Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.956.4
MSC 2020: 35K70
DOI: 10.31471/2304-7399-2025-21(79)-66-77

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ В ПІВПРОСТОРІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ТИПУ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ

І. В. Буртняк, Г. П. Малицька
Карпатський національний університет ім. В. Стефаника; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: ivan.burtniak@cnu.edu.ua

В статті досліджено першу крайову задачу в півпросторі для рівняння типу дифузії з інерцією,де інерція залежить від чотирьох груп змінних, за якими є виродження параболічності та кожній групі підпорядкована певна кількість змінних. Для встановлення існування розв'язків крайових задач застосовується граничний перехід і асимптотичний розклад рівняння. Також використано явний вигляд фундаментального розв'язку задачі Коші та властивості його похідних для виродженого параболічного рівняння. Методом потенціалів першу крайову задачу в півпросторі зведено до розв'язування відповідного сингулярного інтегрального рівняння в класах експоненційно спадних диференційовних функцій, для якого його інтегральний оператор слугує оператором стискання при малих t. Єдиність розв'язку першої крайової задачі в півпросторі випливає із принципу максимуму в класах ультрапараболічних рівнянь, коефіцієнти яких є обмеженими функціями.

Ключові слова: *рівняння типу дифузії, потенціал, інтеграл Пуассона, вироджені параболічні рівняння, задача Діріхле, дифузійні процеси.*

Вступ. Крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку мають широке застосування в фізиці та механіці. Розв'язання задач на власні значення і власні функції використана в [1-2]. Теорія самоспряжених операторів в гільбертових просторах отримала широке застосування в економіці в теорії опціонів дослідження волатильності [7], які описуються рівнянням дифузії з інерцією [4]. Ґрунтовне дослідження крайових задач в півпросторі з використанням умов Лопатинського зроблене в [5-6]. В даній статті розглянуто випадок чотирьох груп змінних з виродженням параболічності. Ми використовуємо явний вигляд фундаментального розв'язку задачі Коші та властивості його похідних для виродженого параболічного рівняння, методом потенціалів зводимо першу крайову задачу в півпросторі до розв'язання відповідного сингулярного інтегрального рівняння в класах експоненційно спадних диференційовних

функцій, такого що інтегральний оператор є оператором стиску при малих t[8]. Єдиність розв'язку першої крайової задачі в півпросторі випливає із принципу максимуму в класах максимуму в класах ультрапараболічних рівнянь, коефіцієнти яких є обмеженими функціями [9].

Постановка задачі:

Нехай $x \in R^{n_0}, n_0 \in N, x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_j \in R^{n_j}, n_j > n_{j+1},$

$$j = \overline{1,3}. \sum_{j=1}^{4} n_j = n_0, \xi \in R^{n_0}, \xi_j \in R^{n_j},$$

$$x' = \left(x_{12}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{4n_4}\right), x' \in R^{n_0-1},$$

$$\Pi_{(0,T]} = \{(t,x), x \in R^{n_0}, x_{11} > 0, 0 < t \le T < +\infty\} \partial^k_{x_{ji}^k} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_{j1}^{k_1} \partial x_{j2}^{k_2} \dots \partial x_{jn}^{k_n}},$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, x_n), |k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Розглянемо вироджене параболічне рівняння вигляду:

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{3} \sum_{\mu=1}^{n_{j+1}} x_{j\mu}\, \partial_{x_{j+1,\mu}} u(t,x) - \sum_{k=1}^{n_1} \partial^2_{x_{1k}^2} u(t,x) = f(t,x),$$

$$x' \in R^{n_0-1}, t > 0, x_{11} > 0, \quad (1)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad (2)$$

$$u(t,0,x') = f(t,x'), t > 0, \quad (3)$$

$$u_0(0,x') = \varphi(x'). \quad (4)$$

Теорема. Якщо 1) $f(t,x)$ неперервна і обмежена в $\Pi_{[0,T]}$,

2) задовольняє рівномірну умову Гельдера по x з показником $\alpha, 0 < \alpha \le 1$, тобто $|f(t,x) - f(t,\xi)| \le K|x-\xi|^\alpha$, $K -$ константа, не залежить від (t,x),

3) має неперервні похідні по x_{ji} до другого порядку включно $j = \overline{2,4}. \int_{R^{n_0-1}} |\partial^k_{x_{ji}^k} f(t,x)|\, dx' \le C < +\infty, j = \overline{2,4}, |k| \le 2.$

4) $u_0(0,x), \varphi(t,x')$ неперервні, обмежені і мають неперервні і обмежені похідні по $x_{ji}, j = \overline{2,4}$, до другого порядку включно, $\int_{R^{n_0-1}} |\partial^k_{x_{ji}} u_0(x)|\, dx' \le C < +\infty, \int_{R^{n_0-1}} |\partial^k_{x_{ji}} \varphi(t,x')|\, dx' \le C < +\infty, |k| \le 2$, тоді задача (1)-(4) має єдиний розв'язок.

Доведення. Розв'язок задачі (1)-(4) $u(t,x)$ шукаємо методом потенціалів, використовуючи фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1). ФРЗК має вигляд:

$$Z(t,x;\xi) = M_0 t^{-\sum_{j=1}^{4} \frac{(2j-1)n_j}{2}} \pi^{-\frac{n_0}{2}} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{4} \rho_j^2(t,x;\xi)\right\}, \quad (5)$$

