

УДК 622.691.4

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-187-207

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЕНЕРГОНОСІЇВ У СИСТЕМІ ПРОДУКУВАННЯ БІОГАЗУ

С. Я. Григорський, В. Б. Запихляк, В. М. Возний

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
тел. +38 (0342) 72-71-38; e-mail: stanislav.hryhorskyi@nung.edu.ua*

У статті розглядається актуальна проблема математичного моделювання фізичних властивостей енергоносіїв у системах виробництва біогазу із зернової барди. Ефективність біогазових технологій значною мірою залежить від точного проектування та експлуатації систем транспортування сировини та виробленого біогазу. Основною метою роботи є розроблення математичних моделей ключових фізичних властивостей (густини, динамічної в'язкості, коефіцієнта об'ємного розширення, питомої масової ізобарної теплоємності та коефіцієнта теплопровідності) зернової барди, промислових стоків та біогазу. Для зернової барди отримано комплексну модель густини у вигляді лінійної функції від температури та масової концентрації сухих речовин, тоді як динамічна в'язкість описана експоненційною залежністю, натуральний логарифм якої є кубічним поліномом. Розрахункові залежності для фізичних властивостей промислових стоків, наприкладі 4% розчину каустичної соди, встановлено у вигляді поліномів другого ступеня від температури, що з високою точністю апроксимують експериментальні дані. Запропоновано методику розрахунку ключових параметрів біогазу (густини та в'язкості) для гідравлічних розрахунків, що базується на його компонентному складі. Розроблені моделі є основою для проведення теплогідравлічних розрахунків, оптимізації проектування та експлуатації трубопровідних систем у біогазових установках, що сприяє підвищенню їх надійності, безпеки та економічної доцільності.

Ключові слова: енергоносії; біогаз; зернова барда; трубопровідний транспорт; математичне моделювання; густина; динамічна в'язкість; теплоємність; теплопровідність; коефіцієнт температурного розширення.

Вступ

У сучасному світі спостерігається зростаюча потреба в переході до відновлюваних джерел енергії як ключового елементу боротьби зі зміною клімату та забезпечення енергетичної безпеки. Серед перспек-

тивних альтернатив біогаз, що отримується з органічних відходів, зокрема сільськогосподарських залишків, харчових відходів, вирізняється своєю здатністю одночасно генерувати енергію та сприяти утилізації відходів, зменшуючи викиди парникових газів. Україна, маючи значний аграрний сектор, володіє суттєвим потенціалом для виробництва біогазу з різноманітної біомаси, включаючи зернову барду, яка є цінним побічним продуктом виробництва етанолу. Розвиток біогазових технологій в Україні не лише відповідає світовій тенденції, але й відкриває шлях до зміцнення енергетичної незалежності держави.

Енергетична криза та необхідність зменшення залежності від викопних палив ще більше підкреслюють актуальність досліджень у галузі біогазу в Україні. Ефективність та економічна доцільність виробництва біогазу значною мірою залежать від налагодженого транспортування як сировини до біогазової установки, так і виробленого біогазу до місця його використання або установки з підготовки до подачі в газотранспортну мережу.

Зернова барда, також відома як фуза, є залишком, що утворюється після процесу бродіння та дистиляції зерна у виробництві спирту, зокрема горілки [1]. Цей побічний продукт характеризується високим вмістом органічних твердих речовин та вологи [2]. Зазвичай, на кожен літр виробленого спирту, на підприємствах, що використовують мелясу, утворюється від 8 до 15 літрів барди [3], і очікується, що на підприємствах, що переробляють зерно, обсяги будуть подібними, що робить барду значним потоком відходів. Завдяки високому вмісту органічних речовин, барда є не лише екологічною проблемою щодо утилізації, але й цінним ресурсом для виробництва біогазу.

Значний обсяг барди, що утворюється в процесі виробництва алкоголю, підкреслює необхідність ефективних стратегій її управління, і виробництво біогазу є одним із потенційно важливих рішень для скорочення відходів та відновлення енергії. Такий підхід відповідає принципам циркулярної економіки, перетворюючи відхідний продукт на цінне джерело енергії. Високі обсяги виробництва алкоголю призводять до відповідно високих обсягів утворення барди, що створює значне навантаження на управління відходами. Виробництво біогазу пропонує життєздатний шлях для використання цієї барди, що узгоджується з цілями сталого розвитку шляхом зменшення відходів та генерації відновлюваної енергії.

У цьому контексті виробництво біогазу відіграє значну роль як технологія, що дозволяє перетворювати органічні відходи на цінне відновлюване паливо [1]. За оцінками, при виробництві біоетанолу методом сухого помелу приблизно третина сухої речовини зерна перетворюється на барду [2, 3]. Цей побічний продукт, що також утворюється на спиртових та етанольних заводах є цінною сировиною для виробництва біогазу [4]. Післяспиртова барда являє собою суспензію світло-

коричневого кольору, яка має запах зерна або іншої сировини [5]. Для подальшої переробки в біогаз барду можна використовувати як є, з вмістом сухої речовини 7-12%, або попередньо згущувати до 30% сухої речовини шляхом випарювання [6]. Переробка цього відходу в біогаз надає спиртовим заводам можливість замінити значну частину, а іноді й до 100% споживаного палива у котлах, що дозволяє знизити собівартість алкоголю та зменшити залежність від ринкових цін на традиційні енергоносії [5]. Отриманий біогаз, основною складовою якого є метан (55-75%) та вуглекислий газ (25-45%) [7], може використовуватися безпосередньо в котельнях або для виробництва електроенергії.

Ефективне транспортування післяспиртової барди від місця її утворення (спиртового заводу) до біогазової установки є критично важливим для економічної доцільності всього процесу. Часто для цього використовуються трубопровідні системи, які забезпечують безперервну та потенційно економічно вигідну доставку великих обсягів рідких відходів на значні відстані.

Математичне моделювання фізичних властивостей енергоносіїв, таких як зернова барда, промислові стоки та сам біогаз, є критично важливим етапом для успішного проектування та ефективної експлуатації біогазових установок. Точне визначення густини необхідне для розрахунку масових витрат, гідростатичного тиску в ємностях та потужності насосного обладнання. Моделювання динамічної в'язкості дозволяє коректно оцінити гідравлічні опори в трубопроводах, що безпосередньо впливає на вибір діаметрів труб та енергоспоживання при перекачуванні.

Знання коефіцієнта об'ємного розширення є важливим для врахування змін об'єму середовищ при коливаннях температури, а також при виконанні теплогідравлічних розрахунків із використанням відповідних критеріальних рівнянь (наприклад, число Грасгофа). Ізобарна теплоємність є ключовим параметром для теплових розрахунків, визначення енергетичного балансу процесів підігріву чи охолодження сировини та біогазу, а також для розрахунку ефективності теплообмінників. Адекватне моделювання коефіцієнта теплопровідності дозволяє точно розрахувати теплові втрати через стінки трубопроводів та обладнання, що впливає на загальну енергоефективність установки.

