

Теорія ймовірностей та математична статистика ==

УДК 519.21+517.95

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-102-113

ЗБУРЕННЯ α -СТІЙКОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ТА ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДЕЯКОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ю.В. Гуцуляк, М.М. Осипчук

*Прикарпатський національний університет імені Василя
Стефаника;*

76018, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, Україна;

e-mail: yurii.hutsuliak@pnu.edu.ua, mykhailo.osypchuk@pnu.edu.ua

Методом збурення ротаційно інваріантного α -стійкого випадкового процесу побудовано явне представлення фундаментального розв'язку псевдодиференціального рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -c(-\Delta)^{\alpha/2} u(t, \cdot)(x) + (a, \nabla_{\beta} u(t, \cdot)(x)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

де Δ — оператор Лапласа, ∇_{β} — оператор “псевдоградієнта” порядку $0 < \beta < \alpha$ (задається символом $i|\lambda|^{\beta-1}\lambda$). Розглядається випадок фіксованих $1 < \alpha < 2$, $c > 0$ та сталого $a \in \mathbb{R}^d$.

Ключові слова: α -стійкий випадковий процес, збурення, псевдоградієнт, псевдодиференціальне рівняння.

1. Вступ

Ротаційно інваріантним (ізотропним, симетричним) α -стійким випадковим процесом називають випадковий процес Маркова в $\mathbb{R}^d$,

$d \in \mathbb{N}$, який визначається твірним оператором $c \cdot A$, $c > 0$, де оператор A задається своїм символом $(-|\lambda|^\alpha)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$ з $\alpha \in (1; 2]$. Як звичайно, ми використовуємо $|\cdot|$ для позначення модуля (норми, довжини) вектора в $\mathbb{R}^d$, а $(\cdot, \cdot)$ — для скалярного добутку таких векторів. Функція $(a(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$ є символом оператора A , якщо для функції $\varphi_\lambda(x) = e^{i(\lambda, x)}$ з довільним фіксованим $\lambda \in \mathbb{R}^d$ справджується рівність $A\varphi_\lambda(x) = a(\lambda)\varphi_\lambda(x)$. В певному розумінні можна записати, що $A = -(-\Delta)^{\alpha/2}$. Одним з аргументів на користь такого позначення є те, що символ оператора Лапласа рівний $-|\lambda|^2$, тобто $-|\lambda|^\alpha = -(|\lambda|^2)^{\alpha/2}$. Щільність ймовірності переходу згаданого випадкового процесу задається рівністю

$$g(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha} d\lambda, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Далі будемо вважати параметри $c > 0$ і $\alpha \in (1; 2)$ фіксованими. Задамо оператор ∇_β символом $(i|\lambda|^{\beta-1}\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$. Називатимемо цей оператор псевдоградієнтом порядку β .

Зауваження 1.1. При $\alpha = 2$ оператор A є оператором Лапласа і, взявши $c = \frac{1}{2}$, маємо вінерів процес. При $\beta = 1$ оператор $\nabla = \nabla_1$ є звичайним градієнтом, адже його символ рівний $i\lambda$.

Для достатньо гладких і обмежених разом зі своїми похідними функцій $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$ дія оператора ∇_β (при $0 < \beta < 2$, $\beta \neq 1$) може бути представлена наступним чином:

$$\nabla_\beta \varphi(x) = \frac{1}{\varkappa} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x+y) - \varphi(x) - (\nabla \varphi(x), y) \mathbb{I}_{1 < \beta < 2}}{|y|^{d+\beta+1}} y dy, \quad (1)$$

де стала $\varkappa$ вибирається з умови $\nabla_\beta \varphi_\lambda(x) = i|\lambda|^\beta \lambda \varphi_\lambda(x)$, в якій функція φ_λ означена вище, а $\mathbb{I}_{1 < \beta < 2}$ означає індикатор множини значень β , яка задається нерівностями $1 < \beta < 2$. Представлення (1) може бути доведене підстановкою в його праву частину функції φ_λ та обчисленням одержаного інтегралу.