де $M_0 = \sqrt{3^{n_2}} (6\sqrt{5})^{n_3} (60\sqrt{7})^{n_4} 2^{-n_1},$

$$\rho_1^2(t,x;\xi) = \sum_{k=1}^{n_4} \rho_{1k}^2\left(t, \bar{x}; \bar{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{n_4} [(x_{1k} - \xi_{1k})^2 (4t)^{-1} + 3t^{-3}$$

$$(x_{2k} - \xi_{2k} + (x_{1k} + \xi_{1k}) t 2^{-1})^2 + 180 t^{-5} (x_{3k} - \xi_{3k} + t 2^{-1} x_{2k} + \xi_{2k})$$

$$+ (x_{1k} - \xi_{1k}) 12^{-1} t^2)^2 + 25200 t^{-7} (x_{4k} - \xi_{4k} +$$

$$(x_{3k} + \xi_{3k})\, t 2^{-1} + t^2 10^{-1} (x_{2k} - \xi_{2k}) + t^3 120^{-1} (x_{ik} + \xi_{ik}))]$$

$$\bar{x} = \left(x_{11}, \dots, x_{1n_4}, x_{21}, \dots, x_{2n_4}, x_{31} \dots, x_{3n_4}, x_{41} \dots, x_{4n_4}\right)$$

$$\rho_2^2(t,x;\xi)=\sum_{k=n_4+1}^{n_3}\rho_{2k}^2\left(t,\bar{\bar{x}};\bar{\bar{\xi}}\right)=\sum_{k=n_4+1}^{n_3}[(x_{1k}-\xi_{1k})^2(4t)^{-1}+3t^{-3}(x_{2k}$$
$$-\xi_{2k}+(x_{1k}+\xi_{1k})t2^{-1})^2+180t^{-5}(x_{3k}-\xi_{3k}+(x_{2k}+\xi_{2k})t2^{-1}$$
$$+(x_{1k}-\xi_{1k})12^1t^2)^2t^{-5}]$$
$$\bar{\bar{x}}=\left(x_{1n_4+1},\dots,x_{1n_3},x_{2n_4+1},x_{2n_3},x_{3n_4+1}\dots,x_{3n_3}\right)$$
$$\rho_3^2(t,x;\xi)=\sum_{k=n_3+1}^{n_2}\rho_{3k}^2\left(t,\bar{\bar{x}};\bar{\bar{\xi}}\right)=\sum_{k=n_3+1}^{n_2}[(x_{1k}-\xi_{1k})^2(4t)^{-1}+3t^{-3}$$
$$(x_{2k}-\xi_{2k}+(x_{1k}+\xi_{1k})t2^{-1})^2]$$
$$\bar{\bar{x}}=\left(x_{1n_3+1},\dots,x_{1n_2},x_{2n_3+1},\dots,x_{2n_2}\right)$$
$$\rho_4^2(t,x;\xi)=\sum_{k=n_2+1}^{n_1}\rho_{4k}^2\left(t,\tilde{x},\tilde{\xi}\right)=\sum_{k=n_2+1}^{n_1}(x_{1k}-\xi_{1k})^2(4t)^{-1},$$
$$\tilde{x}=\left(x_{1n_2+1},\dots,x_{1n_1}\right)$$

Можна вважати, що $u_0(x),\varphi(t,x)$ визначені, неперервні і обмежені у всьому просторі R^{n_0}, тоді функція

$$u_1(t,x)=\int_{R^{n_0}}Z(t,x;\xi)u_0(\xi)d\xi, \tag{6}$$

неперервна і обмежена в $\Pi_{[0,T]}$ і задовольняє в $\Pi_{(0,T]}$ рівнянню (1) з правою частиною$f(t,x)\equiv 0$ і прямує до $u_0(x)$ при $t\to 0$, доведення наведено в [4]. Аналогічно функція

$$u_2(t,x)=\int_0^t d\beta\int_{R^{n_0}}Z(t-\beta,x;\xi)f(\beta,\xi)d\xi, \tag{7}$$

задовольняє в $\Pi_{(0,T]}$ рівняння (1). Візьмемо $u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x)+u_3(t,x)$, де $u_1(t,x),u_2(t,x)$ визначаються за формулами (6)-(7) а$u_3(t,x)$ має вигляд $u_3(t,x)=M_0\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t d\beta\int_{R^{n_0-1}}\partial_{x_{11}}Z(t-$ *β,x,0,ξ' μt,ξ'dξ', ξ'=(ξ12,…,ξ1n1,…,ξ4n4),* де $\mu t,\xi'$ шукана функція, а перші похідні по x' повинні бути неперервними і обмеженими при $t>0$ та крім того

$$\mu(0,x')=0, \tag{8}$$

Неважко переконатися, що при $t\to 0,x_{11}\to 0,u_3(t,x)\to 0,u_2(t,x)\to 0.$

Якщо $t_0>0,x\to(0,x_0')$, то $\mu(t,x')$ повинна задовольняти таку рівність

$$u_1\left(t_0,0,x_0'\right)+u_2\left(t_0,0,x_0'\right)+$$
$$+\lim_{x_{11}\to 0}\int_0^{t_0}d\beta\int_{R^{n_0-1}}\partial_{\xi_{11}}Z\left(t_0-\beta,x_{11},x_0',0,\xi'\right)\mu(\beta,\xi')d\xi'=\varphi(t,x_0'),$$

Знайдемо $\lim_{x_{11}\to 0}u_3(t,x)$. Для цього використаємо явний вигляд $\partial_{x_{11}}Z(t-\beta,x,0,\xi')$ і$u_3(t,x)$ запишемо в такій формі

$$u_3(t,x)=\left(\int_0^t(t-\beta)^{-\sum_{j=1}^4\frac{(2j-1)n_j}{2}}d\beta\int_{R^{n_0-1}}x_{11}\left(2(t-\beta)\right)^{-1}\mu(\beta,\xi')\right.$$

$$\exp\{-\rho_{11}^2\left(t-\beta;\overline{x},0,\overline{\xi}'\right)-\rho_*^2(t-\beta;x',\xi')\}d\xi$$

$$-\int_0^t (t-\beta)^{-\sum_{j=1}^4\frac{(2j-1)n_j}{2}}d\beta \int\limits_{R^{n_0-1}} 3(x_{21}-\xi_{21}+x_{11}(t-\beta)2^{-1})(t-\beta)^{-2}$$