Вказані фізичні властивості слугують вихідними даними для проведення проектних та експлуатаційних теплогідравлічних розрахунків трубопровідних систем продукування біогазу. Неточність у визначенні цих параметрів може призвести до помилок у проектуванні, виборі неоптимального обладнання, збільшення експлуатаційних витрат та навіть до аварійних ситуацій. Таким чином, актуальність такого моделювання полягає у забезпеченні надійності, безпеки та економічної доцільності функціонування всієї системи продукування та транспортування біогазу.

Постановка задач дослідження

Основною метою роботи є розроблення математичних моделей фізичних енергоносіїв в системі продукування біогазу із зернової барди.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

- побувати математичні моделі основних фізичних властивостей зернової барди від температури та масової концентрації сухих домішок на основі результатів лабораторних досліджень. Це завдання включає аналіз результатів лабораторних досліджень, вибір адекватних апроксимуючих функцій та оцінку точності отриманих моделей;

- дослідити та систематизувати фізичні властивості типових промислових стоків, що продукуються у біогазових установках, з урахуванням їхнього хімічного складу та температурних режимів;

- розробити математичні моделі основних фізичних властивостей біогазу, що впливають на пропускну здатність та газодинамічні режими експлуатації таких газопроводів.

Математичне моделювання фізичних властивостей зернової барди

На основі протоколу експериментальних досліджень що проведені у спеціалізованій хімічній лабораторії, густина барди за температури $t = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ становить $\rho_t = 1025\text{ кг/м}^3$ (масовий вміст сухих речовин $g_c = 7\%$).

Для перерахунку густини барди на іншу масову концентрацію сухих речовин використовуємо формулу

$$\rho_{cm} = \frac{m_{cm}}{V_{cm}}, \quad (1)$$

де ρ_{cm} – густина барди, як відношення маси суміші m_{cm} до її об'єму V_{cm} за однакового значення тиску та температури

$$V_{cm} = V_c + V_p = \frac{m_c}{\rho_c} + \frac{m_p}{\rho_p}, \quad (2)$$

m_c , V_c , ρ_c – відповідно маса, об'єм та густина сухих речовин барди;

m_p , V_p , ρ_p – відповідно маса, об'єм та густина рідинної основи барди.

Запишемо величини масових часток сухої g_c та рідинної g_p основи

$$g_c = \frac{m_c}{m_{cm}}, \quad g_p = \frac{m_p}{m_{cm}}, \quad (3)$$

та співвідношення між ними

$$g_c + g_p = 1. \quad (4)$$

Після підстановки виразів (2)-(3) у формулу (1) із урахуванням формули (4) та виконанням відповідних математичних перетворень, отримуємо таку формулу

$$\frac{1}{\rho_{см}} = \frac{g_c}{\rho_c} + \frac{1-g_c}{\rho_p}. \quad (5)$$

Дану залежність можна переписати у такому вигляді:

- для базового (відомого) значення масової частки сухих речовин g_c та густини суміші $\rho_{см}$

$$\frac{1}{\rho_{см}} - \frac{1}{\rho_p} = g_c \cdot \left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_p} \right); \quad (6)$$

- для технологічно необхідного (невідомого) значення масової частки сухих речовин g'_c та густини суміші $\rho'_{см}$

$$\frac{1}{\rho'_{см}} - \frac{1}{\rho_p} = g'_c \cdot \left(\frac{1}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_p} \right). \quad (7)$$

Розділивши вираз (7) на (6) після математичних перетворень отримуємо формулу

$$\rho'_{см} = \left[\frac{1}{\rho_p} + \frac{g'_c}{g_c} \cdot \left(\frac{1}{\rho_{см}} - \frac{1}{\rho_p} \right) \right]^{-1}. \quad (8)$$

Оскільки відповідно до протоколу досліджень зернової барди масова частка порівнювалась з густиною водних розчинів цукрози, то за густину рідкої фази можна взяти густину води.

За стандартного атмосферного тиску ($p = 101,325 \text{ кПа}$) та температури $t = 25^\circ \text{C}$ густина води становить $\rho_p = 997,0 \text{ кг/м}^3$ [8].

З використанням формули (8) проводимо перерахунок густини барди $\rho_{см} = \rho_t = 1025 \text{ кг/м}^3$ за температури $t = 25^\circ \text{C}$ з вмістом домішок $g_c = 7\%$ на інші концентрації сухої речовини g'_c в діапазоні від 8 % до 13 %. Результати розрахунків заносимо в таблицю 1.

Відповідно до потоку експериментальних досліджень, відсутня інформація щодо зміни густини барди від температури. Для розв'язку цієї задачі використаємо методику [9], оскільки властивості зернової барди (густина та в'язкість) відповідають діапазонам зміни для нафти.

Таблиця 1. Результати розрахунку густини зернової барди за температури 25°C від концентрації сухих речовин

Найменування параметра	Числове значення параметра					
Масова концентрація сухих речовин g , %	8	9	10	11	12	13
Густина зернової барди ρ , кг/м ³	1029,1	1033,3	1037,5	1041,7	1046,0	1050,3

Густина рідини ρ_t за температури t (модель нестисливої рідини) визначається за формулою [9]

$$\rho_t = \rho_{15} \cdot \exp\left\{-\beta_{15} \cdot (t-15) \cdot \left[1 + 0,8 \cdot \beta_{15} \cdot (t-15)\right]\right\}, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad (9)$$

де ρ_{15} – густина рідини за температури 15 °С, кг/м³; t – температура рідини, °С; β_{15} – коефіцієнт об’ємного (температурного) розширення рідини за температури 15 °С,

$$\beta_{15} = \frac{K_0 + K_1 \cdot \rho_{15}}{(\rho_{15})^2} + K_2, \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad (10)$$

K_0 , K_1 , K_2 – числові коефіцієнти, що для значень густини ρ_{15} в діапазоні від 611,2 кг/м³ до 1163,8 кг/м³ становлять [9]: $K_0 = 613,9723$; $K_1 = K_2 = 0$.

У випадку заданої густини ρ_t за відомої температури t невідоме значення густини ρ_{15} визначається методом послідовних наближень за алгоритмом, що наведений нижче.

Приймаємо в першому наближенні $\rho_{15} = \rho_t$, та за формулою (10) обчислюємо коефіцієнт об’ємного розширення рідини β_{15} .

Далі за допомогою формули (9) знаходимо густину $\rho_{15(y)}$ у другому наближенні (уточнене значення), тобто

$$\rho_{15(y)} = \rho_t \cdot \exp\left\{\beta_{15} \cdot (t-15) \cdot \left[1 + 0,8 \cdot \beta_{15} \cdot (t-15)\right]\right\}, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (11)$$

Перевіряємо на виконання умову

$$\left|\rho_{15(y)} - \rho_{15}\right| \leq \delta\rho, \quad (12)$$

де $\delta\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$ – необхідна точність розрахунку густини ρ_{15} .

Якщо умова (12) не виконується, то приймаємо

$$\rho_{15} = \rho_{15(y)}, \quad (13)$$

та проводимо наступне наближення, розпочинаючи із визначення коефіцієнта температурного розширення β_{15} за виразом (10). Далі уточняється значення густини $\rho_{15(y)}$ за формулою (11) та перевіряється на виконання умова (12).

Розрахунки виконуються до тих пір, коли умова (12) буде виконана. В результаті останнє уточнене значення густини і буде необхідною величиною ρ_{15} .

