

УДК 517.98

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-48-58

МУЛЬТИПЛІКАТИВНА ЗГОРТКА ДЛЯ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

В.В. Кравців, П.Ю. Долішняк, Р.Ю. Стахів*Прикарпатський національний університет**імені Василя Стефаника;**76018, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, Україна;**e-mail: viktorii.kravtsiv@pnu.edu.ua,**rostyslav.stakhiv.22@pnu.edu.ua, pavlo.dolishniak.22@pnu.edu.ua*

У цій статті розглянуто поняття мультиплікативної згортки для блочно-симетричних поліномів на нескінченновимірних просторах типу $\ell_p(\mathbb{C}^S)$. Розроблено операцію мультиплікативного зсуву та відповідний згортковий оператор для алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу. Показано, що така згортка є комутативною та асоціативною, і утворює комутативне напівкільце з одиницею на спектрі алгебри. Наведено оцінки для радіус-функції гомоморфізмів та доведено основні властивості, зокрема лінійність, неперервність та узгодженість з алгебраїчною структурою. Також запропоновано конструкцію елементів спектра з заданими значеннями на елементарних поліномах. Робота є узагальненням попередніх досліджень для простору $\ell_1(\mathbb{C}^S)$ на випадок довільного $1 < p < \infty$, і робить внесок у розвиток теорії симетричних аналітичних функцій у нескінченновимірному аналізі.

Ключові слова: блочно-симетричний поліном, блочно-симетрична аналітична функція, спектр, мультиплікативна згортка.

1. Вступ та попередні відомості

Симетричні та блочно-симетричні поліноми на скінченновимірних просторах є об'єктом дослідження комбінаторики та класичної теорії інваріантів [1, 13]. Дослідження симетричних поліномів на нескінченновимірних просторах почалося у роботі Немеровського та

Семенова [12] та продовжено у роботі [8]. Алгебри аналітичних та симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на комплексно-му банаховому просторі є стандартним об'єктом дослідження нелінійного функціонального аналізу і вивчалися у роботах [2, 3, 4, 6, 7] та інших. Зокрема, у роботах [6, 7] було введено поняття симетричного та мультиплікативного зсуву для елементів банахового простору ℓ_p , симетричної та мультиплікативної згортки для елементів спектру алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p та доведено основні результати для них. Блочно-симетричні поліноми та блочно-симетричні аналітичні функції обмеженого типу на нескінченновимірних просторах досліджувалися у роботах [5, 9, 10, 11]. У роботах [10, 11] було поширено поняття симетричного та мультиплікативного зсуву для елементів банахового простору $\ell_1(\mathbb{C}^s)$, симетричної та мультиплікативної згортки для елементів спектру алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_1(\mathbb{C}^s)$ та доведено основні результати для них.

Позначимо через $\ell_p(\mathbb{C}^s) = \ell_p(\mathbb{N}, \mathbb{C}^s)$, $1 \leq p < \infty$ простір послідовностей

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots), \quad (1)$$

таких що $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$ для $j \in \mathbb{N}$, для яких є збіжними ряди $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^s |x_j^{(r)}|^p$.

Вектори x_j з (1) є векторними координатами елемента x . Лінійний простір $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ з визначеною на ньому нормою

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^s |x_j^{(r)}|^p \right)^{1/p}$$

є банаховим простором. Поліном P на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ називається *блочно-симетричним* (чи *векторно-симетричним*) якщо:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}, \dots)$$

для будь-якої перестановки $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, де $S_{\mathbb{N}}$ — група перестановок на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ та $x_m \in \mathbb{C}^s$. Алгебру блочно-симетричних поліномів на $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$.

Зауважимо, що у комбінаториці, блочно-симетричні поліноми на скінченновимірних просторах відомі як симетричні поліноми Макмагона (див. [13]).

Позначимо через $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ мультиіндекс з невід'ємними цілими елементами $k_1, k_2, \dots, k_s$ та надалі будемо використовувати стандартні позначення $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_s$, $\mathbf{k}! = k_1! k_2! \dots k_s!$.

У роботі [9] було доведено, що поліноми

$$H^{\mathbf{k}}(x) = H^{k_1, k_2, \dots, k_s}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |\mathbf{k}| \geq [p]}}^s (x_j^{(r)})^{k_r} \quad (2)$$

утворюють алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$, $1 \leq p < \infty$, де $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$, $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$ і $[p]$ є ціле значення p . Це означає, що поліноми $H^{\mathbf{k}}$ алгебраїчно незалежні та кожен блочно-симетричний поліном з $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ може бути представлений єдиним чином через алгебраїчну комбінацію поліномів $H^{\mathbf{k}}$. У класичній теорії інваріантів [13] ці поліноми відомі як степеневі симетричні функції Макмагона.