$$\mu(\beta,\xi')\exp\{-\rho_{11}^2\left(t-\beta;\overline{x},0,\overline{\xi}'\right)-\rho_*^2(t-\beta;x',\xi')\}d\xi'+$$

$$\int_0^t (t-\beta)^{-\sum_{j=1}^4\frac{(2j-1)n_j}{2}}d\beta$$

$$\int\limits_{R^{n_0-1}} 30(x_{31}-\xi_{31}+(x_{21}+\xi_{21})(t-\beta)2^{-1}+x_{11}(t-\beta)^2 12^{-1})$$

$$(t-\beta)^{-3}\mu(\beta,\xi')\exp\{-\rho_{11}^2\left(t-\beta;\overline{x},0,\overline{\xi}'\right)-\rho_*^2(t-\beta;x',\xi')\}d\xi'+$$

$$\int_0^t (t-\beta)^{-\sum_{j=1}^4\frac{(2j-1)n_j}{2}}d\beta \int\limits_{R^{n_0-1}} 420(x_{41}-\xi_{41}+(x_{31}+\xi_{31})(t-\beta)2^{-1}$$

$$(x_{21}-\xi_{21})(t-\beta)^2 10^{-1}+x_{11}(t-\beta)^4 120^{-1})(t-\beta)^{-5}$$

$$\mu(\beta,\xi')\exp\{-\rho_{11}^2\left(t-\beta;\overline{x},0,\overline{\xi}'\right)-\rho_*^2(t-\beta;x',\xi')\}d\xi')=\sum_{j=1}^4 I_j(t,x),$$

де $\rho_*^2(t-\beta;x',\xi')=\rho^2\left(t-\beta;x,\xi'\right)-\rho_{11}^2\left(t-\beta;\bar{x},\bar{\xi}\right)$.

В $I_j(t,x), j=2,3,4$ зробимо заміну змінних

$$\begin{cases}
\sqrt{3}\left(x_{21}-\xi_{21}+\frac{x_{11}}{2}(t-\beta)\right)=-\alpha_{21}(t-\beta)^{\frac{3}{2}}, \\
\sqrt{3}\left(x_{2k}-\xi_{2k}+\frac{x_{1k}+\xi_{1k}}{2}(t-\beta)\right) \\
=-\alpha_{2k}(t-\beta)^{\frac{3}{2}},\ k=2,\dots,n_2, \\
6\sqrt{5}\left(x_{31}-\xi_{31}+\frac{x_{21}+\xi_{21}}{2}(t-\beta)+\frac{x_{11}}{12}(t-\beta)^2\right) \\
=-\alpha_{31}(t-\beta)^{\frac{5}{2}}, \\
6\sqrt{5}\left(x_{3k}-\xi_{3k}+\frac{x_{2k}+\xi_{2k}}{2}(t-\beta)+\frac{x_{1k}-\xi_{1k}}{12}(t-\beta)^2\right) \\
=-\alpha_{3k}(t-\beta)^{\frac{5}{2}},\ k=2,\dots,n_3, \\
\\
60\sqrt{7}(x_{41}-\xi_{41}+\frac{x_{31}+\xi_{31}}{2}(t-\beta)+\frac{x_{21}-\xi_{21}}{10}(t-\beta)^2 \\
\frac{x_{11}}{120}(t-\beta)^3)=-\alpha_{41}(t-\beta)^{\frac{7}{2}}, \\
60\sqrt{7}(x_{4k}-\xi_{4k}+\frac{x_{3k}+\xi_{3k}}{2}(t-\beta)+\frac{x_{2k}-\xi_{2k}}{10}(t-\beta)^2 \\
\frac{x_{1k}+\xi_{1k}}{120}(t-\beta)^3)=-\alpha_{4k}(t-\beta)^{\frac{7}{2}},\ k=2,\dots,n_4 \\
\frac{x_{1k}-\xi_{1k}}{2}=-\alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{1}{2}}k=2,\dots,n_1.
\end{cases} \tag{10}$$

В $I_1(t,x)$зробимо заміну (10) і $x_{11}(t-\beta)^{-\frac{1}{2}}=2\tau$ тому

$$I_1(t,x)=\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^{+\infty}d\tau\int\limits_{R^{n_0-1}}\exp\{-\tau^2-\sum_{j=2}^{4}\sum_{k=1}^{n_j}\alpha_{jk}^2-\sum_{k=2}^{n_1}\alpha_{1k}^2\}2^{-1}t^{-\frac{1}{2}}$$
$$\mu(t-4^{-1}x_{11}^2\tau^{-1},Q'(x,\alpha',\tau)d\alpha', \quad (11)$$

де $Q'(x,\alpha',\tau)=(Q_1',Q_2,Q_3,Q_4)$.

$$Q_{1k}=x_{1k}+2\alpha_{1k}x_{11}\tau^{-1},k=\overline{2,n_1},$$
$$Q_{2k}=x_{2k}+\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\alpha_{2k}(x_{11}\tau^{-1})^3+(x_{1k}+\alpha_{1k}x_{11}\tau^{-1})(x_{11}\tau^{-1})^2,$$
$$k=\overline{2,n_2},$$

при $k=1,\alpha_{11}=0$.

