it}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

де $0 \leq \alpha_{1k} \leq \alpha_{2k} \leq \dots \leq \alpha_{nk}$, $k = \overline{1, t}$, $\lambda_k \neq \lambda_l$ для $k \neq l$, тоді множники $(x - \lambda_j)^{\alpha_{ij}}$ з $\alpha_{ij} > 0$ називають скінченними елементарними дільниками $A(x)$. Нескінченними елементарними дільниками (н.е.д.) $A(x)$ називають скінченні елементарні дільники вигляду x^{k_s} ($k_s > 0$) зворотного полінома $\text{rev } A(x)$.

Позначимо через $\mu(A)$ – суму степенів усіх інваріантних поліномів форми Сміта (5), тобто

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \deg [\varepsilon_i(x)],$$

і через $\nu(A)$ – суму степенів усіх нескінченних елементарних дільників $A(x)$. Надалі, числа $\mu(A)$ і $\nu(A)$ назвемо відповідно скінченним і нескінченним степенем матриці $A(x)$.

Зазначимо, що існує ряд інших еквівалентних способів визначення числа $\mu(A)$, а саме, як суми степенів усіх скінченних

елементарних дільників $A(x)$ або як суми алгебричних кратностей усіх скінченних власних значень $A(x)$. Якщо $A(x)$ – регулярний матричний поліном, то скінченний степінь $A(x)$ дорівнює $\mu(A) = \deg(\det A(x))$ і нескінченний степінь $A(x)$ – кратності нульового кореня у поліномі $\det(\operatorname{rev} A)$.

Твердження 1. Нехай $A(x)$ – регулярний $n \times n$ матричний поліном, $j \geq \deg A(x)$. Тоді $\mu(A) + \nu(A) = jn$.

Доведення. Нехай у формі Сміта скінченний степінь $\mu(A)$ дорівнює $\alpha = \deg(\det A(x))$, а звідси $\alpha \leq jn$. З іншого боку, на підставі означення нескінченних елементарних дільників і факту, що $\operatorname{rev}_j A(x)$ також є регулярним матричним поліномом, одержуємо, що його нескінченний степінь $\nu(A)$ дорівнює кратності множника x у поліномі $\det(\operatorname{rev}_j A(x))$. Справді, нехай

$$\det A(x) = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha-1} + \dots + a_{\alpha-1} x + a_\alpha, \quad (a_0 \neq 0).$$

За означенням j -зворотного полінома знаходимо

$$\begin{aligned} \det(\operatorname{rev}_j A(x)) &= \det[x^j A(1/x)] = x^{jn} \det A(1/x) = \\ &= x^{jn} (a_0 x^{-\alpha} + a_1 x^{-(\alpha-1)} + \dots + a_{\alpha-1} x^{-1} + a_\alpha) = \\ &= x^{jn-\alpha} (a_0 + a_1 x + \dots + a_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + a_\alpha x^\alpha). \end{aligned} \quad (7)$$

Оскільки $a_0 \neq 0$, то $\nu(A) = jn - \alpha$. Звідси $\mu(A) + \nu(A) = \alpha + (jn - \alpha) = jn$.

Твердження доведено.

Наслідок 1. $\det(\operatorname{rev}_j A(x)) = x^{\nu(A)} \operatorname{rev}_j(\det A(x))$.

Доведення випливає з рівності (7).

Твердження 2 ([5]). Для відповідних підматриць k -го порядку $A_k(x)$ і $\operatorname{rev} A_k(x)$ матриць $A(x)$ і $\operatorname{rev} A(x)$ справджується рівність

$$\det(\operatorname{rev} A_k(x)) = x^{S_k} \operatorname{rev}(\det A_k(x)), \quad 0 \leq S_k \leq mn.$$

Твердження 3. Нехай інваріантні поліноми $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, ..., $\varepsilon_n(x)$ у формі Сміта $S_A(x)$ поліномної матриці $A(x)$ мають вигляд (6), де корені λ_k , $k = \overline{1, t}$ відмінні від нуля. Тоді інваріантні поліноми $\tilde{\varepsilon}_1(x)$, $\tilde{\varepsilon}_2(x)$, ..., $\tilde{\varepsilon}_n(x)$ матричного полінома $\operatorname{rev} A(x)$ зворотного до матриці $A(x)$ дорівнюють

$$\tilde{\varepsilon}_i(x) = x^{k_i} \left(x - \frac{1}{\lambda_1}\right)^{\alpha_{i1}} \left(x - \frac{1}{\lambda_2}\right)^{\alpha_{i2}} \dots \left(x - \frac{1}{\lambda_t}\right)^{\alpha_{it}}, \quad (8)$$

де $0 \leq \alpha_{1k} \leq \alpha_{2k} \leq \dots \leq \alpha_{nk}$, $k = \overline{1, t}$, $\lambda_k \neq \lambda_l$ для $k \neq l$, $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$, $i = \overline{1, n}$.