У випадку простору $\ell_1(\mathbb{C}^s)$ є інші алгебраїчні базиси алгебри блочно-симетричних поліномів (див. [1, 11, 13]):

$$R^{\mathbf{k}}(x) = R^{k_1, k_2, \dots, k_s}(x) = \sum_{\substack{i_1^j < \dots < i_{k_j}^j \\ 1 \leq j \leq s}}^{\infty} \prod_{j=1}^s x_{i_1^j}^{(j)} \dots x_{i_{k_j}^j}^{(j)}. \quad (3)$$

У класичній теорії інваріантів [13] дані поліноми відомі як елементарні симетричні функції Макмагона.

Позначимо через $\mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій, які є обмеженими на обмежених множинах та $\mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ — спектр цієї алгебри, тобто множину усіх ненульових неперервних комплекснозначних гомоморфізмів.

У роботі [11] для $x, y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$, де $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$, $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)})$, $y_j = (y_j^{(1)}, \dots, y_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$ було введено операцію симетричного зсуву

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots)$$

та визначено оператор симетричного зсуву

$$T_y(f)(x) = f(x \bullet y).$$

Для довільних $\phi, \theta \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ та $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ введено симетричну згортку

$$(\phi \star \theta)(f) = \phi(y \mapsto \theta(T_y f)). \quad (4)$$

У роботі [11] було означено поняття радіус-функції $R(\varphi)$ комплексного гомоморфізму $\varphi \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ на випадок алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^s)$. Радіус-функція $R(\varphi)$ означається як інфімум усіх r таких, що φ є неперервним на $\mathcal{A}_{bvs}(rB_{\ell_p(\mathbb{C}^s)})$, де $\mathcal{A}_{bvs}(rB_{\ell_p(\mathbb{C}^s)})$ — алгебра усіх рівномірно неперервних блочно-симетричних аналітичних функцій на кулі $rB_{\ell_p(\mathbb{C}^s)} \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$ та обчислюється за формулою:

$$R(\varphi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}}, \quad (5)$$

де φ_n звуження функціонала φ на підпростір n -однорідних блочно-симетричних поліномів.

2. Мультиплікативна згортка на просторі $\ell_p(\mathbb{C}^s)$

У роботі [10] було введено означення мультиплікативного зсуву та мультиплікативної згортки у випадку простору $\ell_1(\mathbb{C}^s)$ та доведено певні їх властивості. Узагальнимо дані результати на випадок простору $\ell_p(\mathbb{C}^s)$.

Означення 2.1. Нехай $x = (x_1, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$, $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)})$, $y_j = (y_j^{(1)}, \dots, y_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$. Мультиплікативний зсув елементів x та y позначимо через $x \diamond y$ та означимо як вектор, який складається з елементів $x_i y_j = (x_i^{(1)} y_j^{(1)}, \dots, x_i^{(s)} y_j^{(s)})$, занумерованих у довільному порядку, $i, j \in \mathbb{N}$.

Твердження 2.2. Для довільних $x, y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$ будуть виконуватися наступні умови:

- (1) $x \diamond y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$ та $\|x \diamond y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$;
- (2) $H^{\mathbf{k}}(x \diamond y) = H^{\mathbf{k}}(x) \cdot H^{\mathbf{k}}(y)$, $|\mathbf{k}| \geq \lceil p \rceil$;
- (3) Якщо P — n -однорідний поліном на $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ і y — фіксований елемент з $\ell_p(\mathbb{C}^s)$, то функція $x \mapsto P(x \diamond y)$ також буде n -однорідним поліномом.

Доведення. Умова (1) випливає з

$$\|x \diamond y\|^p = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^s \left| x_i^{(r)} y_j^{(r)} \right|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^s \left| x_i^{(r)} \right|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^s \left| y_j^{(r)} \right|^p = \|x\|^p \cdot \|y\|^p.$$

Звідси випливає, що $x \diamond y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$.

