

МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.555

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-9-14

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ L -ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ ЦІЛИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ГОЛЬДБЕРГА-СТРЕЛІЦА

А.І. Бандура¹, С.І. Дубей²

¹ Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу

76019, вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, Україна;

² Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, вул. Університетська, 1, Львів, Україна;

e-mail: andriykopanytsia@gmail.com, mazorchuk@gmail.com

Для деякого лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку доведено обмеженість L -індексу за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ усіх його цілих розв'язків від двох змінних з обмеженою кратністю нульових точок. Функція L задається як модуль добутку похідної за напрямком $\mathbf{b}$ від функції zw на функцію $l(zw)$, а цілий розв'язок зображається через добуток показникової функції e^z та довільної цілої функції $f(zw)$ такої, що $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ має обмежений l -індекс.

Ключові слова: цілий розв'язок, обмежений індекс за напрямком, лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку.

1. Вступ

Наведемо необхідні означення. Ціла функція $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ називається ([6, 3]) *функцією обмеженого L -індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$* , якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m!L^m(z)} \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k!L^k(z)} : 0 \leq k \leq m_0 \right\}, \quad (1)$$

де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z)$, $\partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z))$, $k \geq 2$.

Найменше $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається *L -індексом за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ цілої функції $F(z)$ та позначається через $N_{\mathbf{b}}(F, L) = m_0$. Якщо $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$, $L = l$, $F = f$, то отримаємо означення обмеженого l -індексу для цілої функції однієї комплексної змінної та $N(f, l) = N_1(f, l)$.*

Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ та додатної неперервної функції $L: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\lambda(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \sup_t \left\{ \frac{L(z + t\mathbf{b})}{L(z)} : |t| \leq \frac{\eta}{L(z)} \right\}.$$

Через $Q_{\mathbf{b}}^{\eta}$ позначимо клас функцій L таких, що $\lambda(\eta)$ скінченне для будь-якого $\eta > 0$. Також використовуємо позначення $Q = Q_1^1$ для класу додатних неперервних функцій $l(z)$ при $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{b} = 1$, $n = 1$, $L \equiv l$.

2. Основний результат

В аналітичній теорії диференціальних рівнянь відомо, що кожний цілий чи мероморфний розв'язок алгебраїчного диференціального рівняння першого порядку на комплексній площині має скінченний порядок зростання. Водночас такий факт не справджується для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Найпростіший приклад такого рівняння у свій час навів А.А. Гольдберг у [5]

$$z_1 \frac{\partial w}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial w}{\partial z_2} = 0.$$

Його загальний цілий розв'язок задається $w = f(z_1 z_2)$, де $f(u)$ — довільна ціла функція від однієї комплексної змінної.

У цій статті ми розглянемо дещо загальніше рівняння, яке наводиться також у монографії [9, с.413], як приклад рівняння, цілі розв'язки якого можуть бути нескінченного порядку і до якого не можна застосувати теорію, розроблену Ш. Стреліцем на основі методу Вімана-Валірона. Нещодавно [4], було знайдено достатні умови обмеженості L -індексу за напрямком для цілих розв'язків хвильового рівняння та сформульовано відкриту проблему про обмеженість індексу за напрямком цілих розв'язків задачі Коші для рівняння теплопровідності, заданих перетворенням Фур'є.

Теорема 2.1. *Нехай $l : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $l \in Q$, а $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l -індексу. Кожний цілий розв'язок $u = u(z, w)$ рівняння*

$$z \cdot u'_z - w \cdot u'_w = z \cdot u \quad (2)$$

має обмежений L -індекс за напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, де $u = f(z \cdot w)e^z$, $L(z, w) = \max\{1, |b_1 w + b_2 z|\}l(z \cdot w)$.

Доведення. Ш. Стреліц [9, с.413] вказав, що рівняння (2) має загальний розв'язок вигляду

$$u = f(z, w)e^z, \quad (3)$$

де f — довільна ціла функція від двох змінних. Водночас, він зазначив, що таке рівняння має цілі трансцендентні розв'язки нескінченного порядку. Для того, щоб їх отримати, досить для довільної функції u у розв'язку підібрати функцію f нескінченного порядку. Ш. Стреліц побудував теорію Вімана-Валірона для цілих функцій від декількох комплексних змінних у своїй монографії та застосовував її до вивчення цілих розв'язків рівнянь з частинними похідними. Він зазначив, що до рівняння (2) ця теорія не застосовна, бо однорідна форма, що відповідає йому, перетворюється в нуль. Тому дослідимо його цілі розв'язки з використанням поняття обмеженості індексу за напрямком. Для цього підставимо у рівняння (2) знайдений Стреліцом загальний розв'язок (3) та його частинні похідні

$u'_z(z, w) = f'_z(z, w) \cdot e^z + f(z, w) \cdot e^z$, $u'_w(z, w) = f'_w(z, w) \cdot e^z$. Дістанемо

$$z \cdot (f'_z(z, w) \cdot e^z + f(z, w) \cdot e^z) - w \cdot f'_w(z, w) \cdot e^z = z \cdot f(z, w) \cdot e^z.$$

Поділивши на e^z , матимемо $z \cdot f'_z(z, w) + z \cdot f(z, w) - w \cdot f'_w(z, w) = z \cdot f(z, w)$. Після спрощення остаточно отримуємо таке рівняння:

$$z \cdot f'_z(z, w) - w \cdot f'_w(z, w) = 0.$$

Відповідне рівняння було, зокрема, розглянуте А.А. Гольбергом [5]. Він вказав, що розв'язок такого рівняння має вигляд $f = f(z \cdot w)$, де $f(u)$ — довільна ціла функція від однієї комплексної змінної. Для такої функції $f(z \cdot w)$ в [6] було доведено обмеженість L -індексу за кожним напрямком $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, де $L(z, w) = (|z| + |w| + 1)l(z \cdot w)$, а $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l -індексу. Водночас, у [7] було доведено таке твердження