Доведення. Відомо [1], що інваріантні поліноми $\varepsilon_i(x)$ визначаються через найбільші спільні дільники мінорів матриці $A(x)$, тому враховуючи твердження 1-2 і наслідок 1, одержуємо результат (8).

Твердження доведено.

Враховуючи твердження 3, отримуємо теорему про зв'язок форм Сміта матриць $A(x)$ і $\operatorname{rev} A(x)$.

Твердження 4. Якщо форма Сміта поліномної матриці $A(x)$ має вигляд (5) $S_A(x) = U(x)A(x)V(x) = \text{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_n(x))$, де $\varepsilon_i(0) \neq 0, i = 1, n$, то формою Сміта матриці $\text{rev}A(x)$ зворотної до $A(x)$ є матриця

$$S_{\text{rev}A}(x) = P(x)\text{rev}A(x)Q(x) = \text{diag}(x^{k_1}\text{rev}\varepsilon_1(x), x^{k_2}\text{rev}\varepsilon_2(x), \dots, x^{k_n}\text{rev}\varepsilon_n(x)), \quad (9)$$

де $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n, k_1, k_2, \dots, k_n$ – кратності н.е.д. матриці $A(x)$.

Зауважимо, що в формі Сміта $S_{\text{rev}A}(x)$ (9) кожний $\text{rev}\varepsilon_i(x)$ зворотний до $\varepsilon_i(x)$ береться відносно $\deg \varepsilon_i(x)$.

Сформулюємо властивості зворотного матричного полінома.

Твердження 5. Нехай $A(x)$ – ненульовий матричний поліном і $j \geq \deg A(x)$. Тоді:

1) $\deg(\text{rev}A(x)) \leq \deg A(x)$ і $\deg(\text{rev}_j A(x)) \leq j$, причому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $A(0) \neq 0$;

2) $(\text{rev}(\text{rev} A(x))) = A(x) \Leftrightarrow A(0) \neq 0$;

3) $\text{rev}_j(\text{rev}_j A(x)) = A(x)$;

4) $\text{rev}_j A(x) = x^{j-m}(\text{rev}A(x))$, де $m = \deg A(x)$.

Доведення. Дані властивості випливають з рівності (3) означення j -зворотного матричного полінома.

Ще один результат, який буде потрібен, це мультиплікативна властивість зворотних скалярних поліномів.

Твердження 6. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – скалярні поліноми, причому $j \geq \deg f(x), l \geq \deg g(x)$. Тоді $\text{rev}_{(j+l)}(f(x)g(x)) = \text{rev}_j f(x) \cdot \text{rev}_l g(x)$.

Доведення випливає безпосередньо з означення зворотного полінома, тому його опускаємо.

Наслідок 2. Якщо $j = \deg f(x), l = \deg g(x)$, то $\text{rev}(f(x)g(x)) = \text{rev}f(x) \cdot \text{rev}g(x)$.

Зазначимо, що для матричних поліномів аналог твердження 6 вимагає додаткових умов, оскільки добуток двох ненульових матриць може бути нульовою матрицею.

Твердження 7 ([5]). Якщо для матричного полінома $A(x)$ з (1) має місце розклад (2), де $B(x)$ – деякий сингулярний матричний поліном, то $\text{rev}A(x) = \text{rev}B(x)\text{rev}C(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\deg A(x) = \deg B(x) + \deg C(x).$$

Надалі цю умову назовемо умовою рівності суми степенів факторизованих множників степеню факторизованої матриці.

У роботі [6] досліджувалось питання про виділення сингулярних дільників із неособливого сингулярного матричного полінома. Відомо, що необхідною і достатньою умовою для того, щоб $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ – сингулярний матричний поліном степеня r з формою Сміта $\Phi(x) = \text{diag}(\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$ і системою н.е.д. $x^{l_1}, x^{l_2}, \dots, x^{l_n}$,

$0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_n$, $\sum_{i=1}^n l_i = rn - \sum_{i=1}^n \deg \phi_i(x)$, причому
 $\deg A(x) = \deg B(x) + \deg C(x)$, є умова

$$\det M_{V(\tilde{\Phi})P(x)||_{E,Ex,\dots,Ex^{r-1}}}(\tilde{\Phi}) \neq 0, \quad (10)$$

