

Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.9

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-59-64

ІМПУЛЬСНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ВИРОДЖЕНОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОХІДНІЙ

Л. М. Шегда

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: shegda.luba@gmail.com

У статті розглянуто вироджену імпульсну крайову задачу для систем звичайних диференціальних рівнянь з виродженою на всьому відрізку, де розглядається задача, матрицею при похідній, для випадку, коли кількість невідомих не збігається з кількістю крайових умов. Отримано критерій існування розв'язків виродженої імпульсної крайової задачі, за припущення, що вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми. Для розглянутої задачі зведено умови існування розв'язків виродженої імпульсної крайової задачі до розв'язання алгебраїчної системи.

Ключові слова: канонічна форма, вироджена нетерова імпульсна задача, псевдообернена матриця, ортопроектор.

Низка задач природознавства і техніки зводиться до систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом. Диференціальні рівняння з імпульсною дією описують процеси, у яких стан системи зазнає раптових змін (стрибків) у певні моменти часу. У даній роботі будемо розглядати імпульсну крайову задачу

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i, \quad \tau_i \in (a; b), \quad i = 1, \dots, p, \quad (2)$$

$$v x(\cdot) = \alpha \quad (3)$$

де $A(t), B(t) \in C^{3q-2}[a; b]$ – $n \times n$ -вимірні матриці, $\det B(t) = 0$

$\forall t \in [a; b]; f(t) \in C^{q-1}[a; b]$ – n -вимірний вектор-функція; S_i, E_i – $m_i \times n$ -вимірні сталі матриці такі, що $\text{rank}(E_i + S_i) = m_i < n$, тобто розв’язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву: $\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0))$; $\gamma_i, i = 1, \dots, p$ – m_i -вимірний вектор-стовпець констант: $\gamma_i \in R^{m_i}$; α – m -вимірний вектор-стовпець констант: $\alpha \in R^m$; ν – лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n -вимірних, неперервних на $[a; b]$ вектор-функцій: $\nu = \text{col}(\nu_1, \dots, \nu_m) : C[a; b] \rightarrow R^m, \nu_i : C[a; b] \rightarrow R$.

Розв’язок $x = x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ будемо шукати у просторі $C^1([a; b] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_p\})$ кусково неперервно диференційовних вектор-функцій з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$ (їх ще називають точками стрибкоподібного розриву або розриву з обмеженим стрибком), які задаються рівняннями (2).

Відомо [1], що при розгляді імпульсної задачі як крайової задачі з "Interface Conditions" (з умовами на межі поділу двох середовищ) [2] імпульсна задача (1), (2) має r – параметричну сім’ю лінійно незалежних розв’язків

$$x(t, c_r) = X_r(t) c_r + (G[f, \gamma])(t) \quad (4)$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a, b]$ в диференціальній системі та $\gamma_i \in R^{m_i}$ в імпульсній умові задовольняють d лінійно незалежних умов

$$P_{Q_d}(\gamma - l\tilde{x}(\cdot)) = 0,$$

де $X_r(t) = X_{n-s}(t)P_{Q_r}$; $(G[f, \gamma])(t)$ – узагальнений оператор Гріна вивродженої крайової задачі (1), (2), який діє на довільну вектор-функцію $f(t) \in C^{q-1}[a; b]$ таким чином

$$\begin{aligned} (Gf(t, \gamma))(t) &:= \int_a^t X_{n-s}(t) Y_{n-s}^*(\tau) f(\tau) d\tau - \\ &- \Phi(t) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} \left([\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1} \Psi^*(t) f(t) \right) + X_{n-s}(t) Q^+ \gamma - X_{n-s}(t) Q^+ l \tilde{x}(\cdot). \\ \tilde{x}(t) &= \int_a^t X_{n-s}(t) Y_{n-s}^*(\tau) f(\tau) d\tau - \Phi(t) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} \left([\Psi^*(t) L(t) \Phi(t)]^{-1} \Psi^*(t) f(t) \right) - \end{aligned}$$

частинний розв’язок неоднорідної вивродженої диференціальної системи (1) [1, 3]:

$$Q := LX_{n-s}(\cdot) = \begin{bmatrix} -S_1 X_{n-s}(\tau_1) \\ -S_2 X_{n-s}(\tau_2) \\ \dots\dots\dots \\ -S_p X_{n-s}(\tau_p) \end{bmatrix}$$

$-[m \times (n-s)]$ – вимірна стала матриця; $m = m_1 + \dots + m_p$;

$$l\tilde{x}(\cdot) = \begin{bmatrix} E_1 \tilde{x}(\tau_1 +) - (E_1 + S_1) \tilde{x}(\tau_1 -) \\ E_2 \tilde{x}(\tau_2 +) - (E_2 + S_2) \tilde{x}(\tau_2 -) \\ \dots\dots\dots \\ E_p \tilde{x}(\tau_p +) - (E_p + S_p) \tilde{x}(\tau_p -) \end{bmatrix}$$

