

УДК 539.375

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-149-158

ЗГИН ПОПЕРЕЧНО НЕОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ КОЛІНЕАРНИХ КОНТАКТНИХ ТРІЩИН

В. М. Петращук

*Лабораторія моделювання демпфуючих систем Інституту
прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України;*

вул. Микитинецька, 3, м.Івано-Франківськ, 76002, Україна

e-mail: vpetrashchuk.academic@gmail.com

Розглянуто задачу згину функціонально градієнтної пластини з періодичною системою колінеарних наскрізних тріщин з урахуванням контактної взаємодії їх берегів. На основі класичної теорії згину пластин Кірхгофа та спеціальної моделі контакту вздовж лінії, що дозволяє усунути кінематичну суперечність взаємного проникнення берегів тріщини, сформульовано крайову задачу для пари бігармонічних рівнянь із взаємопов'язаними умовами на розрізах. Методом сингулярних інтегральних рівнянь з періодичним ядром Гільберта побудовано аналітичний розв'язок задачі в замкнутій формі. Детально досліджено вплив профілю неоднорідності матеріалу та взаємного розташування тріщин на коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів, а також на величину граничного навантаження, визначену за енергетичним критерієм руйнування. Проведено числовий аналіз для конкретного випадку неоднорідності з квадратичним розподілом модуля пружності по товщині пластини, описаним поліномом Лежандра другого порядку, який моделює як пластини з жорсткішою периферією, так і з жорстким осердям.

Ключові слова: *функціонально градієнтна пластина, періодична система тріщин, контакт берегів, метод сингулярних інте-*

гральних рівнянь, коефіцієнти інтенсивності, граничне навантаження.

1. Вступ

Функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) набувають широкого застосування в сучасній техніці завдяки можливості оптимізації властивостей конструкцій. Особливо актуальними є пластини з градієнтом властивостей по товщині, які використовуються в аерокосмічній промисловості, енергетиці та біомедицині [1,2]. Водночас експлуатаційні навантаження та технологічні дефекти можуть призводити до появи тріщин, поведінка яких у неоднорідних матеріалах інакша, ніж у однорідних [3].

Для згину пластин характерним є нерівномірний розподіл напружень по товщині з різними знаками обох біч серединної поверхні. У зоні стиску поверхні тріщини можуть взаємодіяти між собою. Це явище слід обов'язково враховувати для отримання коректних оцінок напружено-деформованого та граничного стану тонкостінних елементів конструкцій. Класична теорія згину пластин без урахування контакту дає кінематично суперечливі результати – взаємне проникнення берегів тріщини в зоні стиску [4, 5]. Для усунення цієї суперечності в працях [6, 7] запропоновано модель контакту вздовж лінії в рамках класичної теорії Кірхгофа. Для однорідних пластин з системами тріщин періодичні контактні задачі вивчалися в працях [8–12].

Водночас вплив функціональної градієнтності на поведінку контактних тріщин, особливо для періодичних систем дефектів, залишається недостатньо дослідженим. Метою даної роботи є дослідження напружено-деформованого стану та граничної рівноваги поперечно неоднорідної пластини з періодичною системою колінарних тріщин з урахуванням контактної взаємодії їх берегів.

2. Постановка задачі та модель контакту

Розглянемо нескінченну пластину $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [-h, h]$, виготовлену з функціонально градієнтного матеріалу з модулем пружності $E(z)$,

який симетрично змінюється по товщині, та сталим коефіцієнтом Пуассона ν . Пластина послаблена періодичною системою прямо-лінійних наскрізних тріщин завдовжки $2l$, розташованих уздовж прямої з періодом d .

Для опису часткового закриття тріщин в рамках теорій плоского напруженого стану та згину за Кіргхофом використовуємо модель контакту вздовж лінії [6, 7]. Суть моделі полягає в наступному: через втрату антисиметрії відносно серединної поверхні напружений стан пластини з контактною тріщиною подається як суперпозиція складових згину та плоского напруженого стану. Неповне по товщині контакт берегів розрізу інтерпретуємо як змикання його країв у лицьовій поверхні пластини.

Напружено-деформований стан пластини описується системою бігармонічних рівнянь:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L, \quad (1)$$

де φ – функція напружень Ері для плоского напруженого стану, w – прогин пластини, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – двовимірний оператор Лапласа, $L = (-l + kd, l + kd)$, $k \in \mathbb{Z}$ – сукупність розташування тріщин.