де $\tilde{\Phi}(x) = \text{diag}(x^{l_1}\tilde{\phi}_1(x), \dots, x^{l_n}\tilde{\phi}_n(x))$, $P(x)$ – довільна оборотна матриця із співвідношення (9), $V(\tilde{\Phi})$ – ядро визначальної матриці $W(\tilde{\Phi})$, введеної в [10]:

$$V(\tilde{\Phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\varphi_2 k_{21}}{(\varphi_2, \tilde{\varepsilon}_1)} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varphi_n k_{n1}}{(\varphi_n, \tilde{\varepsilon}_1)} & \frac{\varphi_n k_{n2}}{(\varphi_n, \tilde{\varepsilon}_2)} & \dots & \frac{\varphi_n k_{nn-1}}{(\varphi_n, \tilde{\varepsilon}_{n-1})} & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

у якій $\varphi_i(x) = x^{l_i}\tilde{\phi}_i(x)$, $(\varphi_i, \tilde{\varepsilon}_j)$ – найбільший спільний дільник поліномів $\varphi_i(x)$ і $\tilde{\varepsilon}_j(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \geq j$,

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (\varphi_i, \tilde{\varepsilon}_j) = \varphi_j, \\ k_{ij_{h_{ij}}} x^{h_{ij}} + \dots + k_{ij_1} x + k_{ij_0}, & \text{якщо } (\varphi_i, \tilde{\varepsilon}_j) \neq \varphi_j, \end{cases}$$

$h_{ij} = \deg \frac{(\varphi_i, \tilde{\varepsilon}_j)}{\varphi_j} - 1$, $i = \overline{2, n}$, $j = \overline{1, n-1}$, $i > j$, k_{ij_s} – попарно різні змінні величини, які приєднуються до поля C , $s = 0, 1, \dots$, h_{ij} .

Умова (10) є необхідною умовою факторизації (4), але не достатньою. Наступний результат встановлює необхідні і достатні умови існування факторизації неособливої поліномної матриці із сингулярним множителем із наперед заданою формою Сміта і системою н.е.д.

Теорема 1. Нехай $\Phi(x) = \text{diag}(\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$ – d -матриця [1], яка є дільником форми Сміта $S_A(x)$ матричного полінома $A(x)$. Для ∇ -симетричної сингулярної матриці $A(x)$ існує факторизація (4), в якій $B(x)$ – сингулярний матричний поліном степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$ і системою н.е.д. $x^{l_1}, x^{l_2}, \dots, x^{l_n}$, $0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_n$, $\sum_{i=1}^n l_i = rn - \sum_{i=1}^n \deg \phi_i(x)$, а $C(x) = C(x)^\nabla$ – деяка неособлива матриця, причому $\deg A(x) = 2 \deg B(x) + \deg C(x)$, тоді і тільки тоді, коли ∇ -симетрична матриця

$$V(\tilde{\Phi})P(x)(\text{rev}A(x))P(x)^\nabla V(\tilde{\Phi})^\nabla \quad (12)$$

ділиться одночасно зліва на $\tilde{\Phi}(x)$ і справа на $\tilde{\Phi}(x)^\nabla$ при деяких допустимих значеннях параметрів матриці $V(\tilde{\Phi})$, для яких виконується умова (10), де $\tilde{\Phi}(x) = \text{diag}(x^{l_1}\tilde{\phi}_1(x), \dots, x^{l_n}\tilde{\phi}_n(x))$, $P(x)$ – довільна оборотна матриця із співвідношення (9), $V(\tilde{\Phi})$ – ядро визначальної матриці $W(\tilde{\Phi})$ із (11).

Доведення. Необхідність. Нехай для сингулярної матриці $A(x)$ існує факторизація (4), причому $\deg A(x) = 2 \deg B(x) + \deg C(x)$.

Розглянемо зворотний поліном $\text{rev} A(x)$ до $A(x)$. Тоді з рівності (4), за умови рівності степенів факторизованих множників, одержимо

факторизацію регулярної симетричної матриці $\text{rev } A(x)$, у якій множник $\text{rev } B(x)$ зворотний до $B(x)$ є регулярною матрицею степеня r з формою Сміта $\tilde{\Phi}(x)$. Тому згідно з наведеним вище результатом про виділення сингулярного множника і теоремою 1 роботи [11] виконуються умови (10) і (12).

