

УДК 517.98

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-39-47

ФОРМУЛИ ВАРІНГА-ГІРАРДА ДЛЯ СИМЕТРИЧНИХ І СУПЕРСИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

О.В. Гандера-Калиновська, М.В.Марцінків

Прикарпатський національний університет

імені Василя Стефаника;

76018, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, Україна;

e-mail: olha.handera@pnu.edu.ua, maria.martsinkiv@pnu.edu.ua

У статті досліджено застосування формул Варінга-Гірарда симетричних та суперсиметричних поліномів у контексті банахових просторів. Наведено основні алгебраїчні базиси симетричних функцій, зокрема степеневі, елементарні та повні симетричні поліноми. Розглянуто комбінаторні рівності та узагальнення класичних формул для нескінченновимірних структур. Запропоновано аналог формули Варінга для суперсиметричних поліномів, що базується на ізоморфізмах між відповідними алгебрами. Дослідження має потенційне застосування в теорії інваріантів, комбінаториці та математичній фізиці.

Ключові слова: *симетричні поліноми, суперсиметричні поліноми, формула Варінга-Гірарда, банахів простір, комбінаторика, ізоморфізм, тотожності Ньютона, алгебраїчний базис.*

1. Вступ

Одним із важливих об'єктів дослідження у функціональному аналізі та теорії інваріантів є симетричні функції, які залишаються незмінними при перестановці аргументів. У контексті нескінченновимірних просторових структур, особливу увагу привертають симетричні поліноми на банахових просторах, оскільки вони поєднують алгебраїчні, аналітичні та топологічні властивості. Нехай X — комплексний банахів простір і нехай $S_{\mathbb{N}}$ — напівгрупа всіх перестановок

натуральних чисел $\mathbb{N}$. Функція f на X називається *симетричною*, якщо вона залишається незмінною при будь-якій перестановці з $S_{\mathbb{N}}$, тобто для кожного $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$

$$f(x_1, x_2, \dots) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)$$

для всіх $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Алгебра усіх неперервних симетричних поліномів на X позначається $\mathcal{P}_s(X)$. Для простору l_1 доведено, що система степеневих симетричних поліномів

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

утворює алгебраїчний базис в алгебрі $\mathcal{P}_s(l_1)$ [2]. Тобто для будь-якого полінома $P \in \mathcal{P}_s(l_1)$ існує єдиний поліном $Q(t_1, \dots, t_m)$ від скінченної кількості комплексних змінних такий, що

$$P(x) = Q(F_1(x), \dots, F_m(x)).$$

Поліноми F_k відомі як *степеневі симетричні поліноми*. Алгебраїчний базис не є унікальним, і ми також розглядаємо альтернативні базиси $\mathcal{P}_s(l_1)$.

- **Елементарний симетричний базис:**

$$G_n(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}.$$

Ці поліноми часто використовуються в класичній теорії інваріантів та комбінаториці.

- **Повний симетричний поліноміальний базис:**

$$H_n(x) = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}.$$

Вони мають важливе значення у теорії симетричних функцій.

Ці базиси пов'язані через добре відомі *тотожності Ньютона*:

$$nG_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} G_{n-k} F_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$nH_n = \sum_{k=1}^n H_{n-k} F_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $\mathbb{Z}_+$ позначає множину всіх невід'ємних цілих чисел та $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \dots, n$. Добре відомо, що елементарні та повні симетричні поліноми можна виразити через степеневі симетричні поліноми за допомогою формул Варінга–Гіарда (див. напр. [4])

$$G_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} F_1^{\lambda_1} F_2^{\lambda_2} \dots F_n^{\lambda_n}, \quad (1)$$

$$H_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{1}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} F_1^{\lambda_1} F_2^{\lambda_2} \dots F_n^{\lambda_n}. \quad (2)$$

У [6] формули Варінга–Гіарда поширені на банахів простір l_p при $p > 1$

$$G_n^{(p)} = \sum_{p\lambda_p+\dots+n\lambda_n=n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_p+\dots+\lambda_n)}}{p^{\lambda_p} \dots n^{\lambda_n} \lambda_p! \dots \lambda_n!} F_p^{\lambda_p} \dots F_n^{\lambda_n}, \quad (3)$$

$$H_n^{(p)} = \sum_{p\lambda_p+\dots+n\lambda_n=n} \frac{1}{p^{\lambda_p} \dots n^{\lambda_n} \lambda_p! \dots \lambda_n!} F_p^{\lambda_p} \dots F_n^{\lambda_n},$$

де $G_n^{(p)}$ та $H_n^{(p)}$ — елементарні та повні симетричні поліноми на просторі l_p .