З рівності:

$$\begin{aligned} H^{\mathbf{k}}(x \diamond y) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |\mathbf{k}| \geq \lceil p \rceil}}^s (x_i^{(r)} y_j^{(r)})^{k_r} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |\mathbf{k}| \geq \lceil p \rceil}}^s (x_i^{(r)})^{k_r} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |\mathbf{k}| \geq \lceil p \rceil}}^s (y_j^{(r)})^{k_r} = H^{\mathbf{k}}(x) \cdot H^{\mathbf{k}}(y) \end{aligned}$$

отримаємо умову (2). Умова (3) випливає з $\lambda(x \diamond y) = (\lambda x \diamond y)$. $\square$

Позначимо через π_y відображення $\pi_y : x \in \ell_p(\mathbb{C}^s) \rightarrow (x \diamond y) \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$. З твердження 2.2 випливає, що дане відображення є лінійним та неперервним. Нехай $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$. Очевидно, що $f \circ \pi_y$ є аналітичною та обмеженою на обмежених множинах функцією.

Крім того, $f(\sigma(x) \diamond y) = f(x \diamond y)$ для будь-якої перестановки $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Отже, $f \circ \pi_y \in H_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$. Оператор вигляду $M_y = f \circ \pi_y$ будемо називати *мультиплікативним згортковим оператором*. Очевидно, що $M_{\sigma(y)} = M_y$, $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ і $M_y(H^{\mathbf{k}}) = H^{\mathbf{k}}(y) \cdot H^{\mathbf{k}} \forall |\mathbf{k}| \geq \lceil p \rceil$.

Якщо P_n — n -однорідний неперервний поліном, то $\|M_y(P_n)\| \leq \|P_n\| \cdot \|y\|^n$. Оскільки $\pi_{y+z}(x) = (x \diamond (y+z)) = (x \diamond y) + (x \diamond z) = \pi_y(x) + \pi_z(x)$ та $\pi_{\lambda y}(x) = (x \diamond \lambda y) = \lambda(x \diamond y) = \lambda \pi_y(x)$, то $M_{\lambda y}(P_n) = \lambda^n M_y(P_n)$ та $M_{y+z}(P_n) = M_y(P_n) + M_z(P_n)$. Отже, відображення $y \in \ell_p(\mathbb{C}^s) \rightarrow M_y(P_n)$ також є n -однорідним неперервним поліномом. Звідси випливає наступне твердження

Твердження 2.3. Для будь-якого $y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$ мультиплікативний згортковий оператор M_y є неперервним гомоморфізмом на $\mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$.

У роботі [10] (твердження 3) було продемонстровано оцінку радіус-функції R для простору $\ell_1(\mathbb{C}^s)$. Використовуючи аналогічний підхід, доведемо наступне твердження:

Твердження 2.4. Для усіх $\theta \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))'$ і $\forall y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$ радіус-функцію неперервного гомоморфізму $\theta \circ M_y$ можна оцінити як

$$R(\theta \circ M_y) \leq R(\theta) \cdot \|y\|$$

і для фіксованого $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ функція $y \mapsto \theta \circ M_y(f)$ також буде належати $\mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$.

Доведення. Нехай $y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$. Звуження $\theta \circ M_y$ (відповідно θ) на підпростір n -однорідних блочно-симетричних поліномів позначимо через $(\theta \circ M_y)_n$ (відповідно θ_n). Тоді,

$$\|(\theta \circ M_y)_n\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \left| \theta_n \left(\frac{M_y(f_n)}{\|y\|^n} \right) \right| \cdot \|y\|^n \leq \|\theta_n\| \cdot \|y\|^n.$$

Отже,

$$R(\theta \circ M_y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|\theta_n\| \|y\|^n)^{\frac{1}{n}} = R(\theta) \|y\|.$$

Твердження того, що $y \mapsto \theta \circ M_y(f)$ належить $\mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ випливає з того, що елементами ряду Тейлора для функції $y \mapsto \theta \circ M_y(f) \in y \mapsto \theta \circ M_y(f_n)$, де f_n — елементи ряду Тейлора для функції f . $\square$

У роботі [10] було введено означення мультиплікативної згортки на випадок простору $\ell_1(\mathbb{C}^s)$. Узагальнимо дане означення на випадок простору $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ та доведемо деякі основні твердження у даному випадку.

Означення 2.5. Нехай $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ та $\theta \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))'$. Мультиплікативну згортку визначимо як

$$(\theta \diamond f)(x) = \theta[M_x(f)]$$

для кожного $x \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$.

З твердження 2.4 маємо, що $\theta \diamond f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$.

Означення 2.6. Для довільних $\phi, \theta \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))'$ мультиплікативну згортку $\phi \diamond \theta$ визначимо як

$$(\phi \diamond \theta)(f) = \phi(\theta \diamond f) \quad (6)$$

для кожної $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$.