Достатність. При виконанні умов (10) і (12) існує факторизація ∇ -симетричної матриці $\text{rev } A(x)$ зворотної до $A(x)$, у якій множник $\text{rev } B(x)$ є регулярним степеня r з формою Сміта $\tilde{\Phi}(x)$. Тоді, розглянувши зворотний до $\text{rev } A(x)$ матричний поліном, отримуємо факторизацію (4) матриці $A(x)$ із сингулярним множником $B(x)$, зворотним до $\text{rev } B(x)$, де $\deg B(x) = r$, $S_B(x) = \Phi(x)$ і системою н.е.д. $x^{l_1}, x^{l_2}, \dots, x^{l_n}$.

Теорему доведено.

Припустимо, що форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A(x) = \Phi(x)I(x)\Phi(x)^{\nabla}, \quad (13)$$

де $\Phi(x)$, $I(x)$ – d -матриці.

Зазначимо, що розклад ∇ -симетричної матриці $A(x)$, в якому $B(x)$ – регулярний або сингулярний матричний поліном із формою Сміта $\Phi(x)$, а матриця $C(x)$ має форму Сміта $I(x)$, називають допустимою факторизацією матриці $A(x)$, паралельною факторизації (13) її форми Сміта $S_A(x)$. Інакше кажучи, факторизація (4) допустима тоді, якщо форма Сміта матричного полінома $A(x)$ дорівнює добутку форм Сміта його співмножників. Якщо у факторизації (4) матриці $A(x)$ відсутня паралельна факторизація її форми Сміта (13), то таку факторизацію матриці називають недопустимою.

Теорема 2. Для ∇ -симетричної сингулярної матриці $A(x)$ існує допустима факторизація (4), в якій $B(x)$ – сингулярний матричний поліном степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$ і системою н.е.д. $x^{l_1}, x^{l_2}, \dots, x^{l_n}$, $0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_n$, $\sum_{i=1}^n l_i = rn - \sum_{i=1}^n \deg \phi_i(x)$, а $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – деяка неособлива матриця з формою Сміта $I(x)$, причому $\deg A(x) = 2 \deg B(x) + \deg C(x)$, тоді і тільки тоді, коли

$$\det M_{P(x) \parallel_{E, Ex, \dots, Ex^{r-1}}}(\tilde{\Phi}) \neq 0,$$

де $\tilde{\Phi}(x) = \text{diag}(x^{l_1}\tilde{\phi}_1(x), \dots, x^{l_n}\tilde{\phi}_n(x))$, $P(x)$ – довільна оборотна матриця із рівності (9). Для кожного фіксованого розкладу (13) така допустима факторизація (4) єдина.

Доведення. Випливає з теореми 1 та теореми 1 роботи [11].

Наслідок 3. Факторизація (4) ∇ -симетричного сингулярного полінома $A(x)$ з умовою $\deg A(x) = 2 \deg B(x) + \deg C(x)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує факторизація матриці $\text{rev } A(x)$ зворотної до $A(x)$:

$$\text{rev } A(x) = \text{rev } B(x)C_1(x)(\text{rev } B(x))^{\nabla}, \quad (14)$$

де $C_1(x) = \pm \text{rev } C(x)$.

Опишемо вигляд ∇ -симетричної матриці $C(x)$ у формулі факторизації (4) за кожної з можливих інволюцій у кільці $C[x]$, введених у роботі [9].

Твердження 8. Нехай має місце факторизація (14) матричного полінома $\text{rev } A(x)$ зворотного до $A(x)$. Тоді матриця $C(x)$ у факторизації (4) має вигляд:

$C(x) = -\text{rev } C_1(x)$ за інволюцій (α) , (β) , якщо r – непарне число;
 $C(x) = \text{rev } C_1(x)$ за інволюцій (α) , (β) , якщо r – парне число і за інволюції (γ) .

Розглянемо факторизації ∇ -симетричної матриці $A(x)$, характеристичний поліном $\det A(x)$ яких є одиницею кільця $C[x]$. Такі оборотні над $C[x]$ матриці $A(x)$ є сингулярними. Легко бачити, що $\text{rev } A(x)$ зворотна до матриці $A(x) \in GL_n(C[x])$ є регулярною матрицею, характеристичний поліном якої $\det(\text{rev } A(x)) = x^{mn}$.

Наступний результат встановлює необхідні і достатні умови існування факторизації ∇ -симетричної оборотної над $C[x]$ матриці $A(x)$, в якій $B(x) \in GL_n(C[x])$, $\deg B(x) = m/2$.