2. Застосування формул Варінга-Гіарда у комбінаториці
У [1] було доведено, що

$$G_n^{(p)}(\mathbf{1}) = \sum_{j(p-1) \leq n} G_{n-j(p-1)}^{(p-1)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(p-1)}\left(G_j^{(p-1)}\right), \quad (4)$$

де $n \geq p > 1$; $\mathbf{1} = (1, 0, 0, \dots)$ та

$$\psi_{\lambda}^{(p)}\left(G_n^{(p)}\right) = \begin{cases} (-1)^{k(p+1)} \frac{\left(\frac{\lambda}{p}\right)^k}{k!}, & \text{якщо } n = kp, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (5)$$

З класичної теорії відомі наступні комбінаторні рівності

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} = 0, \quad n > 1.$$

У [3] було доведено інші комбінаторні рівності

$$\sum_{2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_2 + \dots + \lambda_n)}}{2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_2! \dots \lambda_n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}$$

на випадок простору ℓ_2 .

Розглянемо простір ℓ_3 .

Твердження 2.1. Нехай $\lambda_i \in \mathbb{Z}_+$, $j = 3, \dots, n$, $n \geq 3$. Тоді виконується наступна комбінаторна рівність

$$\begin{aligned} & \sum_{3\lambda_3 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_3 + \dots + \lambda_n)}}{3^{\lambda_3} \dots n^{\lambda_n} \lambda_3! \dots \lambda_n!} = \\ & = \begin{cases} -\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{n-2j-1}{(n-2j)!j!2^j}, & \text{якщо } n-\text{парне,} \\ \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{n-2j-1}{(n-2j)!j!2^j}, & \text{якщо } n-\text{непарне.} \end{cases} \end{aligned}$$

Доведення. Розпишемо рівність (4) для випадку $p = 3$

$$\begin{aligned} G_n^{(3)}(\mathbf{1}) &= \sum_{2j \leq n} G_{n-2j}^{(2)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(2)}(G_{2j}^{(2)}) = \\ &= G_n^{(2)}(\mathbf{1}) + G_{n-2}^{(2)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(2)}(G_2^{(2)}) + G_{n-4}^{(2)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(2)}(G_4^{(2)}) + \dots + \\ &+ G_2^{(2)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(2)}(G_{n-2}^{(2)}) + G_0^{(2)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(2)}(G_n^{(2)}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $G_0^{(3)} \equiv 1$.

З рівності (5) отримаємо, що

$$\psi_{-1}^{(2)}(G_n^{(2)}) = \begin{cases} \frac{1}{2^k k!}, & \text{якщо } n = 2k, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

З іншого боку, в [1] та [3] було доведено, що

$$G_n^{(2)}(\mathbf{1}) = (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!}.$$

Тоді отримаємо

$$G_n^{(3)}(\mathbf{1}) = \begin{cases} -\sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{n-2j-1}{(n-2j)! 2^j j!}, & \text{якщо } n \text{—парне,} \\ \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{n-2j-1}{(n-2j)! 2^j j!}, & \text{якщо } n \text{—непарне.} \end{cases} \quad (6)$$

Водночас з формули (3) отримаємо, що

$$G_n^{(3)}(\mathbf{1}) = \sum_{3\lambda_3 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_3 + \dots + \lambda_n)}}{3^{\lambda_3} \dots n^{\lambda_n} \lambda_3! \dots \lambda_n!}. \quad (7)$$

Прирівнявши формули (6) та (7), отримаємо необхідну рівність. $\square$

3. Аналог формули Варінга-Гірарда для суперсиметричних поліномів

Нехай $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ і $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ — банаховий простір усіх послідовностей комплексних чисел, які абсолютно сумовні та пронумеровані числами з $\mathbb{Z}_0$. Будь-який елемент $z \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ має представлення

$$z = (\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_1, z_2, \dots),$$

що може бути записано як

$$z = (y|x) = (\dots, y_2, y_1 \mid x_1, x_2, \dots).$$

Позначимо

$$\|z\| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |z_i| = \|x\| + \|y\|,$$

де $z_n = x_n, z_{-n} = y_n, x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots), n \in \mathbb{N}$ з простору ℓ_1 та $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Зауважимо, що $x \rightarrow (\mathbf{0}|x), y \rightarrow (y|\mathbf{0})$ є ізометричними вкладеннями копій ℓ_1 в $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, де $\mathbf{0} = (0, \dots, 0, \dots) \in \ell_1$.