На берегах тріщин формулюємо умови гладкого одностороннього контакту:

$$[u_y] = h|[\vartheta_y]| > 0, \quad M_y = hN_y \operatorname{sgn}[\vartheta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L, \quad y = 0. \quad (2)$$

На нескінченності задаємо умови рівномірного згину:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = 0, \quad M_y = m, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

У формулах (2), (3) квадратні дужки позначають стрибок відповідної величини при переході через лінію тріщини; u_y – нормальне переміщення, ϑ_y – кут повороту нормалі; N_{ij} – мембранні зусилля, M_{ij} – згинальні моменти.

3. Інтегральні рівняння задачі

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) застосовуємо метод сингулярних інтегральних рівнянь. Використовуючи фундаментальні розв'язки бігармонічних рівнянь та враховуючи періодичність задачі, записуємо інтегральні подання для зусиль та моментів на лінії тріщини через похідні від невідомих функцій стрибка [13, 14]:

$$\begin{aligned} N_y(x, 0) &= \frac{B}{4} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi - x)}{d} [u_y]'(\xi) d\xi, \\ M_y(x, 0) &= m - \frac{Da}{4} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi - x)}{d} [\vartheta_y]'(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$B = \int_{-h}^h E(z) dz, \quad D = \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-h}^h E(z) z^2 dz, \quad a = (3 + \nu)(1 - \nu).$$

Вважаємо, що стрибок $[\vartheta_y]$ є знакосталим на всій довжині тріщини. Тоді після підстановки виразів (4) в крайові умови (2) отримуємо інтегральне рівняння з сингулярним ядром Гільберта:

$$\frac{Da(1 + \kappa)}{4\pi} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi - x)}{d} [\vartheta_y]'(\xi) d\xi = m, \quad x \in (-l, l), \quad (5)$$

де

$$\kappa = \frac{Bh^2}{Da} = \frac{(1 + \nu)h^2}{3 + \nu} \frac{\int_{-h}^h E(z) dz}{\int_{-h}^h E(z) z^2 dz}.$$

4. Аналітичний розв'язок

Розв'язок інтегрального рівняння (4) має вигляд:

$$[\vartheta_y]'(x) = \frac{4m}{Da(1 + \kappa)} \frac{\operatorname{tg}(\pi\lambda x/l)}{\cos(\pi\lambda) \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi\lambda) - \operatorname{tg}^2(\pi\lambda x/l)}}, \quad (6)$$

де $\lambda = 2l/d \in [0, 1)$ – безрозмірний параметр, що характеризує взаємне розташування тріщин.

Інтегруючи вираз (6), знаходимо стрибок кута повороту нормалі:

$$[\vartheta_y](x) = -\frac{4m}{Da(1+\kappa)} \frac{1}{\pi\lambda} \operatorname{Atanh} \left[\cos(\pi\lambda) \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi\lambda) - \operatorname{tg}^2(\pi\lambda x/l)} \right].$$

Із кінематичної умови контакту знаходимо стрибок нормального переміщення:

$$[u_y](x) = \frac{4|m|h\kappa}{B(1+\kappa)} \frac{1}{\pi\lambda} \operatorname{Atanh} \left[\cos(\pi\lambda) \sqrt{\operatorname{tg}^2(\pi\lambda) - \operatorname{tg}^2(\pi\lambda x/l)} \right].$$

Контактна реакція на берегах тріщини:

$$N_y(x, 0) = -\frac{\kappa|m|}{h(1+\kappa)}.$$

5. Коефіцієнти інтенсивності та граничне навантаження

Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів характеризують сингулярність полів напружень поблизу вершин тріщин. З урахуванням контакту берегів

$$K_N = \frac{\kappa|m|\sqrt{\pi l}}{h(1+\kappa)} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\pi\lambda)}{\pi\lambda}}, \quad K_M = \frac{m\sqrt{\pi l}}{1+\kappa} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\pi\lambda)}{\pi\lambda}}.$$

Використовуючи енергетичний критерій руйнування для комбінованого навантаження:

$$\langle G \rangle = \frac{1}{(2h)^2 \langle E \rangle} \left(K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right) = 2 \langle \gamma_* \rangle,$$

де $\langle G \rangle$ – середній по товщині потік енергії у вершину тріщини, $\langle \gamma_* \rangle$ – середня питома поверхнева енергія, знаходимо граничне навантаження:

$$|m_*| = 2h^2 \sqrt{\frac{2\langle E \rangle \langle \gamma_* \rangle}{\pi l}} \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{\pi\lambda}{\operatorname{tg}(\pi\lambda)}}.$$

6. Приклад розрахунку для різних профілів неоднорідності

Нехай $E(z) = \langle E \rangle \left(1 + \varepsilon P_2\left(\frac{z}{h}\right) \right)$, де $P_2(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta^2 - 1)$ – поліном Лежандра другого порядку, а ε – безрозмірний параметр неоднорідності, який характеризує ступінь відхилення від однорідного матеріалу.