Теорема 3. Для ∇ -симетричної оборотної над $C[x]$ матриці $A(x)$ існує факторизація (4), в якій $B(x)$ оборотна над $C[x]$ із системою н.е.д. $x^{l_1}, x^{l_2}, \dots, x^{l_n}$, $0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_n$, $\sum_{i=1}^n l_i = mn/2$, а $C(x) = C -$ неособлива діагональна матриця, тоді і тільки тоді, коли ∇ -симетрична матриця $V(\tilde{\Phi})P(x)\text{rev } A(x)P(x)^{\nabla}V(\tilde{\Phi})^{\nabla}$ ділиться одночасно зліва на $\tilde{\Phi}(x)$ і справа на $\tilde{\Phi}(x)^{\nabla}$ при деяких допустимих значеннях параметрів матриці $V(\tilde{\Phi})$, для яких виконується умова (10), де $\tilde{\Phi}(x) = \text{diag}(x^{l_1}, \dots, x^{l_n})$, $P(x)$ – оборотна матриця з рівності (9), $V(\tilde{\Phi})$ – ядро визначальної матриці $W(\tilde{\Phi})$ із (11).

Доведення. Необхідність випливає із теореми 1 і наслідку 3.

Достатність. Згідно з теоремою 1 [11] існує факторизація регулярного матричного полінома $\text{rev } A(x)$ зворотного до $A(x)$

$$\text{rev } A(x) = \text{rev } B_1(x)G\text{rev } B_1(x)^{\nabla}, \quad (15)$$

де $\text{rev } B_1(x)$ – унітальна матриця степеня $m/2$ з формою Сміта $\tilde{\Phi}(x)$, а $G = G^{\nabla}$ – неособлива матриця. Матриця G є ермітово конгруентною за інволюції (α) (конгруентною за інволюцій (β) , (γ)) до матриці енергії $I(G) = \text{diag}\{E_k, E_{n-k}\}$, де k – кількість додатних власних значень матриці G , тобто $G = TI(G)T^{\nabla}$, а $T \in GL_n(C)$.

Тоді із співвідношення (15) одержуємо факторизацію

$$\text{rev } A(x) = \text{rev } B(x)C_1\text{rev } B(x)^{\nabla}, \quad (16)$$

де $\text{rev } B(x) = \text{rev } B_1(x)T$ – регулярна матриця степеня $m/2$ з формою Сміта $\tilde{\Phi}(x)$, $C_1 = I(G)$.

Розглянувши поліном зворотний до $\text{rev } A(x)$, з рівності (16) одержимо факторизацію (4), в якій матриця $B(x)$ зворотна до $\text{rev } B(x)$ є оборотною над $C[x]$ із системою н.е.д. $x^{l_1}, x^{l_2}, \dots, x^{l_n}$, а вигляд матриці $C = \pm C_1$ описано у твердженні 8.

Теорему доведено.

З теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 4. Для ∇ -симетричної матриці $A(x) \in GL_n(C[x])$ існує факторизація (4), в якій $B(x) \in GL_n(C[x])$, $\deg B(x) = \deg A(x)/2$ тоді і лише тоді, коли існує факторизація ∇ -симетричної матриці $\text{rev}A(x)$ зворотної до $A(x)$.

Приклад. Нехай задано матрицю

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x^2 & x^2 + \sqrt{2}x & 0 \\ x^2 - \sqrt{2}x & 1-x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(C[x]), \quad A(x) = A(x)^\nabla \text{ за інволюції } (\beta).$$

Розглянемо $\text{rev}A(x) = \begin{pmatrix} x^2-1 & 1+\sqrt{2}x & 0 \\ 1-\sqrt{2}x & x^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$ зворотний до $A(x)$, форма Сміта якого $S_{\text{rev}A(x)}(x) = \text{diag}(1, x^2, x^4)$.

Симетрична матриця $\text{rev}A(x)$ є регулярною і для неї існують допустима факторизація (4) за інволюції (β) , в якій множник $\text{rev}B(x)$ має форму Сміта $\tilde{\Phi}_1(x) = \text{diag}(1, x, x^2)$:

$$\text{rev}A(x) = \begin{pmatrix} x + (1/\sqrt{2}) & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & x - (1/\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} -x + (1/\sqrt{2}) & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -x - (1/\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}.$$

і недопустимі факторизації за інволюції (β) , в яких множник $\text{rev}B(x)$ має форму Сміта $\tilde{\Phi}_2(x) = \text{diag}(1, 1, x^3)$:

$$\begin{aligned} \text{rev}A(x) &= \begin{pmatrix} x + \sqrt{2} & 0 & i \\ -\sqrt{2} & x & -i \\ i & -i & x - \sqrt{2} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} -x + \sqrt{2} & -\sqrt{2} & i \\ 0 & -x & -i \\ i & -i & -x - \sqrt{2} \end{pmatrix}; \\ \text{rev}A(x) &= \begin{pmatrix} x + ((1+i)/\sqrt{2}) & (1-i)/\sqrt{2} & -1 \\ -(1+i)/\sqrt{2} & x - ((1-i)/\sqrt{2}) & 1 \\ -1 & 1 & x - i\sqrt{2} \end{pmatrix} C \\ &\quad \begin{pmatrix} -x + ((1+i)/\sqrt{2}) & -(1+i)/\sqrt{2} & -1 \\ (1-i)/\sqrt{2} & -x - ((1-i)/\sqrt{2}) & 1 \\ -1 & 1 & -x - i\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