За наведеним вище алгоритмом та даними табл. 1, виконано багатоваріантні розрахунки густини зернової барди за зміни температури із урахуванням масового вмісту сухих домішок. Результати розрахунків представлені у вигляді графічної залежності (рис. 1), на яку також нанесено лінії регресії, що відповідають фіксованому значенню масового вмісту сухих домішок.

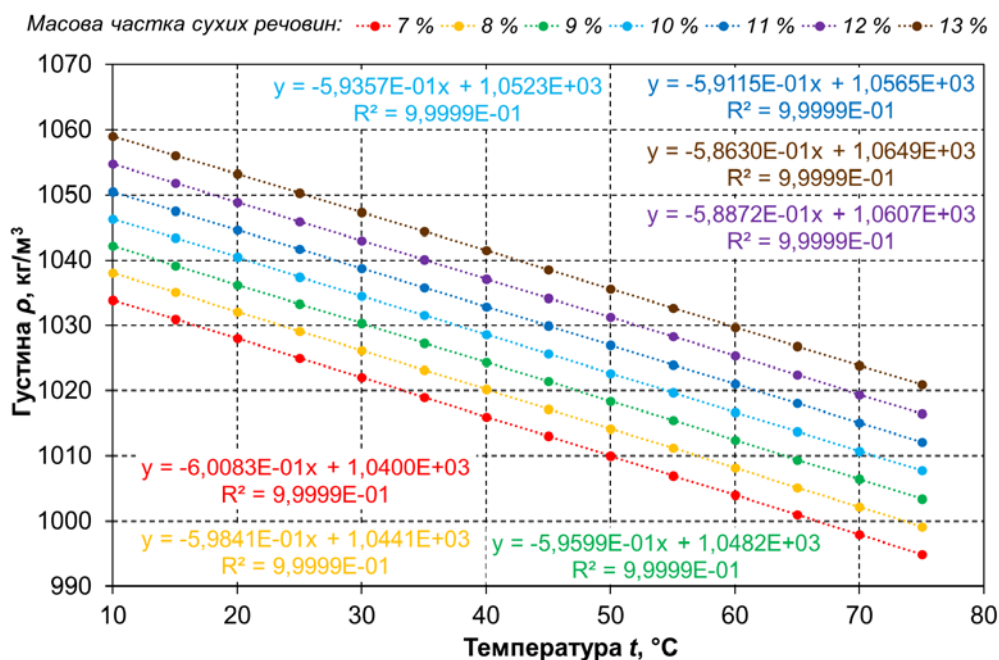


Рис. 1. Графік зміни густини зернової барди від температури та вмісту сухих речовин

З рис. 1 робимо висновок, що з високою точністю апроксимації (коефіцієнт детермінації математичних моделей практично рівний одиниці) для заданого діапазону температур густину барди від температури можна описати за допомогою полінома першого степеню

$$\rho_{t,g} = A(g) \cdot t + B(g), \quad (14)$$

де $A(g)$, $B(g)$ – відповідно лінійний коефіцієнт та вільний член в математичній моделі густини барди від температури, що залежать від масової концентрації сухих речовин.

Отримані значення коефіцієнтів (рис. 1) у формулі (14) заносимо в табл. 2. На основі даних табл. 2 будемо відповідний графік зміни цих коефіцієнтів від масової концентрації сухих речовин в зерновій барді (рис. 2).

Отже, в результаті отримано такі лінійні залежності від масової частки сухих речовин у зерновій барді для коефіцієнтів у формулі (14):

- для лінійного коефіцієнта

$$A(g) = 2,4216 \cdot 10^{-3} \cdot g - 0,61778, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}; \quad (15)$$

- для вільного члена

$$B(g) = 4,1532 \cdot g + 1010,9, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (16)$$

Таблиця 2. Коефіцієнти математичної моделі густини зернової барди від масового вмісту сухих речовин

Масова концентрація сухих речовин g , %	Лінійний коефіцієнт $A(g)$, $\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C})$	Вільний член $B(g)$, $\text{кг}/\text{м}^3$
7	-0,60083	1040,0
8	-0,59841	1044,1
9	-0,59599	1048,2
10	-0,59357	1052,3
11	-0,59115	1056,5
12	-0,58872	1060,7
13	-0,58630	1064,9

Тоді загальна математична модель густини для дослідного зразка зернової барди від температури (t , $^\circ\text{C}$) та масового вмісту сухих речовин (g , %) має такий вигляд:

$$\rho_{t,g} = (2,4216 \cdot 10^{-3} \cdot g - 0,61778) \cdot t + 4,1532 \cdot g + 1010,9, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (17)$$

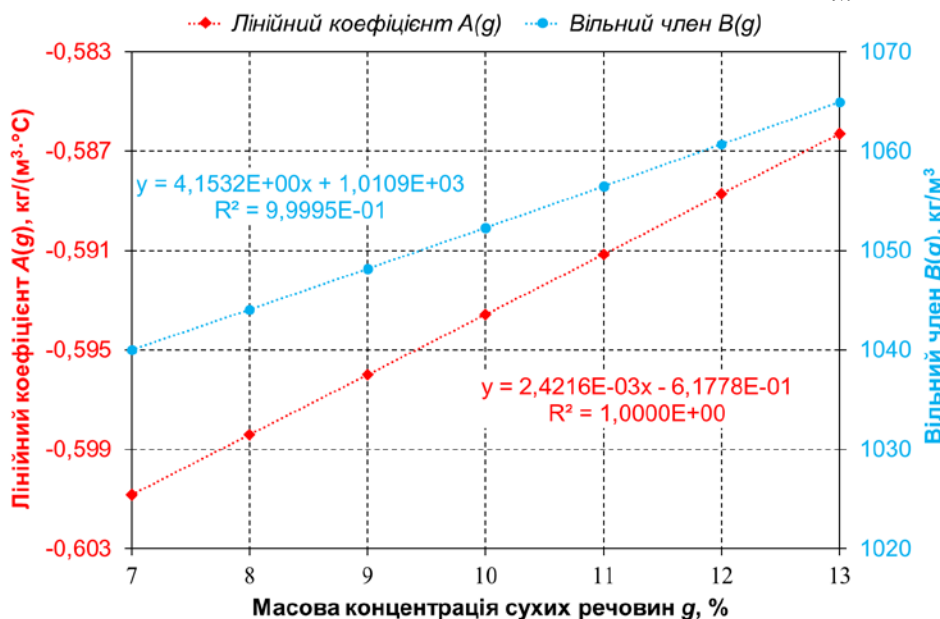


Рис. 2. Результати математичного моделювання коефіцієнтів аналітичної моделі (14) густини зернової барди

Коефіцієнт об'ємного (температурного) розширення визначається за формулою

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}, \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (18)$$

Після диференціювання виразу (17) отримуємо

$$\beta_{t,g} = \frac{0,61778 - 2,4216 \cdot 10^{-3} \cdot g}{(2,4216 \cdot 10^{-3} \cdot g - 0,61778) \cdot t + 4,1532 \cdot g + 1010,9}, \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}. \quad (19)$$

Зазначимо, що формули (17) та (19) справедливі для такого діапазону параметрів, що в неї входять:

- температура від 10 °С до 75 °С;
- масова концентрація сухих речовин від 7 % до 13 %.