$$Q_{3k}=x_{3k}+\left(6\sqrt{5}\right)^{-1}\alpha_{3k}(x_{11}\tau^{-1})^5+2^{-1}(2x_{2k}+\alpha_{2k}\left(\sqrt{3}\right)^{-1}(x_{11}\tau^{-1})^3+$$
$$+(x_{1k}+2\alpha_{1k}x_{11}\tau^{-1})(x_{11}\tau^{-1})^4-6^{-1}\alpha_{1k}(x_{11}\tau^{-1})^5,k=\overline{1,n_3},\alpha_{11}=0.$$
$$Q_{4k}=x_{4k}+\left(60\sqrt{7}\right)^{-1}\alpha_{4k}(x_{11}\tau^{-1})^7+2^{-1}(2x_{3k}+\alpha_{3k}\left(6\sqrt{5}\right)^{-1}(x_{11}\tau^{-1})^5+$$
$$2^{-1}\left(2x_{2k}+\alpha_{2k}\left(\sqrt{3}\right)^{-1}(x_{11}\tau^{-1})^3+(x_{1k}+2\alpha_{1k}x_{11}\tau^{-1})(x_{11}\tau^{-1})\right)-$$
$$10(\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\alpha_{1k}(x_{11}\tau^{-1})^3+(x_{1k}+\alpha_{1k}x_{11}\tau^{-1}))(x_{11}\tau^{-1})^4$$
$$-60^{-1}(x_{1k}+\alpha_{1k}(x_{11}\tau^{-1})(x_{11}\tau^{-1})^6,k=\overline{1,n_4},\alpha_{11}=0.$$

Згідно (11) оцінимо$I_1(t,x)$:

$$|I_1(t,x)|\le\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^{+\infty}\int\limits_{R^{n_0-1}}\exp\{-\tau^2-\alpha'^2\}\sup_x|\mu(t-4^{-1}x_{11}^2\tau^{-1},$$
$$Q'(x,\alpha',\tau)|d\alpha'd\tau$$

В (11) перейдемо до границі при t→ $0,x_{11}\to 0,x'\to x_0'$, на основі (8), за теоремою Лебега одержимо

$$\lim_{(t,x')\to(0,0,x_0')}I_1(t,x)=0. \quad (12)$$

Використаємо заміну (10) до $I_j(t,x),j=2,3,4.$ і оцінимо інтеграли $I_j(t,x)$

$$|I_3(t,x)|\le C\sum_{j=2}^{4}\sup|\partial_{x_{j1}}\mu(t,x')|_{(t,x')}\int_0^t(t-\beta)^{\frac{2(j-1)-1}{2}}d\beta,,C\ge 0. \quad (13)$$

$$|I_4(t,x)|\le C\sup_{(t,x')}|\left(\partial_{x_{41}}\mu(t,x')\right)|\int_0^t(t-\beta)^{\frac{5}{2}}d\beta,C-const,C>0. \quad (14)$$

Звідси маємо

$$\lim_{(t,x)\to(0,0,x_0')}I_j(t,x)=0,\ j=2,3,4. \quad (15)$$

Із формули (12), (15) властивостей функції $u_1(t,x)$ випливає умова узгодження (4).

Визначимо поведінку потенціалу $u_3(t,x)$ на межі $x_{11}=0,t>0$.

Доведемо, що

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,0,x_0')}I_1(t,x)=\frac{\mu(t_0,x_0')}{2}.$$

$$\lim_{(t,x)\to(t_0,0,x_0')}\sum_{j=2}^{4} I_j(t,x)=\int_0^{t_0} d\beta \int\limits_{R^{n_0-1}} \partial_{x_{11}} Z(t-\beta,0,x',0,\xi')\mu(\beta,\xi')d\xi' =$$
$$= I_0(t_0,x), t_0>0. \quad (16)$$

Використаємо рівність (11), запишемо $I_1(t,x)-\frac{\mu(t_0,x_0')}{2}$ у такому вигляді

$$I_1(t,x)-\frac{\mu(t_0,x_0')}{2}=\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_{\frac{x_{11}}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}\int\limits_{R^{n_0-1}}\exp\{-\alpha'^2-\tau^2\}$$
$$\left[\mu\left(t-4^{-1}x_{11}^2\tau^{-2},Q'(x,\alpha',\tau)\right)-\mu(t_0,x_0')\right]d\alpha' d\tau -$$
$$\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^{\frac{x_{11}}{2\sqrt{t}}}d\tau\int\limits_{R^{n_0-1}}\exp\{-\tau^2-\alpha'^2\}\,\mu(t_0,x_0')\,d\alpha' = I_5-I_6.$$

Оцінимо I_5

$$|I_5(t,x)|\le\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_{\frac{x_{11}}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}\int\limits_{R^{n_0-1}}\exp\{-\tau^2-\alpha'^2\}$$
$$\left|\mu\left(t-4^{-1}x_{11}^2\tau^{-2},Q'(x,\alpha',\tau)\right)-\mu(t_0,x_0')\right|\,d\alpha' d\tau$$
$$\le C\int_0^{+\infty}\int_{R^{n_0-1}}\exp\{-\tau^2-\alpha'^2\}d\alpha' d\tau. \quad (17)$$

$C>0$ не залежить від x_{11},t.

Із оцінки (18) випливає граничний перехід під знаком інтеграла $I_5(t,x)$ при t$\to 0, x_{11}\to 0, x'\to x_0'$. Оскільки $\mu(t,x')$ неперервна то $\lim_{(t,x)\to(t_0,0,x_0')} I_5(t,x)=0$.

Інтеграл $I_6(t,x)$ малий при малому x_{11}. Для доведення рівності (18), досить встановити, що $\sum_{j=2}^4 I_j(t,x)\to I_0(t,x_0')$ при $x_{11}\to 0, x'\to x_0'$ рівномірно відносно (t,x').