$-(m \times 1)$ -вимірний вектор-стовпчик імпульсної умови;

$\gamma = \text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in R^m$ – заданий вектор-стовпчик; $X_{n-s}(t) - (n \times (n-s))$

-вимірна матриця, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [a, b],$$

та $Y_{n-s}(t) - (n \times (n-s))$ -вимірна матриця, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків спряженої системи

$$\frac{d}{dt} B^*(t)y = -A^*(t)y, \quad t \in [a, b];$$

$(n-s)$ -вимірні матриці $\Phi(t), \Psi(t)$ складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора

$L(t) \left((L \cdot)(t) := A(t)(\cdot) - B(t) \frac{d(\cdot)}{dt} \right)$ і матриці $B^*(t)$ відносно оператора

$L^*(t) \left((L^* \cdot)(t) := A^*(t)(\cdot) + \frac{d(\cdot)}{dt} B^*(t) \right)$:

$$\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), \dots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \dots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \dots; \varphi_r^{(1)}(t), \dots, \varphi_r^{(s_r)}(t)];$$

$$\Psi(t) = [\psi_1^{(1)}(t), \dots, \psi_1^{(s_1)}(t); \psi_2^{(1)}(t), \dots, \psi_2^{(s_2)}(t); \dots; \psi_r^{(1)}(t), \dots, \psi_r^{(s_r)}(t)].$$

Фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ завжди можна визначити так, щоб виконувалась рівність

$$Y_{n-s}^*(t) B(t) X_{n-s}(t) = E_{n-s}.$$

$X_r(t) = X_{n-s}(t) P_{Q_r}$ – $(n \times r)$ -вимірна матриця, $P_Q := E_{n-s} - Q^+ Q$ – $((n-s) \times (n-s))$ -ортопроектор, який проектує простір R^{n-s} на $\ker Q$. Оскільки $\text{rank } P_Q = r = (n-s) - n_1$, то через P_Q позначаємо $((n-s) \times r)$ -

вимірну матрицю, що складається з r лінійно незалежних стовпців матриці P_Q .

Припускаємо, що рівняння (1) зводиться до центральної канонічної форми як і в роботах [1, 4].

Постановка задачі. Для того, щоб загальний розв'язок (4) імпульсної задачі (1), (2) задовольняв крайову умову (3) треба належним чином добрати вектор $c_r \in R^{n-s}$. Підставимо (4) в (3)

$$\nu X_r(\cdot)c_r + \nu((G[f, \gamma])(\cdot)) = \alpha.$$

Для невідомого вектора c_r отримаємо лінійну алгебраїчну систему

$$Wc_r = \alpha - \nu((G[f, \gamma])(\cdot)) \quad (5)$$

з прямокутною $(m \times r)$ -вимірною матрицею $W := \nu X_r(\cdot)$. Матриця W утворена дією функціонала ν на стовпці матриці $X_r = X_r(t)$; крапка $\cdot$ – означає дію функціонала на змінну, яка має стояти на цьому місці.

Отже, питання про розв'язність і представлення розв'язку імпульсної крайової задачі (1) – (3) еквівалентне питанню про розв'язність і представлення розв'язку алгебраїчної системи (5). Аналогічний алгоритм розв'язання був використаний при розгляді виродженої нетерової крайової задачі зі збурюючою матрицею при похідній [6], в якій крайова умова задається лінійним векторним функціоналом, а також коли було знайдено умову на постійне керування u , при якому нерозв'язну крайову задачу можна зробити розв'язною [7].

Визначимо умови, при яких система (5), а отже, і імпульсна крайова задача (1) – (3) розв'язна. Система (5) згідно [3, 5] розв'язна тоді і тільки тоді, коли її вільний член $[\alpha - \nu((G[f, \gamma])(\cdot))]$ належить ортогональному доповненню $N^\perp(W^*) = R(W)$ підпростору $N(W^*)$, тобто коли

$$P_{W^*}[\alpha - \nu((G[f, \gamma])(\cdot))] = 0,$$

де P_{W^*} – $(m \times m)$ -вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^m на нуль-простір $N(W^*)$ матриці W^* :

$$P_{W^*} : R^m \rightarrow N(W^*), \quad N(W^*) = P_{W^*} R^m.$$

Нехай $\text{rank } W = k_1 \leq \min(m, r)$.