Тепер перейдемо до математичного моделювання динамічної в'язкості зернової барди. Відповідно до результатів лабораторних досліджень за допомогою ротаційного віскозиметра значення в'язкості барди від температури та вмісту сухих речовин наведено в табл. 3.

З аналізу даних табл. 3 робимо висновок, що абсолютна в'язкість досліджуваної рідини змінюється стрімко за нелінійним законом при зростанні вмісту сухих речовин. Тому для математичного моделювання даної фізичної властивості будуюмо графічну залежність натурального логарифма динамічної в'язкості барди від масової частки сухої речовини (рис. 3).

Таблиця 3. Результати лабораторних вимірювань динамічної в'язкості зернової барди за допомогою ротаційного віскозиметра

Масова частка сухих речовин g , %	Динамічна в'язкість η за температури 20 °С, мПа·с	Динамічна в'язкість η за температури 40 °С, мПа·с
7,00	48,4	35,6
9,05	180	92,4
10,98	744	380
13,00	9380	4940

За допомогою функції «Trendline» в MS Excel отримано таку аналітичну модель динамічної в'язкості зернової барди

$$\eta_{t,g} = 10^{-3} \cdot \exp[a(t) \cdot g^3 + b(t) \cdot g^2 + c(t) \cdot g + d(t)], \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad (20)$$

де $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ – відповідно кубічний, квадратичний, лінійний коефіцієнти та вільний член в математичній моделі абсолютної в'язкості зернової барди від масової концентрації сухих речовин, що є функціями температури.

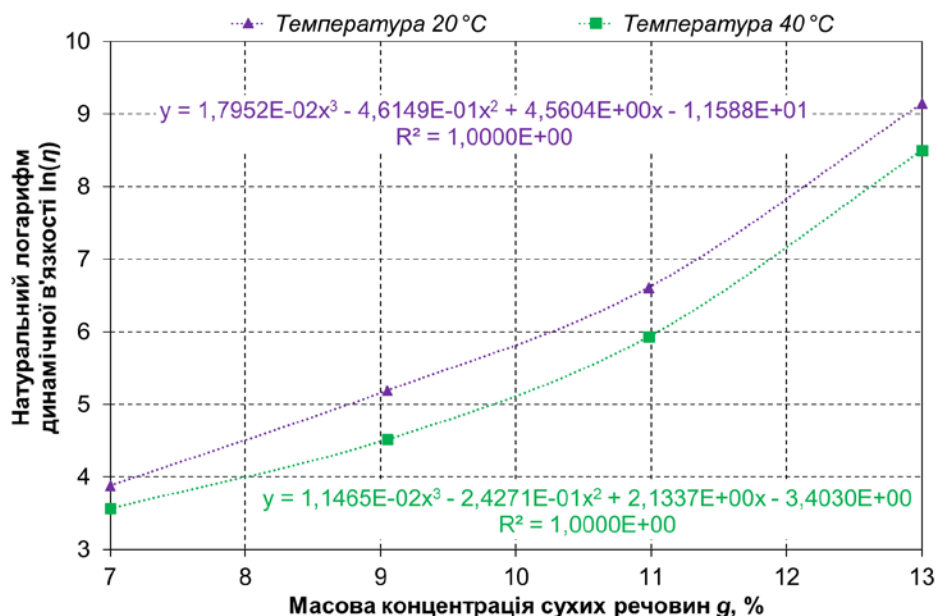


Рис. 3. Графік зміни натурального логарифма динамічної в'язкості зернової барди від температури та масового вмісту сухих речовин

Значення коефіцієнтів (рис. 3) у аналітичній моделі (18) заносимо в табл. 4. На основі даних табл. 4 будемо графічні залежності даних коефіцієнтів від температури (рис. 4, 5) із нанесеними лініями регресії.

Таблиця 4. Коефіцієнти математичної моделі динамічної в'язкості зернової барди від температури

Температура $t, ^\circ\text{C}$	Кубічний коефіцієнт $a(t)$	Квадратичний коефіцієнт $b(t)$	Лінійний коефіцієнт $c(t)$	Вільний член $d(t)$
20	$1,7952 \cdot 10^{-2}$	-0,46149	4,5604	-11,588
40	$1,1465 \cdot 10^{-2}$	-0,24271	2,1337	-3,4030

Для коефіцієнтів у формулі (18) отримано такі залежності від температури:

- для кубічного коефіцієнта

$$a(t) = -3,2437 \cdot 10^{-4} \cdot t + 2,4440 \cdot 10^{-2}; \quad (21)$$

- для квадратичного коефіцієнта

$$b(t) = 1,0939 \cdot 10^{-2} \cdot t - 0,68027; \quad (22)$$

- для лінійного коефіцієнта

$$c(t) = -0,12133 \cdot t + 6,9871; \quad (23)$$

- для вільного члена

$$d(t) = 0,40923 \cdot t - 19,772. \quad (24)$$

Отже, математична модель динамічної в'язкості для дослідного зразка зернової барди від температури (t , $^{\circ}\text{C}$) та масового вмісту сухих речовин (g , %) має такий вигляд:

$$\eta_{t,g} = \exp \left[\left(-3,2437 \cdot 10^{-4} \cdot t + 2,4440 \cdot 10^{-2} \right) \cdot g^3 + \right. \\ \left. + \left(1,0939 \cdot 10^{-2} \cdot t - 0,68027 \right) \cdot g^2 + \left(-0,12133 \cdot t + 6,9871 \right) \cdot g + \right. \\ \left. + \left(0,40923 \cdot t - 19,772 \right) \right] \cdot 10^{-3}, \text{ Па} \cdot \text{с}. \quad (25)$$

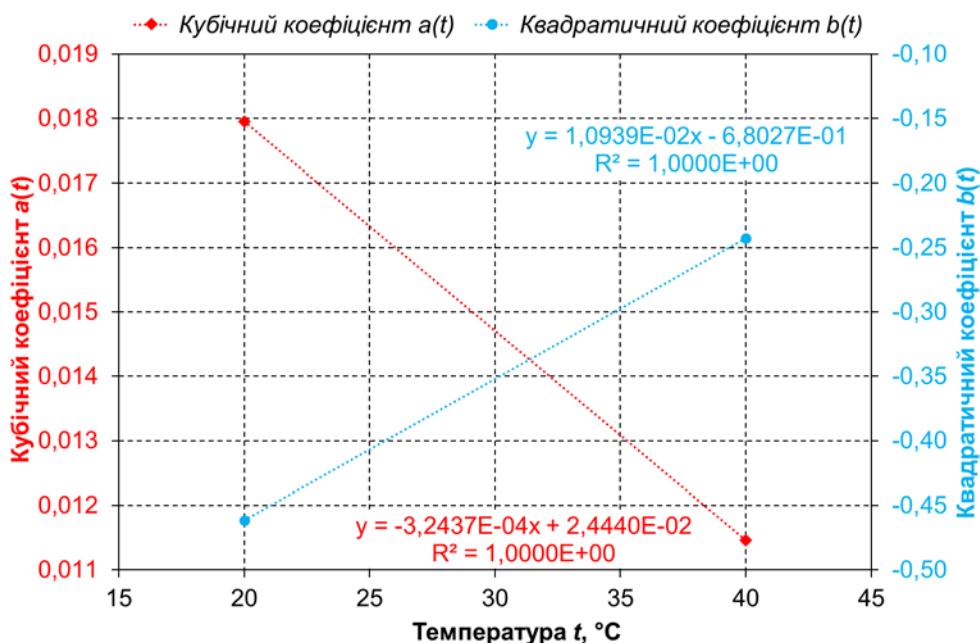


Рис. 4. Результати математичного моделювання кубічного та квадратичного коефіцієнтів аналітичної моделі (18)

Залежність (25) справедлива для такого діапазону фізичних параметрів:

- температура від 20°C до 40°C ;
- масова частка сухих речовин від 7 % до 13 %.