В інтегралі $I_0(t,x_0')$ після підстановки явного вигляду для функції $\partial_{x_{11}}Z(t-\beta,x,0,\xi')$, зробимо заміну змінних (10) де замість x' відіграє x_0'. Тоді

$$I_0(t_0,x_0')=2^{-1}\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t\int\limits_{R^{n_0-1}}(t-\beta)^{-1}\left[\sqrt{3}\alpha_{21}+\sqrt{5}\alpha_{31}+\sqrt{7}\alpha_{41}\right]$$
$$\exp\{-\alpha'^2\}\,\mu\left(\beta,G'(t-\beta,x_0',\alpha')\right)d\alpha' d\beta,$$

де $G'(t-\beta,x,\alpha')=(G_1'(t-\beta,x,\alpha'),G_2(t-\beta,x,\alpha'),G_3(t-\beta,x,\alpha'),$ $G_4(t-\beta,x,\alpha'))$, при $x_{11}=0$ маємо $G'(t-\beta,x',\alpha')$:

$G_{1k}'(t-\beta,x,\alpha')=x_{1k}+2\alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{1}{2}}, k=\overline{2,n_1}$, при $k=1,\alpha_{11}=0,$

$G_{2k}(t-\beta,x,\alpha') = x_{2k} + \left(\sqrt{3}\right)^{-1}\alpha_{3k}(t-\beta)^{\frac{3}{2}} + (x_{1k} + \alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{1}{2}})(t-$
β, k=1,n2,α11=0.

$$G_{3k}(t-\beta,x,\alpha') = x_{3k} + \left(6\sqrt{5}\right)^{-1}\alpha_{3k}(t-\beta)^{\frac{5}{2}} + 2^{-1}(t-\beta)$$
$$(2x_{2k} + \left(\sqrt{3}\right)^{-1}\alpha_{2k}(t-\beta)^{\frac{3}{2}} + \left(x_{1k} + 2\alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{1}{2}}\right)(t-\beta))$$
$$-6^{-1}\alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{5}{2}}, k = \overline{1,n_3}, \alpha_{11} = 0.$$

$$G_{4k}(t-\beta,x,\alpha') = x_{4k} + \left(60\sqrt{7}\right)^{-1}\alpha_{4k}(t-\beta)^{\frac{7}{2}} + 2^{-1}(t-\beta)(2x_{3k} +$$
$$\left(6\sqrt{5}\right)^{-1}\alpha_{3k}(t-\beta)^{\frac{5}{2}} + 2^{-1}(t-\beta)(2x_{2k} + \left(\sqrt{3}\right)^{-1}\alpha_{2k}(t-\beta)^{\frac{3}{2}} +$$
$$(x_{1k} + \alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{1}{2}})(t-\beta)) - 6^{-1}\alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{5}{2}}) - 5^{-1}(t-\beta)^2$$
$$\left(\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\alpha_{2k}(t-\beta)^{\frac{3}{2}} + (x_{1k} + \alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{1}{2}})(t-\beta)\right) + 60^{-1}(t-\beta)^3$$
$$(x_{1k} + \alpha_{1k}(t-\beta)^{\frac{1}{2}}), k = \overline{1,n_4}, \alpha_{11} = 0.$$

В інтегралах $I_j(t,x), j = 2,3,4$ зробимо заміни змінних (10) після чого дослідимо поведінку $\sum_{j=2}^{4} I_j(t,x) - I_0(t,x_0')$, подамо різницю у вигляді $\sum_{j=2}^{4} I_j(t,x) - I_0(t,x_0') = 2^{-1}\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t (t-\beta)^{-1}d\beta\int_{R^{n_0-1}}[\sqrt{3}\alpha_{21} +$ *5α31+7α41]μβ,G′t−β,x0′,α′*exp*{−α′2}*exp*−x1124t−β−1dα′+I7=*I*7*+I7.*

При малому x_{11} інтеграл I_7^* малий і має оцінку

$$|I_7^*(t,x)| \le Cx_{11}\sup_{(t,x')}(\sum_{j=2}^{4}\left|\partial_{x_{j1}}\mu(t,x')\right|)\int_0^t (t-\beta)^{\frac{2(j-1)-1}{2}}d\beta. \quad (18)$$

Для оцінки інтегралу $I_7(t,x)$ застосуємо теорему Лагранжа, тому

$$|I_7(t,x)| \le Cx_{11}\sum_{j=2}^{4}\sup_{(t,x')}\left|\partial_{x_{j1}}\mu(t,x')\right|\int_0^t (t-\beta)^{\frac{2(j-1)-1}{2}}d\beta. \quad (19)$$

Із оцінок (18-19) випливає, що $\lim_{x_{11}\to 0} I_7^*(t,x) = 0$, $\lim_{x_{11}\to 0} I_7(t,x) = 0$, рівномірно відносно (t,x'). Таким чином $u(t,x)$ є розв'язком задачі (1)–(4) тоді і тільки тоді коли для шуканої функції $\mu(t,x')$ виконується

$$\varphi(t,x') = \frac{\mu(t,x')}{2} - M_0\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t (t-\beta)^{\frac{2(j-1)-1}{2}}d\beta$$

$$\int_{R^{n_0-1}}[3(x_{21}-\xi_{21})(t-\beta)^{-2} + 30\left(x_{31}-\xi_{31} + 2^{-1}(x_{21}+\xi_{21})(t-\beta)\right)$$
$$(t-\beta)^{-3} + 420(t-\beta)^{-4}(x_{41}-\xi_{41} + 2^{-1}(x_{31}+\xi_{31})(t-\beta)$$
$$+10^{-1}(t-\beta)^2(x_{21}-\xi_{21}))]\mu(\beta,\xi')\exp\{-\rho^2(t-\beta,0,x',0,\xi')\}d\xi'$$
$$+u_1(t,0,x') + u_2(t,0,x'). \quad (20)$$

Доведемо, що інтегральне рівняння має розв'язок. Для цього введемо множину функцій V змінних t, x'. Елементи цієї множини – неперервні функції $v(t,x^{'})$, які диференційовні по $x^{'}$ та задовольняють нерівність вигляду:

$$\left|\partial_{x^{'}}^{q} v(t,x^{'})\right| \le C_q \exp\{-a|x|^2\} \tag{21}$$

з сталими C_q, a, які залежать тільки від функцій $v(t,x^{'})$. Визначимо норму $v(t,x^{'})$:

$$\left\|v(t,x^{'})\right\| = \sup_{(t,\xi^{'})}\left\{\left|\tilde{v}(t,\xi^{'})\right|\left[1+\left|\xi^{'}\right|^2\right]^{\frac{\beta}{2}}\right\}, \tag{22}$$

де $\tilde{v}(t,\xi^{'})$ – перетворення Фур'є по $x^{'}$ від функції $v(t,x^{'})$.