Для гомоморфізму δ_y , який є значенням у точці $y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$, справедливим буде:

$$\begin{aligned} (\delta_y \diamond f)(x) &= \delta_y(M_x(f)) = (f \circ \pi_x)(y) = \\ &= f(\pi_x(y)) = f(x \diamond y) = f(\pi_y(x)) = M_y(f)(x). \end{aligned}$$

Очевидно, $\delta_x \diamond \delta_y = \delta_{x \diamond y}$.

Твердження 2.7. Нехай $\phi, \theta \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$. Тоді

- (1) $\phi \diamond \theta \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$;
- (2) $(\phi \diamond \theta)(H^{\mathbf{k}}) = \phi(H^{\mathbf{k}})\theta(H^{\mathbf{k}})$, $\forall |\mathbf{k}| \geq \lceil p \rceil$;

- (3) Напівгрупа $(\mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s)), \diamond)$ є комутативною і значення $y \tilde{x} = (1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$, де $1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_s)$, $0 = (\underbrace{0, \dots, 0}_s) \in \mathbb{C}^s$, $\delta_{\tilde{x}}$, є тотожним елементом.

Доведення. (1) $\phi \diamond \theta \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ випливає з мультиплікативності M_y (а отже, $\phi \diamond \theta$ є характером) та з нерівності $R(\phi \diamond \theta) \leq R(\phi)R(\theta)$, яку легко отримати з твердження 2.4.

- (2) Нехай $x, y \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$ і $\delta_x, \delta_y \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ — відповідні гомоморфізми, які є значеннями у точках. Тоді $(\delta_x \diamond \delta_y)(H^k) = H^k(x \diamond y) = H^k(x)H^k(y)$.

Нехай $\phi, \theta \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$. Тоді

$$(\theta \diamond H^k)(x) = \theta(M_x(H^k)) = \theta(H^k(x)H^k) = H^k(x)\theta(H^k).$$

Тому, $(\phi \diamond \theta)(H^k) = \phi(H^k\theta(H^k)) = \phi(H^k)\theta(H^k)$.

- (3) З останньої рівності випливає комутативність мультиплікативної згортки для H^k . Оскільки кожна функція $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ рівномірно наближається блочно-симетричними поліномами на обмежених множинах, які можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів вигляду (2), то мультиплікативна згортка також буде комутативною для будь-якої функції $f \in \mathcal{H}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$. Асоціативність згортки $\diamond$ випливає з

$$(\psi \diamond (\phi \diamond \theta))(H^k) = \psi(H^k)\phi(H^k)\theta(H^k) = ((\psi \diamond \phi) \diamond \theta)(H^k).$$

Підставимо в умову (2) замість $\theta = \delta_{\tilde{x}}$, де $\tilde{x} = (1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$. Отримаємо $(\phi \diamond \delta_{\tilde{x}})(H^k) = \phi(H^k)\delta_{\tilde{x}}(H^k) = \phi(H^k)H^k(\tilde{x}) = \phi(H^k)$. Отже, $\delta_{\tilde{x}}$ є тотожним елементом.

□

У роботі [10] було побудовано множину елементів $\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_1(\mathbb{C}^s))$ таку що $H^k(\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}) = \alpha_i$ при $k_i = 1$, а усі інші $k_j = 0, j \neq i, i = 1, \dots, s, |k| = 1$ та $H^k(\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}) = 0$ при $|k| > 1$. Побудуємо аналогічну множину елементів для випадку простору $\ell_p(\mathbb{C}^s)$, де p — натуральне число більше за 1.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{C}^s \setminus \{0\}$ та $0 = (\underbrace{0, \dots, 0}_s) \in \mathbb{C}^s$. Розглянемо послідовність елементів з простору $\ell_p(\mathbb{C}^s)$

$$\epsilon_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, \alpha, 0, \dots).$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ поставимо

$$v_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}(\epsilon_1(\alpha_1, \dots, \alpha_s) + \dots + \epsilon_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s)) \in \ell_p(\mathbb{C}^s).$$

Тоді $\delta_{v_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(H^{\mathbf{k}}) = \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_s^{k_s}$ при $|\mathbf{k}| = p$ та $\delta_{v_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(H^{\mathbf{k}}) = 0$ при $|\mathbf{k}| > p$. Зауважимо, що для будь-якого n $\|v_n\|^p = |\alpha_1|^p + \dots + |\alpha_s|^p$ та $R(\delta_{v_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}) \leq \|v_n\|$. Отже, $\delta_{v_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}$ належить спектру $\mathcal{A}_{ivs}(rB_{\ell_p(\mathbb{C}^s)})$ для $r > (|\alpha_1|^p + \dots + |\alpha_s|^p)^{\frac{1}{p}}$. З компактності спектру банахової алгебри отримаємо, що $\delta_{v_n(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}$ має точку скупчення $\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}$ у $\mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$. Тоді $\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(H^{\mathbf{k}}) = \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_s^{k_s}$ при $|\mathbf{k}| = p$ та $\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(H^{\mathbf{k}}) = 0$ при $|\mathbf{k}| > p$. Тоді з умови (2) твердження 2.7 випливає, що $\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}$ не є оборотним елементом.