Для математичного моделювання питомої масової ізобарної теплоємності та коефіцієнта теплопровідності приймаємо за основу воду [8] із урахуванням коригувальних коефіцієнтів на зернову барду за даними роботи [10].

Графічні залежності із відповідними лініями та рівняннями регресії для вказаних вище властивостей води за стандартного атмосферного тиску наведено на рис. 6 та 7.

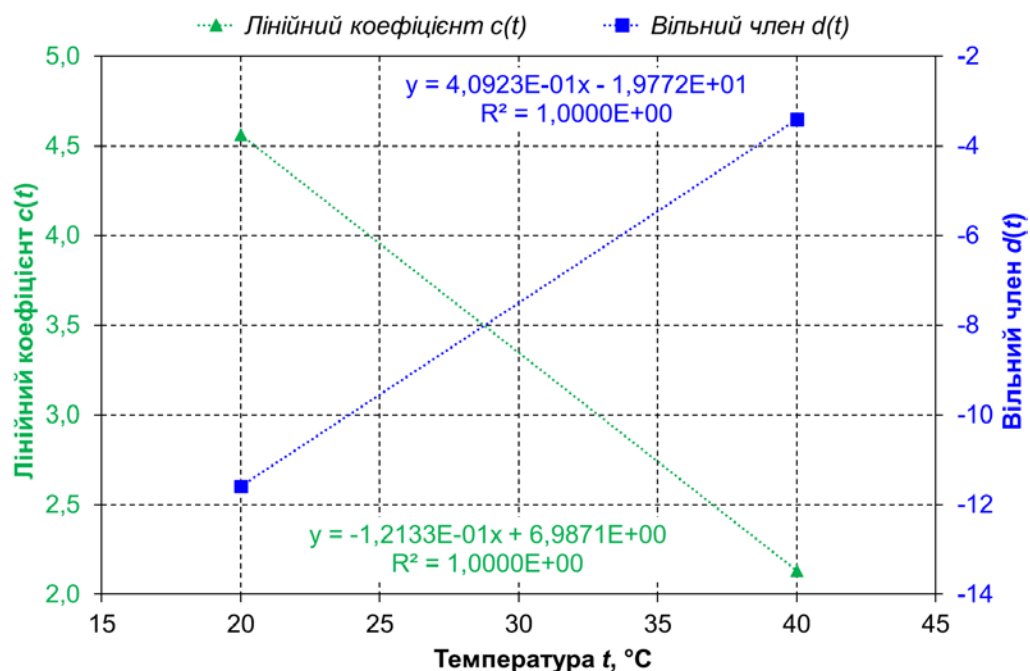


Рис. 5. Результати математичного моделювання лінійного коефіцієнта та вільного члена аналітичної моделі (2.18)

Таким чином аналітичні моделі для розрахунку фізичних властивостей барди від температури (t , °C) та масового вмісту сухих речовин (g , %) мають такий вигляд:

- питома масова ізобарна теплоємність

$$c_{p_{t,g}} = c_{p_s} \cdot K_{c_p}, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad (26)$$

$$c_{p_s} = -9,6970 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 + 2,6769 \cdot 10^{-2} \cdot t^2 - 1,6988 \cdot t + 4209,5, \quad (27)$$

$$K_{c_p} = -0,04 \cdot g + 1,33, \quad (28)$$

де c_{p_s} – питома масова ізобарна теплоємність води; K_{c_p} – коригувальний коефіцієнт по величині теплоємності, що враховує властивості зернової барди;

- коефіцієнт теплопровідності

$$\lambda_{t,g} = \lambda_s \cdot K_\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}, \quad (29)$$

$$\lambda_s = -6,6071 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 + 1,7649 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0,57055, \quad (30)$$

$$K_\lambda = -0,02 \cdot g + 1,27, \quad (31)$$

λ_s – коефіцієнт теплопровідності води; K_λ – коригувальний коефіцієнт по величині теплопровідності, що враховує властивості зернової барди.