Під простором $\widetilde{C_\beta}$ будемо розуміти поповнення множини V за нормою (22). Зрозуміло, що при досить великих β елементи простору $\widetilde{C_\beta}$ неперервні функції, які мають неперервні обмежені похідні по $x^{'}$. Перепишемо рівняння (20) в еквівалентній формі

$$\mu(t,x^{'}) = 2M_0\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t (t-\beta)^{-\sum_{j=1}^{4}(2j-1)n_j 2^{-1}}\,d\beta$$

$$\int_{R^{n0-1}} [3(x_{21}-\xi_{21})(t-\beta)^{-2} + 30\big(x_{31}-\xi_{31}+2^{-1}(x_{21}+\xi_{21})(t-\beta)\big)$$
$$(t-\beta)^{-3} + 420(t-\beta)^{-4}(x_{41}-\xi_{41}+2^{-1}(x_{31}+\xi_{31})(t-\beta)$$
$$+10^{-1}(t-\beta)^2(x_{21}-\xi_{21}))]\mu(\beta,\xi^{'})\exp\{-\rho^2\,(t-\beta,0,x^{'},0,\xi^{'})\}d\xi^{'}$$
$$+2(\varphi(t,x^{'}) - u_1(t,0,x^{'}) - u_2(t,0,x^{'})) = A\mu(t,x^{'}) + \Phi(t,x^{'}).$$

Покажемо, що оператор A здійснює стискуюче відображення множини V в себе при малих t.

В інтегралі $A\mu(t,x^{'})$ зробимо заміну змінних інтегрування (10), де $x_{11}=0$, потім інтегруючи частинами, для $A\mu(t,x^{'})$ одержимо вигляд

$$A\mu(t,x^{'}) = 2M_0\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t (t-\beta)^{-1}\,d\beta \int_{R^{n0-1}} \exp\{-\alpha^{'2}\}\,(\sqrt{3}\partial_{\alpha_{21}} +$$
$$\sqrt{5}\partial_{\alpha_{31}} + \sqrt{7}\partial_{\alpha_{41}})\mu\big(\beta, G^{'}(t-\beta,x',\alpha^{'})\big)d\alpha^{'} = 2M_0\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t (t-\beta)^{-1}d\beta$$
$$\int_{R^{n0-1}} ((t-\beta)^{\frac{3}{2}}\partial_{x_{21}} - \frac{4}{3}(t-\beta)^{\frac{5}{2}}\partial_{x_{31}} - \frac{5}{12}(t-\beta)^{\frac{7}{2}}\partial_{x_{41}})$$
$$\mu\big(\beta, G^{'}(t-\beta,x',\alpha^{'})\big)\exp\{-\alpha^{'2}\}\,d\alpha^{'}. \tag{23}$$

Звідси

$$\partial_{x^{'}}^{q} A\mu(t,x^{''}) = 2^{-1}\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t (t-\beta)^{\frac{7}{2}}\,d\beta$$

$$\int\limits_{R^{n_0-1}} \exp\{-\alpha'^2\}\left[\partial^{q+1}_{x_{21}x'} - \frac{1}{3}(t-\beta)\partial^{q+1}_{x_{31}x'} - \frac{5}{12}(t-\beta)^2\partial^{q+1}_{x_{41}x'}\right]$$
$$\mu\big(\beta, G'(t-\beta, x', \alpha')\big)d\alpha'. \quad (24)$$

З (21)–(22) знайдемо оцінку:

$$\left|\partial^q_{x'} A\mu(t,x')\right| = M_q \int\limits_0^t (t-\beta)^{\frac{1}{2}}\, d\beta \int\limits_{R^{n_0-1}} \exp\{-\alpha'^2 - a|G'(t-\beta, x', \alpha')|^2\}$$
$$(1 + (t-\beta) + (t-\beta)^2)\, d\alpha'. \quad (25)$$

З (25) при $0 < t < 1$, після обчислення отримаємо

$$\left|\partial^q_{x'} A\mu(t,x')\right| = C_q \exp\{-\varepsilon_0|x'|^2\} \sum_{j=2}^{4} \int\limits_0^t (t-\beta)^{\frac{2(j-1)}{2}}\, d\beta$$

$$\int\limits_{R^{n_0-1}} \exp\{-\varepsilon_2|\alpha'|^2\} d\alpha', 0 < \varepsilon_0 < 1, 0 < \varepsilon_2 < 1.$$

Відповідно до оцінки (25), t можна підібрати так, щоб $A^q\mu(t,x')$ належало множині V.

Оцінимо $\|A\mu(t,x')\|$. Для цього знайдемо перетворення Фур'є по x' від $A\mu(t,x')$.

$$\tilde{A}\mu(t,\xi) = 2M_q\pi^{-\frac{n_0}{2}} \int\limits_0^t (t-\beta)^{-\sum_{j=1}^4 (2j-1)n_j 2^{-1}}\, d\beta \int_{R^{n_0-1}} \exp\{-i(x'\xi')\} d\xi$$

$$\int_{R^{n_0-1}} \exp\{-\rho^2\,(t-\beta, 0, x', 0, \gamma)\}\,[-3(x_{21}-\gamma_{21})(t-\beta)^{-2} -$$
$$30\big(x_{31}-\gamma_{31}+2^{-1}(x_{21}+\gamma_{21})(t-\beta)\big)(t-\beta)^{-3} - 420(t-\beta)^{-4}(x_{41}$$
$$-\gamma_{41}$$
$$+2^{-1}(x_{31}+\gamma_{31})(t-\beta) + 10^{-1}(t-\beta)^2(x_{21}-\gamma_{21}))]\mu(\beta,\gamma')d\gamma' \quad (26)$$