Функція g є фундаментальним розв'язком псевдодиференціального рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = cAu(t, \cdot)(x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Тут $Au(t, \cdot)(x)$ вказує на дію оператора A на функцію $u(t, x)$ за змінною x . Метою цієї роботи є побудувати фундаментальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = cAu(t, \cdot)(x) + (a, \nabla_\beta u(t, \cdot)), t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

з деяким сталим коефіцієнтом $a \in \mathbb{R}^d$.

Зауваження 1.2. Існування фундаментального розв'язку рівняння (2) доведено в [2]. Тут буде встановлене його явне представлення.

Подібна задача при $\beta = \alpha - 1$ була розглянута в [1]. Деякі твердження з цієї роботи будуть адаптовані нами на випадок $\beta \in (0, \alpha)$.

2. Допоміжні результати

Як і в [1] означимо клас F_γ дійснозначних функцій $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^d}$, що є перетвореннями Фур'є

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x, \lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda$$

та таких, що $(|\lambda|^\gamma \Phi(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$ є абсолютно інтегровними функціями на всій області визначення.

Застосування оператора ∇_β до функції $\varphi \in F_\gamma$ приводить до рівності $\nabla_\beta \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} i|\lambda|^{\beta-1} \lambda \Phi(\lambda) e^{i(x, \lambda)} d\lambda, x \in \mathbb{R}^d$, якщо $0 < \beta \leq \gamma$.

Лема 2.1. (аналог лем 1 з [1]) Нехай $\varphi \in F_\beta$. Тоді для функції $f(x, y) = \varphi(x - y)$ справджується рівність

$$\nabla_\beta f(\cdot, y)(x) = -\nabla_\beta f(x, \cdot)(y).$$

Лема 2.2. (аналог лема 2 з [1]) Нехай $\varphi \in F_{m\beta}$ з деяким $m \in \mathbb{N}$. Тоді для функції $f(x, y) = \varphi(x - y)$ справджуються рівності

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\beta}^a\right)^k \left(\left(\nabla_{\beta}^a\right)^l f(\cdot, \cdot)(y)\right)(x) &= \left(\nabla_{\beta}^a\right)^l \left(\left(\nabla_{\beta}^a\right)^k f(\cdot, \cdot)(x)\right)(y) = \\ &= (-1)^l \left(\nabla_{\beta}^a\right)^{k+l} f(\cdot, y)(x), \end{aligned}$$

де $\nabla_{\beta}^a = (a, \nabla_{\beta})$, $a \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $k + l \leq m$.

Доведення тверджень майже дослівно повторюють доведення наведені в [1].

Зауважимо, що функція g може бути представлена у вигляді

$$g(t, x, y) = g_t(x - y), t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d,$$

де $g_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(x, \lambda)} e^{-ct|\lambda|^\alpha} d\lambda$. Крім того, функція $\left(e^{-ct|\lambda|^\alpha}\right)_{\lambda \in \mathbb{R}^d}$ при фіксованому $t > 0$ належить до кожного з класів $F_{m\beta}$ з довільним $m \in \mathbb{N}$. Отже, до функції $g(t, x, y)$ можна застосувати оператор ∇_{β}^a по кожній зі змінних x чи y довільну скінченну кількість раз в довільному порядку.

3. Основний результат

Теорема 1. Фундаментальний розв'язок рівняння (2) задається рівністю

$$G(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(|\lambda|^{\beta-1}ta + x - y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha} d\lambda, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Доведення. Відразу зауважимо, що в [2] доведена можливість будувати фундаментальний розв'язок рівняння (2) як розв'язок інтегропсевдодиференціального рівняння

$$G(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z) \nabla_{\beta}^a G(\tau, \cdot, y)(z) dz. \quad (3)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (3) у вигляді ($t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$)

$$G(t, x, y) = g(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z) V(\tau, z, y) dz,$$

де V задовольняє рівняння

$$V(t, x, y) = V_0(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t - \tau, x, z) V(\tau, z, y) dz, \quad (4)$$

в якому $V_0(t, x, y) = \nabla_\beta^a g(t, \cdot, y)(x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$.