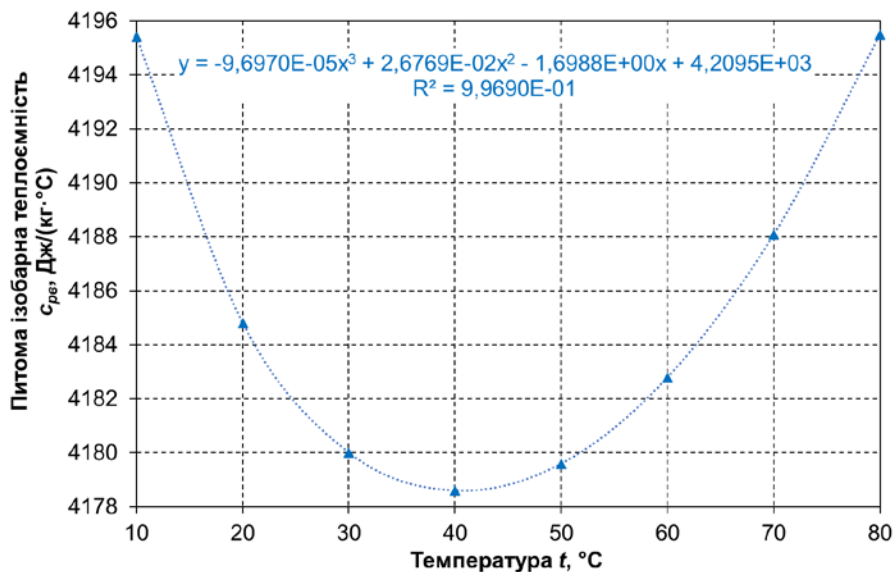


Рис. 6. Графік зміни масової ізобарної теплоємності води [8] від температури

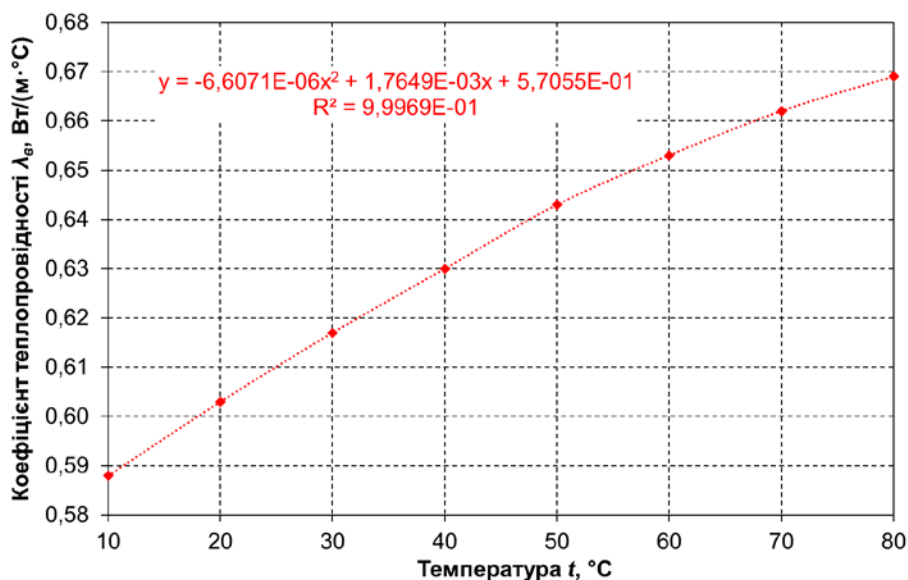


Рис. 7. Графік зміни коефіцієнта теплопровідності води [8] від температури

Математичне моделювання фізичних властивостей промислових стоків при транспортуванні зернової барди

В якості базової рідини для моделювання властивостей промислових стоків приймемо 4% розчин каустичної соди, що використовується в СІР-мийці. Для цієї рідини наявні достатні дані щодо фізичних властиво-

стей, а її густина та динамічна в'язкість не перевищують аналогічних показників для інших видів промислових стоків (розчинів сульфамінової та ортофосфорної кислоти, лютеру, продувки після котлів, регенераційних вод хімічної водоочистки та господарсько-побутових стічних вод).

Дані щодо густини та динамічної в'язкості базової рідини для промислових стоків (4 % розчин каустичної соди) [11] наведено в таблиці 5.

Таблиця 5. Основні фізичні властивості 4 % розчину каустичної соди (NaOH) [11]

Найменування параметра	Числове значення параметра							
Температура t , °C	10	20	30	40	50	60	70	80
Густина ρ , кг/м ³	1046	1043	1039	1035	1031	1025	1020	1014
Динамічна в'язкість η , мПа·с	1,55	1,28	1,06	0,87	0,71	0,60	0,51	0,44
Питома ізобарна теплоємність c_p , Дж/(кг·°C)	3960	3990	4017	4038	4050	4056	4054	4046
Коефіцієнт теплопровідності λ , Вт/(м·°C)	0,595	0,612	0,628	0,641	0,653	0,662	0,670	0,676

За даними таблиці 5 будемо графік зміни властивостей промислових стоків від температури (рис. 8, 9). З використанням функції «Trendline» MS Excel на даному графіку наносимо лінії регресії та відповідні аналітичні залежності, що їх описують.

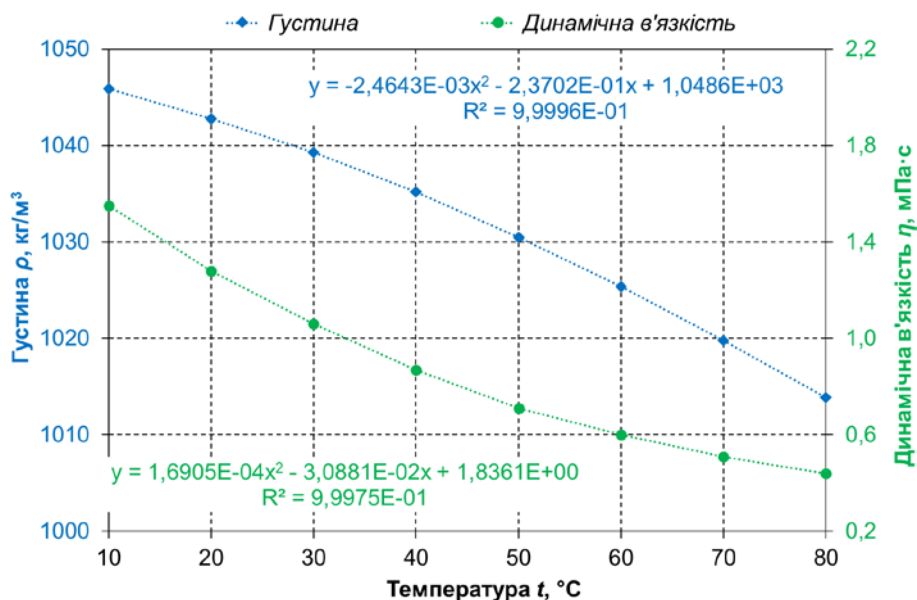


Рис. 8. Зміна густини та динамічної в'язкості промислових стоків (4 % розчин NaOH) від температури

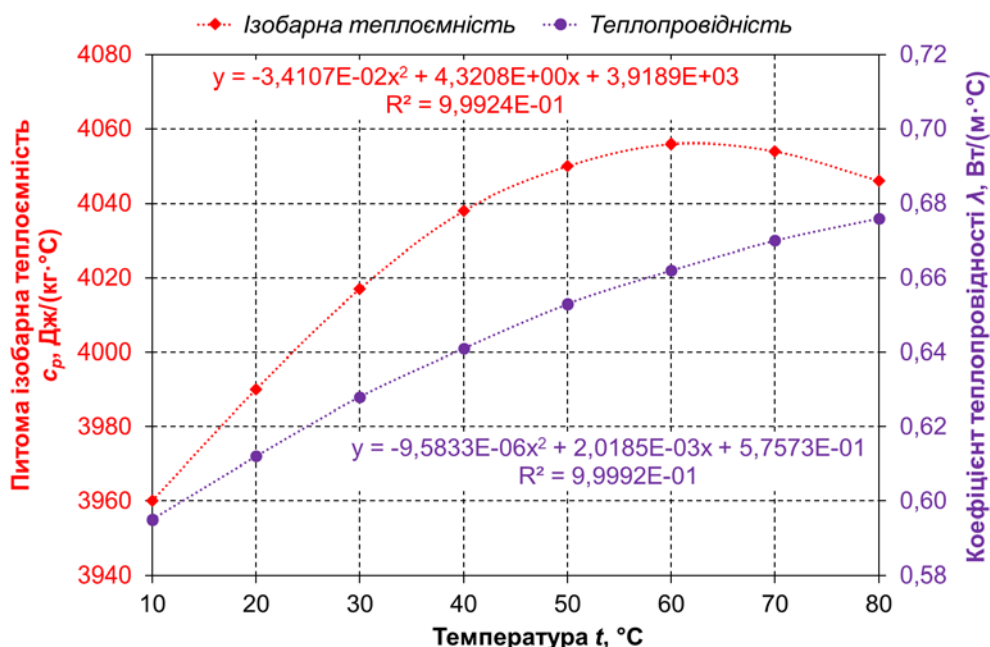


Рис. 9. Зміна ізобарної теплоємності та коефіцієнта теплопровідності промислових стоків (4 % розчин NaOH) від температури

За результатами проведеного математичного моделювання властивостей промислових стоків встановлено, що густину, динамічну в'язкість, ізобарну теплоємність та коефіцієнт теплопровідності з високим ступенем достовірності апроксимації (коефіцієнт детермінації практично дорівнює одиниці) можна описати за допомогою поліномів другого степеня від температури.