У наведених факторизаціях $\text{rev}A(x)$ матриця C дорівнює $C = \text{diag}(-1, -1, -1)$. Побудова таких факторизацій є окремою задачею теорії розкладності поліномних матриць.

На підставі теореми 3 для ∇ -симетричної оборотної над $C[x]$ матриці $A(x)$ існують факторизації за інволюції (β) , в яких множник $B(x)$ оборотна над $C[x]$ матриця із системою н.е.д. $1, x, x^2$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + (1/\sqrt{2})x & x/\sqrt{2} & 0 \\ -x/\sqrt{2} & 1 - (1/\sqrt{2})x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - (1/\sqrt{2})x & x/\sqrt{2} & 0 \\ -x/\sqrt{2} & 1 + (1/\sqrt{2})x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і факторизації за інволюції (β), в яких множник $B(x)$ оборотна над $C[x]$ матриця із системою н.е.д. $1, 1, x^3$:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}x & 0 & ix \\ -\sqrt{2}x & 1 & -ix \\ ix & -ix & 1 - \sqrt{2}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}x & \sqrt{2}x & -ix \\ 0 & 1 & ix \\ -ix & ix & 1 + \sqrt{2}x \end{pmatrix};$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + ((1+i)/\sqrt{2})x & (1-i)x/\sqrt{2} & -x \\ -(1+i)x/\sqrt{2} & 1 - ((1-i)x/\sqrt{2}) & x \\ -x & x & 1 - i\sqrt{2}x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - ((1+i)/\sqrt{2})x & (1+i)x/\sqrt{2} & x \\ -(1-i)x/\sqrt{2} & 1 + ((1-i)x/\sqrt{2}) & -x \\ x & -x & 1 - i\sqrt{2}x \end{pmatrix}.$$

Важливою є задача про факторизацію (4) оборотної над $C[x]$ ∇ -симетричної матриці $A(x)$ степеня m , в якій $B(x) \in GL_n(C[x])$, $\deg B(x) > m/2$. У таких факторизаціях умова рівності степенів факторизованих множників не виконується, тобто $\deg A(x) \neq \deg B(x) + \deg B(x)^\nabla$, тому скористаємось перетворенням ∇ -зворотного полінома.

Легко бачити, що якщо матричний поліном $A(x)$ оборотний над $C[x]$, то $\text{rev}_j A(x) - j$ -зворотний до $A(x)$ є регулярним матричним поліномом. Якщо ж $A(x)$ симетрична матриця, то матриця $\text{rev}_j A(x)$ також є ∇ -симетричною матрицею, якщо j – парне число. Надалі, вважатимемо, що j – парне число.

Зважаючи, що на рівність $\text{rev}_j A(x) = x^{j-m} \text{rev} A(x)$ (твердження 5, власт. 4)), то легко переконатись у справедливості наступного твердження.

Твердження 9. Нехай форма Сміта $S_{\text{rev}A}(x)$ матричного полінома $\text{rev}A(x)$ зворотного до $A(x)$ має вигляд (9). Тоді форма Сміта $S_{\text{rev}_j A(x)}(x)$ матричного полінома $\text{rev}_j A(x)$ отримується за тих самих матриць $P(x), Q(x)$ оборотних над $C[x]$, тобто

$$S_{\text{rev}_j A(x)}(x) = P(x) \text{rev}_j A(x) Q(x).$$

Теорема 4. Для ∇ -симетричної матриці $A(x) \in GL_n(C[x])$ вигляду (1) існує факторизація (4), в якій $B(x) \in GL_n(C[x])$, $\deg B(x) > m/2$, $C = C^\nabla$ – неособлива діагональна матриця, тоді і лише тоді, коли існує недопустима факторизація матричного полінома $\text{rev}_j A(x) - j$ – у зворотного до $A(x)$, де $j = \deg(\text{rev} B(x)) + \deg(\text{rev} B(x))^\nabla$, $\text{rev} B(x)$ зворотний до $B(x)$ поліном.