Розв'язуватимемо рівняння (4) методом послідовних наближень, а саме, шукатимемо його розв'язок у вигляді суми ряду

$$V(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t, x, y), \quad (5)$$

де V_0 означено вище, а для кожного $k \geq 1$

$$V_k(t, x, y) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t - \tau, x, z) V_{k-1}(\tau, z, y) dz. \quad (6)$$

Скористаємось відомими (див. [3, Ch. 4]) оцінками ($t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d, 0 \leq N_1 < N_2$ — деякі сталі)

$$\frac{N_1 t}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x - y|\right)^{d+\alpha}} \leq g(t, x, y) \leq \frac{N_2 t}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x - y|\right)^{d+\alpha}}.$$

Крім того, з результатів роботи [3, Ch. 4] випливає наступна оцінка ($t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d, a \in \mathbb{R}^d$)

$$|\nabla_\beta^a g(t, x, y)| \leq |a| \cdot C_\beta \frac{1}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x - y|\right)^{d+\beta}},$$

де $C_\beta > 0$ — деяка стала.

Таким чином,

$$|V_0(t, x, y)| \leq |a| \cdot C_\beta \frac{1}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x - y|\right)^{d+\beta}}$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $C_\beta > 0$.

Враховуючи (6), можемо записати, що при $k \geq 1$ та всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$

$$|V_k(t, x, y)| \leq |a| \cdot C_\beta \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\left((t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x - z|\right)^{d+\beta}} |V_{k-1}(\tau, z, y)| dz.$$

Далі використаємо нерівність (див. [3, Ch. 4])

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\left((t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x - z|\right)^{d+\beta}} \cdot \frac{\tau^\delta}{\left(\tau^{\frac{1}{\alpha}} + |z - y|\right)^{d+\beta}} dz \leq \\ & \leq C \left[B\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 1 + \delta\right) + B\left(1, 1 + \delta - \frac{\beta}{\alpha}\right) \right] \frac{t^{\delta+1-\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x - y|\right)^{d+\beta}}, \end{aligned}$$

яка справджується при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $C > 0$, якщо тільки $0 < \beta < \alpha$, $\delta > 1 + \frac{\beta}{\alpha}$. Звідси індукцією по k одержуємо нерівність

$$\begin{aligned} |V_k(t, x, y)| \leq & (|a| C_\beta C)^k \prod_{j=1}^k \left[B\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 1 + (k-1) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + B\left(1, k \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) \right) \right] \frac{t^{k \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |x - y|\right)^{d+\beta}}. \end{aligned}$$

Це означає, що ряд (5) рівномірно по $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ і локально рівномірно по $t > 0$.

Доведемо за індукцією, що при $k \geq 0$

$$V_k(t, x, y) = (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!} \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(t, x, \cdot)(y) \quad (7)$$

при всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

При $k = 0$ (база індукції) рівність (7) правильна. Дійсно

$$V_0(t, x, y) = \nabla_\beta^a g(t, \cdot, y)(x) = -\nabla_\beta^a g(t, x, \cdot)(y)$$

згідно з твердженням леми 2.2.

Якщо (7) справджується при деякому $k \geq 0$, то (крок індукції)

$$\begin{aligned} V_{k+1}(t, x, y) &= \\ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_\beta^a g(t - \tau, \cdot, z)(x) \cdot (-1)^{k+1} \frac{\tau^k}{k!} \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(\tau, z, \cdot)(y) dz &= \\ = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_\beta^a g(t - \tau, \cdot, z)(x) \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(\tau, z, \cdot)(y) dz. \end{aligned}$$

Доведемо далі можливість винесення операторів ∇_β^a з-під знаку інтегралу по z . Для цього використаємо представлення (1) оператора ∇_β , обмежившись випадком $\beta < 1$. Випадок $1 < \beta < \alpha$ розглядається аналогічно. Введемо позначення

$$\triangle^u \varphi(x) = \varphi(x + u) - \varphi(x), \quad \square^u \varphi(x) = |\varphi(x + u)| + |\varphi(x)|.$$