Поліном P на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ називається суперсиметричним, якщо він є скінченною алгебраїчною комбінацією поліномів $T_n, n \in \mathbb{N}$, де

$$T_n(y|x) = F_n(x) - F_n(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^n.$$

Позначимо через $\mathcal{P}_{sup}$ — алгебру суперсиметричних поліномів на просторі $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. У [5] показано, що поліноми

$$W_k(y|x) = \sum_{k=1}^n G_k(x) H_{n-k}(-y), \quad n \in \mathbb{N},$$

утворюють інший алгебраїчний базис алгебри суперсиметричних поліномів. Крім того, у [5] розглянуто ще поліноми

$$\tilde{W}_k(y|x) = \sum_{k=1}^n H_k(x) G_{n-k}(-y), \quad n \in \mathbb{N},$$

які також утворюють алгебраїчний базис алгебри суперсиметричних поліномів на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Також показано деяку взаємозалежність між $W_n(y|x)$ та $\tilde{W}_n(y|x)$.

Позначимо через Λ ізоморфізм з $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_s(\ell_1)$ у $\mathcal{P}_{sup}$ такий, що $\Lambda : F_n \rightarrow T_n$, $n \in \mathbb{N}$, та $\Lambda(G_n) = W_n$, $\Lambda(H_n) = \tilde{W}_n$.

У наступному твердженні доведено аналог формул Варінга-Гіргарда для суперсиметричних поліномів.

Твердження 3.1. Для будь-якого $\lambda_j \in \mathbb{Z}_+$ виконуються наступні рівності:

$$W_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} (T_1)^{\lambda_1} (T_2)^{\lambda_2} \dots (T_n)^{\lambda_n}, \quad (8)$$

$$\tilde{W}_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{1}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} (T_1)^{\lambda_1} (T_2)^{\lambda_2} \dots (T_n)^{\lambda_n}. \quad (9)$$

Доведення. Для доведення (8) застосуємо ізоморфізм Λ у рівності (1). Тоді

$$\begin{aligned} W_n &= \Lambda(G_n) = \\ &= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \Lambda(F_1)^{\lambda_1} \Lambda(F_2)^{\lambda_2} \dots \Lambda(F_n)^{\lambda_n} = \\ &= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{(-1)^{n+(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} (T_1)^{\lambda_1} (T_2)^{\lambda_2} \dots (T_n)^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Аналогічно, застосувавши ізоморфізм Λ до рівності (1), отримаємо (8)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_n &= \Lambda(H_n) = \\ &= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{1}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \Lambda(F_1)^{\lambda_1} \Lambda(F_2)^{\lambda_2} \dots \Lambda(F_n)^{\lambda_n} = \\ &= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n} \frac{1}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} (T_1)^{\lambda_1} (T_2)^{\lambda_2} \dots (T_n)^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

□

Література

1. Chernega I., Zagorodnyuk A. *Spectra of symmetric entire functions on Banach spaces*. Methods of Functional Analysis and Topology. (прийнята до друку).
2. Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J. A. *Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function space*. J. Lond.Math.Soc., 1999, vol. 59, no. 2, pp. 681–697. <https://doi.org/10.1112/S0024610799007164>
3. Handera-Kalynovska O. V., Kravtsiv V. V. *The Waring-Girard formulas for symmetric polynomials on space ℓ_p* . Carpathian Math. Publ., 2024, vol. 16, no. 2, pp. 407–413. <https://doi.org/10.15330/cmp.16.2.407-413>
4. Macdonald I.G. *Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials*. University Lecture Series, 12, AMS, Providence, RI, 1997.
5. Jawad F., Zahorodnyuk A. *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series*. Symmetry, 2019, vol. 11, no. 9, 1111. <https://doi.org/10.3390/sym11091111>
6. Chernega I., Martsinkiv M., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. *Applications of Supersymmetric Polynomials in Statistical Quantum Physics*. Quantum Reports, 2023, vol. 5, no. 4, pp. 683–697. <https://doi.org/10.3390/quantum5040043>

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.05.2025 р.

**THE WARING-GIRARD FORMULA FOR SYMMETRIC AND
SUPERSYMMETRIC POLYNOMIALS AND THEIR
APPLICATION**

O.V.Handera-Kalynovska, M.V.Martsinkiv

Vasyl Stefanyk Carpathian National University;

76018, 57 Shevchenko street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;

e-mail: olha.handera@pnu.edu.ua, maria.martsinkiv@pnu.edu.ua

The paper explores the application of Waring-Girard formulas to symmetric and supersymmetric polynomials in the context of Banach spaces. It outlines key algebraic bases of symmetric functions, including power-sum, elementary, and complete symmetric polynomials. Combinatorial identities and extensions of classical formulas for infinite-dimensional structures are considered. An analog of the Waring formula for supersymmetric polynomials is proposed, relying on isomorphisms between respective algebras. The research has potential applications in invariant theory, combinatorics, and mathematical physics.

Key words: *symmetric polynomials, supersymmetric polynomials, Waring-Girard formula, Banach space, combinatorics, isomorphism, Newton identities, algebraic basis.*