Отримані математичні моделі фізичних властивостей базової рідини для промислових стоків від температури (t , °C) мають вигляд:

- густина

$$\rho_t = -2,4643 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 0,23702 \cdot t + 1048,6, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad (32)$$

- динамічна в'язкість

$$\eta_t = 1,6905 \cdot 10^{-7} \cdot t^2 - 3,0881 \cdot 10^{-5} \cdot t + 1,8361 \cdot 10^{-3}, \text{Па} \cdot \text{с}; \quad (33)$$

- коефіцієнт об'ємного розширення з урахуванням залежності (18)

$$\beta_t = \frac{4,9286 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0,23702}{-2,4643 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 0,23702 \cdot t + 1048,6}, ^\circ\text{C}^{-1}; \quad (34)$$

- питома масова ізобарна теплоємність

$$c_{p_t} = -3,4107 \cdot 10^{-2} \cdot t^2 + 4,3208 \cdot t + 3918,9, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}; \quad (35)$$

- коефіцієнт теплопровідності

$$\lambda_t = -9,5833 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 + 2,0185 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0,57573, \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}. \quad (36)$$

Дані аналітичні формули можна використовувати для діапазону температур промислових стоків від 10 °С до 80 °С.

Математичне моделювання фізичних властивостей біогазу

Біогазом називається газ, що складається головним чином з метану та вуглекислого газу, отриманий в результаті анаеробного розщеплення біомаси [12].

Трубопроводи, призначені для транспортування біогазу, часто розглядаються як ізотермічні системи [13, 14]. Це припущення ґрунтується на тому, що вони зазвичай працюють за тисків, характерних для газорозподільних мереж низького або середнього тиску, де зміни температури газу вздовж протяжності трубопроводу є незначними.

В умовах практично постійної температури, такі теплофізичні властивості, як коефіцієнт об'ємного розширення, ізобарна теплоємність та коефіцієнт теплопровідності, мають менший вплив на гідравлічний режим. Тому для виконання теплогідравлічного розрахунку таких ізотермічних газопроводів ключовими параметрами стають густина та в'язкість біогазу. Знання саме цих двох властивостей дозволяє достатньо точно визначити втрати тиску на тертя та забезпечити необхідну пропускну здатність трубопровідної системи.

Для розрахунку основних фізичних властивостей біогазу, що використовуються при гідравлічному розрахунку газопроводу, необхідно знати його компонентний склад.

Розрахунки виконуються в такій послідовності:

1) обчислюється молярна маса газу

$$M = 0,01 \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot M_i, \frac{кг}{кмоль}, \quad (37)$$

де x_i – мольна частка i -го компонента газу, %; M_i – молярна маса i -го компонента газу (таблиця 6), кг/кмоль; N – кількість компонентів з яких складається газ;

2) визначається відносна густина газу за повітрям

$$\Delta = \frac{M}{M_{пов}}, \quad (38)$$

$M_{пов} = 28,96 \text{ кг/кмоль}$ – молярна маса сухого повітря;

3) обчислюється густина газу за нормальних фізичних умов

$$\rho_n = \rho_{пов_n} \cdot \Delta, \frac{кг}{м^3}, \quad (39)$$

$\rho_{пов_n} = 1,293 \text{ кг/м}^3$ – густина сухого повітря за нормальних умов;

4) визначається абсолютна в'язкість газу за нормальних умов за емпіричною формулою Хернінга-Ціпперера [15]

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot \eta_{n_i} \cdot \sqrt{M_i \cdot T_{c_i}}}{\sum_{i=1}^N x_i \cdot \sqrt{M_i \cdot T_{c_i}}}, \text{Па} \cdot \text{с}, \quad (40)$$

η_{n_i} – динамічна в'язкість i -го компонента газу за нормальних умов (таблиця 6), Па·с; T_{c_i} – критична температура i -го компонента газу (таблиця 6), К;

5) обчислюється кінематична в'язкість газу за нормальних умов

$$\nu_n = \frac{\eta_n}{\rho_n}, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}. \quad (41)$$

Таблиця 6. Фізичні властивості основних компонентів біогазу [16]

Компонент	Молярна маса, кг/кмоль	Критична температура, К	Динамічна в'язкість газу за нормальних умов $\times 10^6$, Па·с
Метан (CH_4)	16,0425	190,555	10,28
Діоксид вуглецю (CO_2)	44,0095	304,200	13,67
Азот (N_2)	28,0134	126,200	16,65
Кисень (O_2)	31,9988	154,580	19,10
Водень (H_2)	2,0159	33,200	8,40

Відповідно до експериментальних даних біогаз в основному складається з таких двох компонентів:

- метан $x_1 = 55 \%$;
- вуглекислий газ $x_2 = 45 \%$.

Проводимо послідовно розрахунок:

- молярної маси газу за формулою (37)

$$M = 0,01 \cdot (55 \cdot 16,0425 + 45 \cdot 44,0095) = 28,63 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}};$$

- за формулою (38) відносної густини газу за повітрям

$$\Delta = \frac{28,63}{28,96} = 0,9885;$$

- густини газу за нормальних умов за формулою (39)

$$\rho_n = 1,293 \cdot 0,9885 = 1,278 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

- за формулою (40) динамічної в'язкості газу за нормальних умов

$$\begin{aligned} \eta_n &= \frac{(55 \cdot 10,28 \cdot \sqrt{16,0425 \cdot 190,555} + 45 \cdot 13,67 \cdot \sqrt{44,0095 \cdot 304,2}) \cdot 10^{-6}}{55 \cdot \sqrt{16,0425 \cdot 190,555} + 45 \cdot \sqrt{44,0095 \cdot 304,2}} = \\ &= 12,42 \cdot 10^{-6} \text{Па} \cdot \text{с}; \end{aligned}$$

- кінематичної в'язкості газу за нормальних умов за формулою (41)

$$\nu_n = \frac{12,42 \cdot 10^{-6}}{1,278} = 9,717 \cdot 10^{-6} \frac{M^2}{c}.$$

Теплогідравлічний розрахунок трубопроводу для транспортування біогазу можна виконувати за нормативними формулами для газорозподільних мереж [17]. Тільки у відповідних розрахункових залежностях для визначення втрат тиску чи пропускної здатності газопроводу необхідно використовувати для коефіцієнта гідравлічного опору фундаментальну формулу Колбрука-Уайта [18] для турбулентного режиму руху енергоносія.

Для подальших досліджень планується розробити алгоритм теплогідравлічного розрахунку системи трубопровідного транспорту в межах біогазової установки, що використовує зернову барду як основну сировину. Це охоплює трубопроводи, що використовуються для транспортування барди від джерела виробництва етанолу до біогазового реактора, а також трубопроводи для транспортування відповідних промислових стоків.

Висновки

1. Розроблено комплексні математичні моделі для визначення основних фізико-хімічних властивостей зернової барди (густини, динамічної в'язкості, коефіцієнта об'ємного розширення, питомої масової ізобарної теплоємності та коефіцієнта теплопровідності) як лінійної функції температури та масової концентрації сухих речовин. Отримані залежності, підтверджені високими коефіцієнтами детермінації, дозволяють з достатньою точністю проводити інженерні розрахунки для проектування та експлуатації систем транспортування барди.