Тоді можемо записати ($K = 1/\varkappa$)

$$\begin{aligned} & (\nabla_\beta^a)^{k+1} g(\tau, z, \cdot)(y) = \\ & = K^{k+1} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j, a)}{|u_j|^{d+\beta+1}} \triangle^{u_j} g(\tau, z, \cdot)(y) du_1 \dots du_{k+1}, \\ & \nabla_\beta^a g(t - \tau, \cdot, z)(x) = K \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_0, a)}{|u_0|^{d+\beta+1}} \triangle^{u_0} g(t - \tau, \cdot, z)(x) du_0. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 V_{k+1}(t, x, y) &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t - \tau, x, z) V_k(\tau, z, y) dz = \\
 &= K^{k+2} \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathbb{R}^d} dz \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(u_0, a)}{|u_0|^{d+\beta+1}} \Delta^{u_0} g(t - \tau, \cdot, z)(x) du_0 \quad (8) \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j, a)}{|u_j|^{d+\beta+1}} \Delta^{u_j} g(\tau, z, \cdot)(y) du_1 \dots du_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Підінтегральна функція в останній формулі може бути оцінена зверху за абсолютною величиною виразом

$$\begin{aligned}
 &\tau^k \frac{1}{|u_0|^{d+\beta}} \square^u \frac{t - \tau}{((t - \tau)^{1/\alpha} + |z - \cdot|)^{d+\alpha}}(x) \times \\
 &\times \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\beta}} \square^{u_j} \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha} + |\cdot - z|)^{d+\alpha}}(y).
 \end{aligned}$$

Інтеграл від нього за змінними (τ, z) по області $(0, t) \times \mathbb{R}^d$ не перевищує (див. [3, Ch. 4])

$$\begin{aligned}
 &const \cdot t^{k+2+1/\alpha} \frac{1}{|u_0|^{d+\beta}} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\beta}} \times \\
 &\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{C \in C(k+1, j)} \left(t^{1/\alpha} + \left| y + \sum_{l \in C} u_l - x - u_0 \right| \right)^{-d-\alpha}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

де $C(k+1, j)$ множина комбінацій з $k+1$ перших натуральних чисел по j . Така функція інтегровна за $(u_0, u_1, \dots, u_{k+1})$ по $D_\varepsilon = \prod_{j=0}^{k+1} \{|u_j| \geq \varepsilon\}$ для кожного $\varepsilon > 0$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Збіжність інтеграла $\int_{\mathbb{R}^d} V_0(t - \tau, x, z) V_k(\tau, z, y) dz$ дозволяє перейти в інтегралі від функції (9) по D_ε до границі при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Причому, ми можемо попередньо змінити потрібним чином порядок інтегрування.

Отже, в інтегралі з рівності (8) можна змінити порядок інтегрування і, враховуючи лінійність різницевого оператора Δ^u , одержати рівність

$$\begin{aligned} V_{k+1}(t, x, y) &= \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \nabla_\beta^a \left(\left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, \cdot, z) g(\tau, z, \cdot) dz(y) \right) (x) = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} \nabla_\beta^a \left(\left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(t, \cdot, \cdot)(y) \right) (x) = \\ &= \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)!} t^{k+1} \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+2} g(t, x, \cdot)(y). \end{aligned}$$

Це і доводить рівність (7). Тоді

$$V(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(t)^k}{k!} \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(t, x, \cdot)(y),$$

$$\begin{aligned} G(t, x, y) &= g(t, x, y) + \\ &+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(\tau)^k}{k!} \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(\tau, z, \cdot)(y) dz. \end{aligned}$$

Ряд в останній рівності допускає почленне інтегрування, тому

$$\begin{aligned} G(t, x, y) &= g(t, x, y) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z) \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(\tau, z, \cdot)(y) dz \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \\ &= g(t, x, y) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^d} g(t - \tau, x, z) g(\tau, z, \cdot) dz(y) = \\ &= g(t, x, y) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} \left(\nabla_\beta^a \right)^{k+1} g(t, x, \cdot)(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \nabla_\beta^a g(t, \cdot, y)(x). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\left(\nabla_{\beta}^a\right)^k g(t, \cdot, y)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(i|\lambda|^{\beta-1}(\lambda, a)\right)^k e^{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}} d\lambda,$$