Доведення. Необхідність. Нехай для матриці $A(x) \in GL_n(C[x])$ існує факторизація (4) і

$$j = \deg(\operatorname{rev} B(x)) + \deg(\operatorname{rev} B(x))^{\nabla}.$$

Розглянувши $\operatorname{rev}_j A(x)$ j -зворотний до $A(x)$, із рівності (4) одержуємо факторизацію регулярного матричного полінома $\operatorname{rev}_j A(x)$.

Доведемо, що отримана факторизація матриці $\operatorname{rev}_j A(x)$ не може бути допустимою. Припустимо, що існує допустима факторизація для $\operatorname{rev}_j A(x)$

$$\operatorname{rev}_j A(x) = \operatorname{rev} B_1(x) C_1 \operatorname{rev} B_1(x)^{\nabla}, \quad S_{\operatorname{rev}_j A(x)}(x) = \Phi_1(x) I \Phi_1(x)^{\nabla}, \quad (17)$$

де матричний поліном $\operatorname{rev} B_1(x)$ з формою Сміта $\Phi_1(x)$, $\deg \Phi_1(x) = jn/2$. Оскільки $S_{\operatorname{rev}_j A(x)}(x) = Ex^{j-m} S_{\operatorname{rev} A(x)}(x)$, то з співвідношень (17) можна виділити лівий і правий множники $Ex^{(j-m)/2}$ і $(Ex^{(j-m)/2})^{\nabla}$ відповідно

$$\operatorname{rev} B_1(x) = Ex^{(j-m)/2} \operatorname{rev} B(x), \quad \Phi_1(x) = Ex^{(j-m)/2} \Phi(x).$$

Звідси, існує допустима факторизація матриці $\operatorname{rev} A(x)$, в якій матриця $\operatorname{rev} B(x)$ степеня $m/2$ з формою Сміта $\Phi(x)$. Отримали протиріччя з тим, що $\deg(\operatorname{rev} B(x)) = \deg B(x) > m/2$.

Достатність. Нехай існує факторизація матричного полінома $\operatorname{rev}_j A(x)$ j -зворотного до $A(x)$

$$\operatorname{rev}_j A(x) = \operatorname{rev} B(x) C_1 \operatorname{rev} B(x)^{\nabla}, \quad (18)$$

причому $\deg(\operatorname{rev}_j A(x)) = \deg(\operatorname{rev} B(x)) + \deg(\operatorname{rev} B(x))^{\nabla}$.

Розглянувши матричний поліном зворотний до $\operatorname{rev}_j A(x)$, з рівності (18) одержуємо факторизацію оборотної над $C[x]$ матриці $A(x)$, причому $\deg A(x) < \deg B(x) + \deg B(x)^{\nabla}$.

Остання нерівність має місце, оскільки матричні коефіцієнти $\operatorname{rev}_j A(x)$ при $x^{r-1}, \dots, x^0$ полінома $\operatorname{rev}_j A(x)$ є нульовими.

Теорему доведено.

Висновки

У статті досліджено факторизацію ∇ -симетричних сингулярних матриць над кільцем поліномів з інволюцією. Факторизації таких матриць використовують в задачах теорії оптимального керування, диференціальних іграх і в побудові інтегрованих систем класичної механіки [12-13].

У термінах системи нескінченних елементарних дільників і поняття зворотного матричного полінома знайдено необхідні і достатні умови існування факторизацій ∇ -симетричних сингулярних матриць із сингулярним множником наперед заданої форми Сміта і системою нескінченних елементарних дільників над кільцями поліномів з інволюцією.

Встановлено відповідність між факторизаціями сингулярних і регулярних ∇ -симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією. Цей зв'язок побудовано з використанням концепції зворотного та j -зворотного матричних поліномів та системи нескінченних елементарних дільників.

За допомогою понять зворотного й j -зворотного матричних поліномів, отримано необхідні й достатні умови факторизації оборотних V -симетричних матриць над кільцем поліномів з інволюцією. Факторизації оборотних матриць отримано з обмеженням на степені співмножників і без додаткових обмежень.