Оскільки $\text{rank } P_{W^*} = m - k_1 = \omega$, то матрицю P_{W^*} можна замінити $\omega \times m$ -вимірною матрицею $P_{W_\omega^*}$, яка складається з ω лінійно незалежних рядків матриці P_{W^*} . Отже, необхідною і достатньою умовою розв'язності системи (5) є ω лінійно незалежних умов

$$P_{W^*} \left[\alpha - v \left((G[f, \gamma])(\cdot) \right) \right] = 0.$$

Якщо остання умова виконується, то розв'язок системи (5) має вигляд

$$c = W^+ \left(\alpha - \left((G[f, \gamma])(\cdot) \right) \right) + P_{W_k} c_k, \quad \forall c_k \in R^k, \quad k = r - k_1$$

де W^+ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до W матриця [5], $P_W - (r \times r)$ -вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^r на нуль-простір $N(W)$ матриці W :

$$P_W : R^r \rightarrow N(W), \quad N(W) = P_W R^r.$$

Оскільки $\text{rank } P_W = r - k_1 = k$, то матрицю P_W можна замінити $(r \times k)$ -вимірною матрицею P_{W_k} , яка складається з k лінійно незалежних стовпців матриці P_W .

Підставимо знайдену константу в (4) та отримаємо загальний розв'язок імпульсної задачі (1) – (3) у вигляді:

$$\begin{aligned} x(t, c_k) &= X_r(t) \left(W^+ \left(\alpha - \left((G[f, \gamma])(\cdot) \right) \right) + P_{W_k} c_k \right) + (G[f, \gamma])(t), \quad \forall c_k \in R^k \\ x(t, c_k) &= X_r(t) P_{W_k} c_k + X_r(t) W^+ \alpha - X_r(t) W^+ \left((G[f, \gamma])(\cdot) \right) + (G[f, \gamma])(t), \\ &\quad \forall c_k \in R^k. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок імпульсної задачі (1) – (3) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} x(t, c_k) &= X_k(t) c_k + X_r(t) W^+ \alpha - X_r(t) W^+ \left((G[f, \gamma])(\cdot) \right) + (G[f, \gamma])(t), \\ &\quad \forall c_k \in R^k, \end{aligned}$$

де $X_k(t) = X_r(t) P_{W_k}$.

Отже, доведено наступне твердження.

Теорема. Імпульсна крайова задача (1) – (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a, b]$ в диференціальній системі, $\gamma_i \in R^{m_i}$ в імпульсній умові та крайовій умові $\alpha \in R^{m_i}$ задовольняють ω лінійно незалежні умови

$$P_{W^*} \left[\alpha - v \left((G[f, \gamma])(\cdot) \right) \right] = 0$$

при цьому задача (1) – (3) має κ -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$\begin{aligned} x(t, c_k) &= X_k(t) c_k + X_r(t) W^+ \alpha - X_r(t) W^+ \left((G[f, \gamma])(\cdot) \right) + (G[f, \gamma])(t), \\ &\quad \forall c_k \in R^k, \end{aligned}$$

де $(G[f, \gamma])(t)$ – узагальнений оператор Гріна.

Література

1. Boichuk A., Langerova M., Ruzickova M., Voitushenko E. Systems of singular differential equations with pulse action // *Advances in Difference Equations* 2013, 186 (2013). <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-186>.
2. Zettl A. Adjoint and self-adjoint boundary value problems with interface conditions // *SIAM J. Appl. Math.* – 1968. – 16, №4. – P.851-859. <https://doi.org/10.1137/0116069>.
3. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd ed.). – Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2016. – 314 p.
4. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища школа, 2000 – 294 с.
5. Boichuk, O.A., Voitushenko, E.S. & Shehda, L.M. A Noetherian Impulsive Control Problem. *J Math Sci* 226, 254–259 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3531-0>.
6. Шегда Л.М. Вироджена крайова задача зі збурюючою матрицею при похідній // *Прикарпатський вісник НТШ: Число.* – 2020. – №1.(59) – С. 29-37. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2020-1\(59\)-29-37](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2020-1(59)-29-37)
7. Шегда Л.М. Застосування до теорії керування нетерової крайової задачі // *Прикарпатський вісник НТШ. Число.* – 2013. – № 1(21). – С. 41-44. <https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/179>

IMPULSE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DEGENERATED MATRIX AT DERIVATIVE**L. M. Shehda***Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;**76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str.15;**ph: +380(342) 727131; e-mail: shegda.luba@gmail.com*

In the article, there is considered a degenerate impulse boundary value problem for systems of ordinary differential equations with a matrix degenerate on the entire segment where the problem is considered, with respect to the derivative, for the case when the number of unknowns does not coincide with the number of boundary conditions. A criterion for the existence of solutions to a degenerate impulse boundary value problem is obtained, assuming that the degenerate differential system reduces to the central canonical form. For the problem under consideration, the conditions for the existence of solutions to a degenerate impulse boundary value problem are reduced to the solution of the algebraic system.

Key words: *canonical form, degenerate Noetherian impulsive problem, pseudoinverse matrix, orthoprojector.*