При $\varepsilon > 0$ маємо жорсткішу периферію – модуль пружності збільшується від серединної поверхні до лицьових поверхонь. Такий розподіл типовий для термобар'єрних покриттів та захисних елементів конструкцій. При $\varepsilon = 0$ отримуємо класичний випадок однорідної пластини. При $\varepsilon < 0$ маємо жорстке осердя – модуль пружності зменшується до периферії, досягаючи мінімуму на лицьових поверхнях. Такий розподіл може реалізовуватися в сендвіч-конструкціях та легких панелях. Варіювання параметра ε дозволяє моделювати широкий клас функціонально градієнтних матеріалів.

На рис. 1–3 подано основні результати розрахунків при $\nu = 0.3$ для трьох характерних випадків $\varepsilon = -0.5, 0, 0.5$.

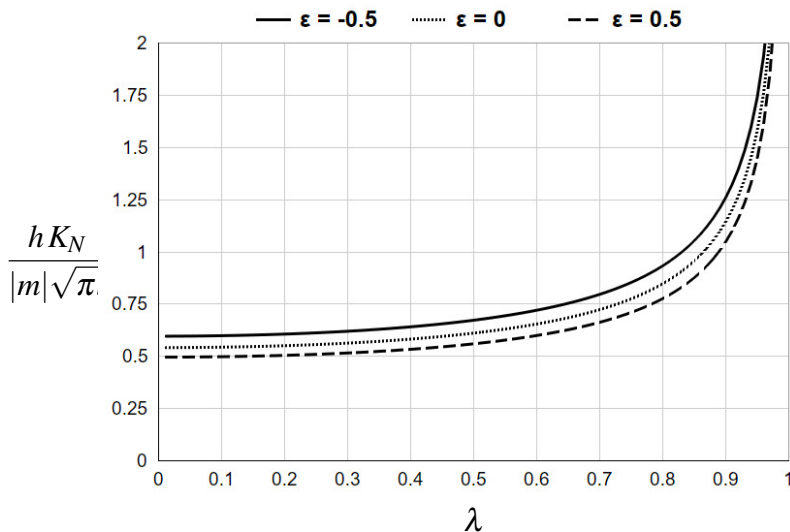


Рис. 1: Коефіцієнт інтенсивності зусиль для різних значень ε

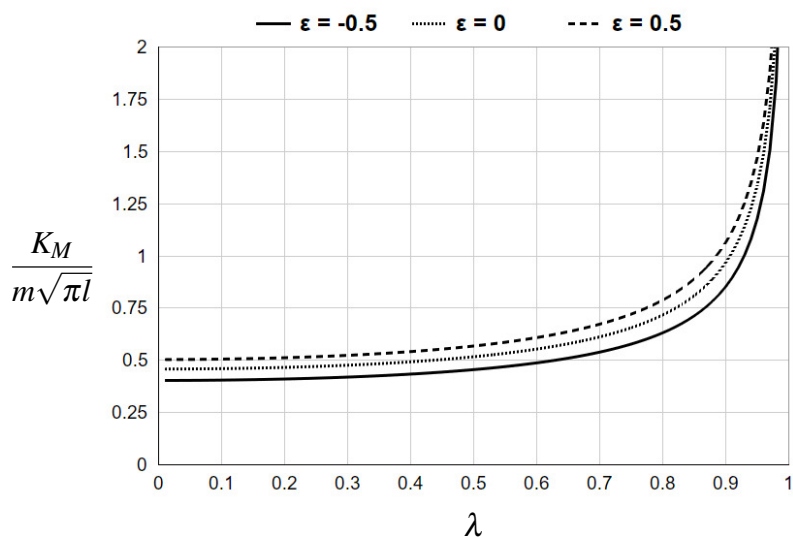


Рис. 2: Коефіцієнт інтенсивності моментів для різних значень ϵ

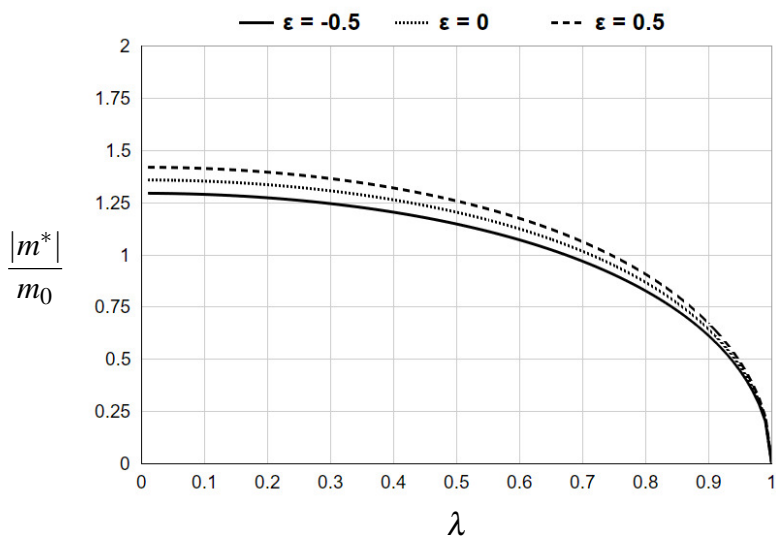


Рис. 3: Граничне навантаження для різних значень ϵ , $m_0 = 2h^2\sqrt{2\langle E\rangle\langle\gamma_*\rangle}/(\pi l)$