то

$$G(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} \left(i|\lambda|^{\beta-1}(\lambda, a)\right)^k e^{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}} d\lambda. \quad (10)$$

Зауважимо, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i|\lambda|^{\beta-1}t(\lambda, a))^k$ збігається локально рівномірно по λ на $\mathbb{R}^d$. Тому для кожного $r > 0$ і $U_r = \{\lambda \in \mathbb{R}^d : |\lambda| \leq r\}$

$$\begin{aligned} \int_{U_r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i|\lambda|^{\beta-1}t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{U_r} (i|\lambda|^{\beta-1}t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k!} \int_{U_r} (i|\lambda|^{\beta-1}t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\} d\lambda \right| \leq \\ \leq \frac{(t|a|)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} (|\lambda|^{k\beta} \exp\{-ct|\lambda|^{\alpha}\}) d\lambda = R_k, \end{aligned}$$

а останній інтеграл можна легко обчислити і одержати

$$R_k = \frac{(t|a|)^k}{k!} \frac{S_d}{\alpha} (ct)^{-\frac{d+k\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{d+k\beta}{\alpha}\right),$$

де S_d — площа d -вимірної одиничної сфери, то ряд в правій частині рівності (11) збігається рівномірно по r на $(0, +\infty)$, бо

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = \frac{|a|t}{k+1} (ct)^{-\beta/\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{d+(k+1)\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+k\beta}{\alpha}\right)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Перейшовши в рівності (11) до границі при $r \rightarrow +\infty$, з врахуванням (10), одержимо

$$\begin{aligned} G(t, x, y) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i|\lambda|^{\beta-1} t(\lambda, a))^k \exp\{i(x-y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha\} d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i(|\lambda|^{\beta-1} t a + x - y, \lambda) - ct|\lambda|^\alpha\} d\lambda. \end{aligned}$$

А це і стверджувалось в теоремі. □

Зауваження 3.1. Представлене доведення теореми 1 хоч і дещо громіздке, але вказує на спосіб побудови фундаментального розв'язку рівняння (2), як збурення відповідного випадкового процесу. Простіше даний факт може бути доведений безпосередньою підстановкою функції G в рівняння (2).

Література

1. Бігун Г. С., Осипчук М. М. Явний вигляд фундаментального розв'язку одного псевдо-диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами. *Прикарпатський вісник НТШ. Число.* - 2015. №1(29), С. 123-131. <https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/148>
2. Бойко М. В., Осипчук М. М. Збурення ротаційно-інваріантного α -стійкого випадкового процесу оператором псевдоградієнта. *Прикарпатський вісник НТШ. Число.* - 2021. - №16(60). С. 20-31. [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2021-16\(60\)-20-32](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2021-16(60)-20-32)
3. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type. Operator theory: Adv. and Appl., 152, Birkhäuser Basel, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9>

Стаття надійшла до редакційної колегії 01.05.2025 р.

**PERTURBATION OF AN α -STABLE STOCHASTIC PROCESS
AND THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF A CERTAIN
PARABOLIC PSEUDODIFFERENTIAL EQUATION WITH
CONSTANT COEFFICIENTS**

Yu.V. Hutsuliak, M.M. Osypchuk

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;

76018, 57 Shevchenko street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;

e-mail: yurii.hutsuliak@pnu.edu.ua, mykhailo.osypchuk@pnu.edu.ua

Using the method of perturbation of a rotationally invariant α -stable stochastic process, an explicit representation of the fundamental solution of the pseudodifferential equation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -c(-\Delta)^{\alpha/2} u(t, \cdot)(x) + (a, \nabla_{\beta} u(t, \cdot)(x)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

where Δ is the Laplace operator, ∇_{β} is the “pseudogradient” operator of order $0 < \beta < \alpha$ (given by the symbol $i|\lambda|^{\beta-1}\lambda$). The case of fixed $1 < \alpha < 2$, $c > 0$ and constant $a \in \mathbb{R}^d$ is considered.

Key words: α -stable stochastic process, perturbation, pseudogradient, pseudodifferential equation.