Лема 2.1 ([7]). Нехай $l \in \mathcal{Q}$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ціла функція обмеженого l -індексу, $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ціла функція, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Вважаємо, що $l(w) \geq 1$, $w \in \mathbb{C}$, та $L \in \mathcal{Q}_{\mathbf{b}}^n$ при $L(z) = \max\{1, |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|\}l(\Phi(z))$ і для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та $k \in \{1, 2, \dots, N(f, l) + 1\}$ маємо

$$|\partial_{\mathbf{b}}^k \Phi(z)| \leq K(l(\Phi(z)))^{1/(N(f, l) + 1)} |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^k, \quad (4)$$

де $K \geq 1$ — стала. Тоді ціла функція $F(z) = f(\Phi(z))$ має обмежений L -індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

У лемі 2.1 покладемо $\Phi(z, w) = z \cdot w$, отримаємо $\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z) = b_1 w + b_2 z$, $\partial_{\mathbf{b}}^2 \Phi(z) = 2b_1 b_2$, $\partial_{\mathbf{b}}^3 \Phi(z) = 0$ при $k \geq 3$. Тому нерівність (4) буде виконуватися для всіх k . Отже, за лемою 2.1 функція $f(z \cdot w)$ має обмежений L -індекс за кожним напрямком $\mathbf{b}$ при $L(z, w) = l(z \cdot w) \max\{1, |b_1 w + b_2 z|\}$. Водночас, добуток цілих функцій обмеженого L -індексу за напрямком також буде функцією з цього ж класу (див. [1]), тому функція $u = f(z, w)e^z$ матиме обмежений L -індекс за напрямком $\mathbf{b}$. $\square$

Подібну задачу можна розглядати не тільки у класі цілих розв'язків рівняння (2), а й у класі аналітичних в одиничній кулі розв'язків, використовуючи результати з [2]. Ще одна особливість рівняння (2) полягає в тому, що його ліву частину можна розглядати як похідну за змінним напрямком, в даному випадку $(z, -w)$, а тоді застосувати результати про властивості функцій обмеженого індексу за репером, тобто змінним напрямком з [8]. Це, у свою чергу, дозволить вивчати крайові задачі, що містять похідні за нормаллю до поверхні, тобто, по суті, похідні за змінним напрямком.

Подяки. Дослідження першого автора було профінансовано Національним фондом досліджень України, 2023.04/0160, 0124U003748.

References

1. Бандура А. Добуток двох цілих функцій обмеженого L -індексу за напрямком є функцією з того ж класу // Буковин. матем. журн. – 2016. – Т. 4 №1-2. – С. 8–12.
2. Bandura A., Skaskiv O. Functions Analytic in the Unit Ball Having Bounded L -Index in a Direction // Rocky Mountain J. Math. – 2019. – V. 49, no.4. – P. 1063–1092 (2019). <https://doi.org/10.1216/RMJ-2019-49-4-1063>
3. Bandura A.I., Skaskiv O.B. Boundedness of L -index in direction of functions of the form $f(\langle z, m \rangle)$ and existence theorems. // Mat. Stud. – 2014. – V. 41, no. 1. – P. 45–52. <https://doi.org/10.30970/ms.41.1.45-52>
4. Bandura A. On the functions related with the analytic solutions of the Cauchy problem for wave and heat equation // Precarpathian bulletin of the Schevchenko Scientific Society. Number. – 2024. – №19(73). – P. 9-17. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19\(73\)-9-17](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2024-19(73)-9-17)
5. Goldberg A. On the growth of entire solutions of algebraic differential equations // Lith. Math. J. – 2005. – V. 45, no. 1. – P. 44–49. <https://doi.org/10.1007/s10986-005-0005-8>
6. Бандура А., Скасків О.Б., Цілі функції обмеженого і необмеженого індексу за напрямком // Мат. Студ. – 2007. – Т. 27, №2. – С. 211–215. <https://doi.org/10.30970/ms.27.2.211-215>

7. Bandura A.I., Salo T.M., Skaskiv O.B. Note on composition of entire functions and bounded L -index in direction // Mat. Stud. – 2021. – V. 55, no. 1. – P. 51–56. <https://doi.org/10.30970/ms.55.1.51-56>
8. Bandura A.I., Skaskiv O.B., Local properties of the entire functions of bounded index in a frame // Ukr. Math. J. – V. 74, no. 4. – P.519–531. <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02080-8>
9. Strelitz Sh. I. Asymptotic properties of analytical solutions of differential equations. Vilnius: Mintis, 1972.

Стаття надійшла до редакційної колегії 30 травня 2025 року

ON THE BOUNDEDNESS OF THE L -INDEX IN DIRECTION OF ENTIRE SOLUTIONS OF THE GOLDBERG-STRELITZ EQUATION

A.I. Bandura¹, Dubei S.I.²

¹ *Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
76019, 15 Karpatska street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;*

² *Ivan Franko National University of Lviv;
79000, 1 Universytetska street, Lviv, Ukraine;
e-mail: andriykopanytsia@gmail.com, mazorchuk@gmail.com*

For some linear first-order partial differential equation there is proved the boundedness of the L -index in the direction $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ of all its entire bivariate solutions with bounded multiplicity of zero points. The function L is defined as the modulus of the product of the derivative in the direction $\mathbf{b}$ of the function zw on the function $l(zw)$, and an entire solution is represented by the product of the exponential function e^z and an arbitrary entire function $f(zw)$ such that $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ has bounded l -index.

Key words: *entire solution, bounded index in direction, linear first-order partial differential equation.*