7. Висновки

- (1) Для 2D аналізу часткового закриття тріщин за згину неоднорідних по товщині пластин розвинуто модель контакту вздовж лінії. Ця модель дозволяє в рамках класичної теорії пластин адекватно описати складне явище контактної взаємодії берегів тріщин, яке в загальному випадку вимагає тривимірного аналізу.
- (2) Методом сингулярних інтегральних рівнянь побудовано аналітичний розв'язок задачі згину для періодичної системи колінеарних контактних тріщин. Отримання точного аналітичного розв'язку стало можливим завдяки особливій структурі періодичного ядра Гільберта.
- (3) Подано приклад обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів. Встановлено, що контакт берегів призводить до появи мембранних напружень навіть при чистому згині, що принципово змінює механізм руйнування.
- (4) З використанням енергетичного критерію руйнування встановлено залежність граничного навантаження від взаємного розташування тріщин. Показано, що зближення тріщин критично знижує несучу здатність конструкції.
- (5) Показано, що розрахункова міцність для тріснутої пластини з жорсткішим осердям є меншою, ніж для пластини з жорсткішою периферією. Цей неочевидний результат має важливе практичне значення для проектування функціонально градієнтних конструкцій і показує, що оптимальний розподіл властивостей суттєво залежить від типу дефектів.

Отримані результати можуть бути використані для оцінки міцності функціонально градієнтних конструкцій з дефектами типу тріщин.

Література

1. Suresh S., Mortensen A. Fundamentals of functionally graded materials. – London: IOM Communications Ltd, 1998. – 156 p.
2. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. Functionally graded materials: design, processing and applications. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 330 p.

3. Delale F., Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane // J. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50, No. 3. – P. 609–614.
4. Williams M. L. The bending stress distribution on the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. – 1961. – Vol. 28, No. 1. – P. 78–82.
5. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
6. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
7. Young M. J., Sun C. T. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution // Int. J. Fract. – 1992. – Vol. 55. – P. 81–93.
8. Шацкий И. П. Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70–75.
9. Шацкий И. П. Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, № 12. – С. 56–61.
10. Даляк Т., Перепічка В., Шацький І. Періодичні задачі контакту берегів тріщин при згині пластин // Машинознавство. – 2000. – № 4–5 (34–35). – С. 20–24.
11. Шацький І. П. Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62–64.
12. Даляк Т. М. Згин пластини з періодичною системою паралельних взаємнозміщених тріщин, береги яких контактують // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 115–117.
13. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Ростун М. Й. Гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з поверхневою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – Т. 43, № 3. – С. 5–11.
14. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 27.05.2025 р.

ON BENDING OF TRANSVERSELY INHOMOGENEOUS PLATE WITH PERIODIC SYSTEM OF COLLINEAR CONTACT CRACKS

V. M. Petrashchuk

*Laboratory of Damping Systems Modeling of Pidstryhach Institute for
Applied Problems in Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine;*

3 Mykytynets'ka str., Ivano-Frankivsk, 76002, Ukraine

e-mail: vpetrashchuk.academic@gmail.com

The bending problem of functionally graded plate with periodic system of collinear through cracks with contact interaction of their faces, which arises due to non-uniform stress distribution through the plate thickness, is considered. Based on the classical Kirchhoff plate bending theory and special contact model along a line, which allows to eliminate the kinematic contradiction of mutual penetration of crack faces, the boundary value problem for a pair of biharmonic equations with interrelated conditions on cuts is formulated. Using the method of singular integral equations with periodic Hilbert kernel, an exact analytical solution of the problem in closed form is constructed. The influence of material inhomogeneity profile and mutual arrangement of cracks on stress and moment intensity factors, as well as on limit load value determined by energy fracture criterion, is studied in detail. Numerical analysis is performed for the specific case of inhomogeneity with quadratic distribution of elastic modulus through the plate thickness, described by the second-order Legendre polynomial, which models both plates with stiffer periphery and with rigid core.

Key words: *functionally graded plate, periodic system of cracks, crack faces contact, method of singular integral equations, stress intensity factors, limit load.*