Наслідок 2.8. *Напівгрупа $(\mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s)), \diamond)$ не є групою.*

З рівностей (4) та (6) випливає наступне твердження

Твердження 2.9. *Для довільних $\theta, \varphi, \phi \in \mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ виконується рівність*

$$\theta \diamond (\varphi \star \phi) = (\theta \diamond \varphi) \star (\theta \diamond \phi).$$

Наслідок 2.10. *Множина $(\mathcal{M}_{bvs}(\ell_p(\mathbb{C}^s)), \diamond, \star)$ є комутативним напівкільцем з одиницею.*

Література

1. Weyl H. *The classical groups: their invariants and representations*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973.

2. Aron R.M., Galindo P., Garcia D., Maestre M. Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions. *Trans. Am. Math. Soc.* 348, 543–559 (1996). <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-96-01553-X>
3. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space. *J. Reine Angew. Math.* 415, 51–93 (1991).
4. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. Weak-star continuous analytic functions. *Can. J. Math.* 47, 673–683 (1995). <https://doi.org/10.4153/CJM-1995-035-1>
5. Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. *Algebraic basis of the algebra of all symmetric continuous polynomials on the Cartesian product of ℓ_p -spaces*. *Axioms* 11, 41 (2022). <https://doi.org/10.3390/axioms11020041>
6. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions. *J. Math. Anal. Appl.* 395, 569–577 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.087>
7. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions. *Rev. Math. Complut.* 27, 575–585 (2014). <https://doi.org/10.1007/s13163-013-0128-0>
8. Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J.A. Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces. *J. Lond. Math. Soc.* 59, 681–697 (1999). <https://doi.org/10.1112/S0024610799007164>
9. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. *On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$* . *J. Funct. Spaces* Article ID 4947925 (2017). <https://doi.org/10.1155/2017/4947925>
10. Kravtsiv V.V., Zagorodnyuk A.V. *Multiplicative convolution on the algebra of block-symmetric analytic functions*. *J. Math. Sci.* 246 (2), 245–255 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04734-z>
11. Kravtsiv V.V., Zagorodnyuk A.V. *Spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type*. *Mat. Stud.* 58, 69–81 (2022). <https://doi.org/10.30970/ms.58.1.69-81>

12. Nemirovskii A., Semenov S. *On polynomial approximation of functions on Hilbert space*. *Mat. USSR-Sb.* 21, 255–277 (1973).
<https://doi.org/10.1070/SM1973v021n02ABEH002016>
13. Rosas M. *MacMahon symmetric functions, the partition lattice, and Young subgroups*. *J. Combin. Theory Ser. A* 96, 326–340 (2001).
<https://doi.org/10.1006/jcta.2001.3186>

Стаття надійшла до редакційної колегії 08.04.2025 р.

MULTIPLICATIVE CONVOLUTION FOR THE BLOCK-SYMMETRIC POLYNOMIALS

V.V. Kravtsiv, P.Y. Dolishniak, R.Y. Stakhiv

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;

76018, 57 Shevchenko street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;

e-mail: viktoriia.kravtsiv@pnu.edu.ua,

rostyslav.stakhiv.22@pnu.edu.ua, pavlo.dolishniak.22@pnu.edu.ua

This paper investigates the concept of multiplicative convolution for block-symmetric polynomials defined on infinite-dimensional spaces of the form $\ell_p(\mathbb{C}^S)$. A multiplicative shift operation and the corresponding convolution operator are developed for the algebra of block-symmetric analytic functions of bounded type. It is shown that the defined convolution is both commutative and associative, forming a commutative semiring with unity on the spectrum of the algebra. Estimates for the spectral radius function of homomorphisms are provided, and essential properties such as linearity, continuity, and compatibility with the algebraic structure are established. The construction of spectral elements with prescribed values on elementary polynomials is proposed. This work generalizes earlier results for the $\ell_1(\mathbb{C}^S)$ case to the broader setting of arbitrary $1 < p < \infty$, contributing to the theory of symmetric analytic functions in infinite-dimensional analysis.

Key words: *block-symmetric polynomial, block-symmetric analytic function, spectrum, multiplicative convolution.*