2. Встановлено аналітичні залежності для розрахунку фізичних властивостей промислових стоків, на прикладі 4% розчину каустичної соди, що використовуються в процесі функціонування біогазових установок. Моделі описують зміну густини, динамічної в'язкості, ізобарної теплоємності та коефіцієнта теплопровідності від температури за допомогою поліномів другого ступеня, що забезпечує необхідну точність для теплогідравлічних розрахунків трубопроводів промислових стоків.

3. Запропоновано методику та виконано розрахунок ключових фізичних властивостей біогазу (молярної маси, відносної густини, густини за нормальних умов, динамічної та кінематичної в'язкості) на основі його типового компонентного складу (метан та вуглекислий газ). Ці параметри є визначальними для гідравлічного розрахунку трубопроводів транспортування біогазу в ізотермічних умовах, що характерно для газорозподільних мереж низького та середнього тиску.

4. Розроблені математичні моделі фізичних властивостей зернової барди, промислових стоків та біогазу є важливим інструментом для проектування та оптимізації технологічних процесів у системах вироб-

ництва біогазу, дозволяючи підвищити точність інженерних розрахунків, обґрунтовано обирати обладнання та забезпечувати енергоефективну та безпечну експлуатацію всієї інфраструктури.

Література

1. How Does Anaerobic Digestion Work? // US EPA. – URL: <https://www.epa.gov/agstar/how-does-anaerobic-digestion-work>.
2. Anaerobic Digestion // California Energy Commission. – URL: <https://www.energy.ca.gov/data-reports/california-power-generation-and-power-sources/bioenergy/anaerobic-digestion>.
3. Digestate Factsheet: Page 1. The products of anaerobic digestion // European Biogas Association. – URL: <https://europeanbiogas.eu/wp-content/uploads/2015/07/Digestate-paper-final-08072015.pdf>.
4. Anaerobic Digestion: Diverse Benefits for Energy, Agriculture, Environment and Water // IEA Bioenergy. – 2018. – URL: https://www.ieabioenergy.com/wp-content/uploads/2018/08/anaerobic-digestion_web_END.pdf
5. The rheological properties of concentrated distillery spent wash / S. S. Sabale, S. S. Mehetre, G. D. Yadav, P. S. Patil // ResearchGate. – URL: <https://scispace.com/pdf/rheological-properties-of-concentrated-distillery-spent-wash-34ulv38ove.pdf>
6. Dubrovskis, V., Plume, I., Adamovics, A. Use of ethanol production and stillage processing residues for biogas production // Agronomy Research. – 2020. – Vol. 18, № 3. – P. 1042–1053.
7. Physical and chemical characteristics of distillery stillage // ResearchGate. – URL: https://www.researchgate.net/figure/Physical-and-chemical-characteristics-of-distillery-stillage_tbl2_342262586.
8. Wagner W., Pruß A. 2002. “The IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use”. *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 31 (2): 387–535. <https://doi.org/10.1063/1.1461829>.
9. ASTM D1250-19, “Standard Guide for the Use of the Joint API and ASTM Adjunct for Temperature and Pressure Volume Correction Factors for Generalized Crude Oils, Refined Products, and Lubricating Oils: API MPMS Chapter 11.1,” ASTM International, West Conshohocken, PA, 2019.
10. Lu Y, Rosentrater KA. Physical and chemical properties of whole stillage, thin stillage and syrup [Paper Number: 152184612, New Orleans, Louisiana, July 26-29]. Am Soc Agric Biol Eng (ASABE)2015. [Paper Number: 152184612, New Orleans, Louisiana, July 26-29]. http://lib.dr.iastate.edu/abe_eng_conf.
11. *National Research Council*. International Critical Tables of Numerical Data, Physics, Chemistry and Technology. Volume III. Reprint ed. [S.l.]: Nabu Press, 2012. 444 p.

12. ДСТУ EN 16723-1:2023 (EN 16723-1:2016, IDT) Природний газ і біометан для використання в транспорті та біометан для закачування в мережу природного газу. Частина 1. Технічні характеристики біометану для закачування в мережу природного газу. Наказ від 03.04.2023 № 55; чинний з 2023-11-01. Вид. офіц. Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2023. 26 с.
13. Biogas: Converting Waste to Energy. EESI. URL: <https://www.eesi.org/papers/view/fact-sheet-biogasconverting-waste-to-energy>.
14. Biogas Gasification / Biogas Gasifier. Gazpack. URL: <https://gazpack.nl/en/biogas-gasification>
15. Van der Grinten, J. (2020). Evaluation of a modified Herning - Zipperer method and the method by Schley et al. to compute the dynamic viscosity of natural gases. Physikalisch-Technische Bundesanstalt. <https://doi.org/10.7795/120.20200724>
16. ISO 20765-1. Natural gas – Calculation of thermodynamic properties: Part 1: Gas phase properties for transmission and distribution applications. ISO Copyright Office: Geneva, 2005.
16. ДБН В.2.5-20:2018 Газопостачання; затв. наказом Міністерства регіонального розвитку, будівництва та житлово-комунального господарства України від 15.11.2018 р. № 305; чинний з 2019-07-01. Вид. офіц. Київ: Мінрегіон України, 2018. 113 с.
17. White F. M. Fluid mechanics. 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011. 885 p. (McGraw-Hill series in mechanical engineering).

Стаття надійшла до редакційної колегії 08.06.2025 р.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE PHYSICAL PROPERTIES OF ENERGY CARRIERS IN THE BIOGAS PRODUCTION SYSTEM

S. Y. Hryhorskyi, V. B. Zapukhliak, V. M. Voznyi

*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, 15 Karpatska Street;
tel. +38 (0342) 72-71-38; e-mail: stanislav.hryhorskyi@nung.edu.ua*

The article discusses the topical issue of mathematical modelling of the physical properties of energy carriers in grain distiller's grains biogas production systems. The efficiency of biogas technologies largely depends on the accurate design and operation of raw material and biogas transportation systems. The main objective of the work is to develop mathematical models of the key physical properties (density, dynamic viscosity, volume expansion coefficient, specific isobaric heat capacity and thermal conductivity coefficient) of grain distiller's grains, industrial effluents and biogas. For grain

distiller's grains, a comprehensive density model was obtained in the form of a linear function of temperature and mass concentration of dry substances, while dynamic viscosity is described by an exponential dependence, the natural logarithm of which is a cubic polynomial. The calculated dependencies for the physical properties of industrial effluents, using the example of a 4% caustic soda solution, were established in the form of second-degree polynomials of temperature, which approximate the experimental data with high accuracy. A method for calculating key parameters of biogas (density and viscosity) for hydraulic calculations based on its component composition is proposed. The developed models are the basis for performing thermal-hydraulic calculations, optimising the design and operation of pipeline systems in biogas plants, which contributes to increasing their reliability, safety and economic feasibility.

Keywords: *energy carrier; biogas; grain distiller's grains; pipeline transport; mathematical modelling; density; dynamic viscosity; heat capacity; thermal conductivity; coefficient of thermal expansion.*