Література

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
2. Lancaster P.A fundamental theorem on Lambda-matrices with applications. *Linear Algebra and its Appl.*, – 1977, v. 18, N 3, – p. 189–222. [doi: 10.1016/0024-3795\(77\)90051-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(77)90051-9)
3. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Spectral analysis of matrix polynomials I. *Linear Algebra and its Appl.*, – 1978, v. 20, N 1, – p. 1–44. [doi: 10.1016/0024-3795\(78\)90026-5](https://doi.org/10.1016/0024-3795(78)90026-5)
4. Gohberg Lancaster P., Rodman L. Spectral analysis of matrix polynomials II. *Linear Algebra, and Appl.*, – 1978, v. 21, N 1, – p. 65–88. [doi: 10.1016/0024-3795\(87\)90201-1](https://doi.org/10.1016/0024-3795(87)90201-1)
5. Зеліско В.Р. Сингулярні дільники матричного многочлена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. –1996. – Вип. 43 – С. 13–15.
6. Кучма М.І. Про спеціальні дільники сингулярних матричних многочленів // Матем. студії. Львів. – 1997. – Вип. 8. № 2 – С. 153–156.
7. Кучма М.І. Симетрична еквівалентність матричних многочленів і виділення спільного унітального дільника із матричних многочленів // Укр. матем. журн. 2001. Т. 53. № 2. – С. 211-219. [doi: 10.1023/A:1010412919666](https://doi.org/10.1023/A:1010412919666)
8. Gohberg I., Kaashoek M. A. and Lancaster P. General theory of regular matrix polynomials and band Toeplitz operators. *Integral Equations Operator Theory*, – 1988. 11(6): – p. 776–882.
9. Lyubachevskii, B.D. Factorization of symmetric matrices with elements from a ring with involution. I. *Sib. Math. J.* – 1973. 14, – p. 233–246.
10. Kazimirskiy P.S., Shchedryk V.P. On solutions of matrix polynomials sided equations//*Doklady AN SSSR*, – 1989. 304 (2) – p. 271–274.
11. Зеліско В.Р., Кучма М.І. Факторизація симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. Т. 40. № 4. – С. 91–95.
12. Andreev V.A., Shepelyavyi A.I. Synthesis of optimal controls for amplitudeimpulse systems in the problem of minimizing the mean value of a functional of quadratic type. *Sib. Math. J.* – 1973. 14, – p.173–190. [doi: 10.1007/BF00967945](https://doi.org/10.1007/BF00967945)
13. Veselov, A.P. Integrable Lagrangian correspondences and the factorization of matrix polynomials. *Funct. Anal. Its Appl.* – 1991. 25, – p.112–122. [doi: 10.1007/BF01079590](https://doi.org/10.1007/BF01079590)

Стаття надійшла до редакційної колегії 02.11.2025 р.

Прийнято до друку 07.11.2025 р.

**FINITE AND INFINITE ELEMENTARY DIVISORS IN THE
CONSTRUCTION OF FACTORIZATIONS OF SYMMETRIC
POLYNOMIAL MATRICES****M. I. Kuchma¹, A. I. Gatalevych²**

¹Lviv Polytechnic National University; 79013, 12 Stepana Bandery St., Lviv, Ukraine; e-mail: mariia.i.kuchma@lpnu.ua;

²Ivan Franko National University of Lviv; 79000, 1 Universytetska St., Lviv, Ukraine; e-mail: andriy.gatalevych@lnu.edu.ua

In many applied problems, factorization of symmetric polynomial matrices with real and complex coefficients is used to construct synthesized locally optimal control, to construct integrated systems of classical mechanics, in particular, to solve the Euler-Arnold problem of the motion of a multidimensional rigid body, billiards in spaces of constant curvature.

For ∇ -symmetric polynomial matrices over a ring of polynomials with involution, conditions for the existence of the factorization $A(x) = B(x)C(x)B(x)^\nabla$ with a singular factor $B(x)$ with a given canonical Smith form and a system of infinite elementary divisors are obtained.

The correspondence between the factorizations of ∇ -symmetric singular polynomial matrices and ∇ -symmetric regular polynomial matrices is established, which is carried out using the concepts of the reversal and j -reversal matrix polynomials and the system of infinite elementary divisors. This correspondence is based on the properties of the transformations of the reversal and j -reversal of matrix polynomials and the concept of infinite elementary divisors of a factorized matrix.

Necessary and sufficient conditions for the existence of a factorization of a ∇ -symmetric invertible matrix $A(x)$ of degree m , in which the factor $B(x)$ is an invertible polynomial matrix of degree $\deg B(x) = \deg A(x)/2$, are obtained.

In such factorizations, the condition is satisfied that the sum of the powers of the factored factors is equal to the power of the factored matrix. If this condition of equality of degrees is not satisfied, then the existence of a factorization of a ∇ -symmetric invertible matrix is connected with the existence of an inadmissible factorization of a j -reversal polynomial matrix.

Keywords: *regular polynomial matrix, factorization of ∇ -symmetric polynomial matrix, the Smith canonical form, reversal and j -reversal matrix polynomial, finite and infinite elementary divisors.*