В (26) зробимо заміну змінних

$$x_{1k} - \gamma_{1k} = -\zeta_{1k}, k = \overline{2, n_1},$$
$$x_{ik} - \gamma_{ik} + (x_{ik}+\gamma_{ik})2^{-1}(t-\beta) = -\zeta_{2k}, k = \overline{1, n_2}$$
$$x_{3k} - \gamma_{3k} + (x_{2k}+\gamma_{2k})2^{-1}(t-\beta) + 12^{-1}(x_{1k}-\gamma_{1k})(t-\beta)^2 = -\zeta_{3k},$$
$$k = \overline{1, n_3}$$
$$x_{4k} - \gamma_{4k} + (x_{3k}+\gamma_{3k})2^{-1}(t-\beta) + 10^{-1}(x_{2k}-\gamma_{2k})(t-\beta)^2$$
$$120^{-1}(x_{1k}+\gamma_{1k})(t-\beta)^3 = -\zeta_{4k}, k = \overline{1, n_4}$$

при $k = 1, x_{11} = 0,\ \gamma_{11} = 0. \beta = \beta, \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_4), \zeta_{jk} \in R^{n_j}, j = \overline{1,4}, k = \overline{1, n_j}$.

$$\tilde{A}\mu(t,\xi) = 2M_q\pi^{-\frac{n_0}{2}} \int\limits_0^t (t-\beta)^{-\sum_{j=1}^4 (2j-1)n_j 2^{-1}}\, d\beta \int_{R^{n_0-1}} \exp\{-\frac{\zeta_1'^2}{4(t-\beta)}$$

$$-\frac{3\zeta_2^2}{(t-\beta)^3}-\frac{180\zeta_3^2}{(t-\beta)^5}-\frac{25200\zeta_2^2}{(t-\beta)^7}\}[-\frac{3\zeta_{21}}{(t-\beta)^2}-\frac{30\zeta_{31}}{(t-\beta)^3}-\frac{420\zeta_{41}}{(t-\beta)^4}]d\zeta'$$

$$\int_{R^{n_0-1}}\exp\{-i(x',\zeta')\}\mu\,(\beta,Q'(t-\beta,x',\zeta'))dx',$$

де $Q'(t-\beta,x',\zeta')=(Q_1'(t-\beta,x',\zeta'),Q_2(t-\beta,x',\zeta'),\ Q_3(t-\beta,x',\zeta'),$ $Q_4(t-\beta,x',\zeta')$.

$$Q_{1k}(t-\beta,x',\zeta')=x_{1k}+\zeta_{1k},k=\overline{2,n_1},x_{11}=0,\zeta_{11}=0.$$

$$Q_{2k}(t-\beta,x',\zeta')=x_{2k}+\zeta_{2k}+2^{-1}(2x_{1k}+\zeta_{1k})(t-\beta),k=\overline{1,n_2},$$

$$Q_2(t-\beta,x',\zeta')=x_{3k}+\zeta_{3k}+2^{-1}(2x_{2k}+\zeta_{2k})(t-\beta)+12^{-1}(t-\beta)^2$$

$$(2x_{1k}+4^{-1}\zeta_{1k}(t-\beta)-12^{-1}\zeta_{1k}(t-\beta)^2),\qquad k=\overline{1,n_3},$$

$$Q_{4k}(t-\beta,x',\zeta')=x_{4k}+\zeta_{4k}+2^{-1}(2x_{3k}+\zeta_{3k})+2^{-1}x_{2k}(t-\beta)^2+$$

$$\frac{3}{20}\zeta_{2k}(t-\beta)^2+\frac{(t-\beta)^3x_{1k}}{6}+\frac{(t-\beta)^3\zeta_{1k}}{24},k=\overline{1,n_4},x_{11}=0,\zeta_{11}=0.$$

$(x_j,\zeta_j)=\sum_{k=1}^{n_j}x_{jk}\zeta_{jk}$, $(x',\zeta')=(x_1',\zeta_1')+(x_2,\zeta_2)+(x_3,\zeta_3)+(x_4,\zeta_4)$.

Обчислимо перетворення Фур'є по x' від $\mu(\beta,Q(t-\beta,x',\zeta)$ і по ζ', зінтегрувавши частинами по $\zeta_{j1},j=\overline{2,4}$, одержимо

$$\tilde{A}\mu(t,\xi')=i\pi^{-\frac{n_0}{2}}\int_0^t\tilde{\mu}\big(\beta,s'(t-\beta,\xi')\big)\exp\{-\sum_{k=1}^{n_4}[60^{-2}28^{-1}\,(t-\beta)^7\xi_{4k}^2$$

$$+720^{-1}$$

$$(t-\beta)^5(\xi_{3k}-2^{-1}(t-\beta)\xi_{4k})^2+12^{-1}(t-\beta)^3(\xi_{2k}-2^{-1}(t-\beta)\xi_{3k}$$

$$+24^{-1}$$

$$(t-\beta)^3\xi_{4k})^2]-\sum_{k=n_4+1}^{n_3}[720^{-1}(t-\beta)^5\,\xi_{3k}^2+12^{-1}(\xi_{2k}-2^{-1}(t-\beta)\xi_{3k})^2$$

$$(t-\beta)^3+(t-\beta)(\xi_{1k}-2^{-1}(t-\beta)\xi_{2k}+6^{-1}(t-\beta)^2\xi_{3k})^2]-$$

$$\sum_{k=n_3+1}^{n_2}[12^{-1}(t-\beta)^3\xi_{2k}^2+(t-\beta)(\xi_{1k}-2^{-1}(t-\beta)\xi_{2k})^2]-$$

$$\sum_{k=n_2+1}^{n_1}(t-\beta)\xi_{2k}^2\}[(\xi_{21}-2^{-1}(t-\beta)\xi_{31}+20^{-1}(t-\beta)^2 3\xi_{41})(t-\beta)+$$

$$\xi_{41}(t-\beta)+(t-\beta)^2(\xi_{31}-2^{-1}(t-\beta)\xi_{41})]d\beta,\qquad(27)$$

де $\xi_{11}=0$,

$$s_{1k}=\begin{cases}\sum_{j=1}^{4}\xi_{jk}\,(\beta-t)^{j-1}(j-2)^{-1},1\le k\le n_4,\\ \sum_{j=1}^{3}\xi_{jk}\,(\beta-t)^{j-1}(j-1)^{-1},n_4+1\le k\le n_3,\\ \xi_{2k}-(t-\beta)\xi_{3k},n_3+1\le k\le n_2,\\ \xi_{1k},n_2+1\le k\le 2,\end{cases}$$

$$s_{2k} = \begin{cases} \sum_{j=2}^{4} \xi_{jk}\,(\beta - t)^{j-2}(j-2)^{-1}, 1 \le k \le n_4, \\ \xi_{2k} - (t-\beta)\xi_{3k}, n_4 + 1 \le k \le n_3, \\ \xi_{2k}, n_3 + 1 \le k \le n_2, \end{cases}$$

$$s_{3k} = \begin{cases} \xi_{3k} - (t-\beta)\xi_{4k}, 1 \le k \le n_4, \\ \xi_{3k}, n_4 + 1 \le k \le n_3, \end{cases}$$

$$s_{4k} = \xi_{4k}, 1 \le k \le n_4.$$

Із (27) одержимо оцінку

$$\left|\tilde{A}\mu(t,\xi')\right| \le C \sup_{(t,\xi)} |\tilde{\mu}(t,\xi')| T^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^\infty (\exp\{-\tau^3\} + T\exp\{-\tau^5\} + T^2\exp\{-\tau^7\})d\tau. \qquad (28)$$

Знайшовши норму оператора $\tilde{A}\mu(t,\xi')$, яка виражається через перетворення Фур'є, а це і є нормою для $\mu(t,x')$.

Вибравши T можна отримати оцінку

$$\|A\| \le \varepsilon \|\mu(t,x')\|, \quad 0 < \varepsilon < 1. \qquad (29)$$

Згідно з умовами теореми можна показати, що $u_1(t,x,0,z) \in \tilde{C}_{2+v}, 0 < \gamma < 1 u_1(t,x,0,z) \in \tilde{C}_3, \varphi(t,R') \in \tilde{C}_3$.

Висновки. Враховуючи замкнутість оператора A, отримуємо, що він відображає повний банаховий простір $\tilde{C}_3$ в себе. Вибравши T мінімальним, із оцінок (25), (29) одержимо область по t в якій відображення A буде стиснутим в $\tilde{C}_3$. Оскільки по кожній лінії по t можна довести єдиність і існування розв'язку $\mu(t,x')$ для інтегрального рівняння, то його можна продовжити по неперервності на заданий проміжок $[0,T]$. Звідси отримаємо розв'язність інтегрального рівняння в областіП.

Результати досліджень можуть бути поширені на вироджені параболічні рівняння другого порядку з довільною кількістю груп виродження параболічності на випадок, коли коефіцієнти залежать від усіх змінних, а також на випадок систем рівнянь.

Література

1. Weber M. The fundamental solution of degenerate partial differential equation of parabolic type. Trans. Amer. Math. Soc. 1951, 71 (1), 24-37. doi: 10.1090/S0002-9947-1951-0042035-0.
2. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Malytska H. P. A modified Levi method: development and application // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. – 1998. – № 5. – P. 14–19.
3. Malytska A.,Burtnyak, I.V. On the Fundamental Solution of the Cauchy Problem for Kolmogorov Systems of the Second Order.Ukrainian Mathematical Journal. Volume 70, Issue 8, 1 January 2019, 1275-1287. doi: 10.1007/s11253-018-1568-y.
4. Eidelman S. D. Parabolic systems. – Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969. – 475 p.

5. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. – xiv+347 p.
6. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc.: Birkhauser, 2004. – IX. 387 p. doi: 10.1007/978-3-0348-7844-9.
7. Burtnyak, I.V. Malytska A. Application of the spectral theory and perturbation theory to the study of Ornstein-Uhlenbesck processes. Carpathian Math. Publ. 2018, 10 (2), 273–287. doi:10.15330/cmp.10.2.273-287. doi:10.15330/cmp.10.2.273-287.
8. Polidoro S. On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov–Fokker–Planck type // Le Mathematiche. – 1994. – 49. – P. 53–105.
9. Malyts'ka, G.P. On the maximum principle for ultraparabolic equations. *UkrMath J. – 1996,* **48 (2)**, 220–227. doi: 10.1007/BF02372047

Стаття надійшла до редакційної колегії 15.10.2025 р.
Прийнято до друку 17.10.2025 р.

DIRICHLET PROBLEM IN A HALF-SPACE FOR EQUATIONS OF THE DIFFUSION TYPE WITH INERTIA

I. V. Burtniak, A. P. Malytska
Vasyl Stefanyk Carpathian National University; 76019, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko Str.15; e-mail: ivan.burtniak@cnu.edu.ua

The article investigates the first boundary value problem in a half-space for a diffusion-type equation with inertia, where inertia depends on four groups of variables, with parabolic degeneracy and a certain number of variables subordinate to each group. To establish the existence of solutions to boundary value problems, the limit transition and asymptotic expansion of the equation are used. The explicit form of the fundamental solution of the Cauchy problem and the properties of its derivatives for a degenerate parabolic equation are also used. Using the method of potentials, the first boundary value problem in a half-space is reduced to solving the corresponding singular integral equation in classes of exponentially decreasing differential functions, for which its integral operator serves as a compression operator for small t. The uniqueness of the solution of the first boundary value problem in a half-space follows from the maximum principle in classes of bounded functions.

Key words: *diffusion-type equations, potential, Poisson integral, degenerate parabolic equations, Dirichlet problem, diffusion processes.*