

УДК 517.98

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-24-38

СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА ДЕКАРТОВИХ ДОБУТКАХ ДІЙСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ АБСОЛЮТНО СУМОВНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

**М.М. Варварюк, Т.В. Васишлин, І.І. Никорович,
Р.В. Пономарьов**

*Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника;*

76018, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, Україна;

e-mail: mvarvaryuk97@gmail.com, taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua,

iryna.nyk@gmail.com, rostislavpon@gmail.com

Нехай $\ell_p^{(\mathbb{R})}$ — дійсний банахів простір всіх абсолютно сумовних у степені $p \in [1, +\infty)$ послідовностей дійсних чисел. Для $n \in \mathbb{N}$ нехай $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — декартів добуток банахових просторів $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})}, \dots, \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, де $p_1, \dots, p_n \in [1, +\infty)$. Розглянемо простір $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ як простір всіх послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, елементами яких є n -вимірні вектори $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})$, де $j \in \mathbb{N}$, таких, що послідовність $(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots)$ належить простору $\ell_{p_s}^{(\mathbb{R})}$ для кожного $s \in \{1, \dots, n\}$. Функцію f , визначену на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ називають симетричною, якщо

$$f((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)) = f((x_1, x_2, \dots))$$

для всіх $(x_1, x_2, \dots) \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ і для всіх бієкцій $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. В роботі доведено, що множина

$$\left\{ H_{p,k}^{(\mathbb{R})} : k \in \mathbb{Z}_+^n \text{ такий, що } k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n \geq 1 \right\}$$

є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, де поліноми $H_{p,k}^{(\mathbb{R})}$ визначено формулою

$$H_{p,k}^{(\mathbb{R})}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^n \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s}$$

для $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$.

Ключові слова: поліном, симетрична функція, алгебраїчний базис, банахів простір.

1. Вступ

При дослідженні поліноміальних відображень на банахових просторах, які мають симетричну структуру, наприклад, наділені симетричним базисом Шаудера, природно розглядати відображення, які зберігають цю симетричну структуру. Такі відображення називають симетричними. Алгебри симетричних неперервних поліномів у багатьох випадках виявляються скінченно- чи зліченнопородженими, що дозволяє, зокрема, отримувати описи спектрів відповідних алгебр симетричних аналітичних функцій, які є поповненнями згаданих алгебр симетричних поліномів.

В даній роботі розглядаються неперервні симетричні поліноми на декартовому добутку дійсних банахових просторів $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})}, \dots, \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ абсолютно сумовних у степенях, відповідно, $p_1, \dots, p_n$ послідовностей. В роботі [3] побудовано алгебраїчний базис алгебри згаданих вище поліномів для випадку $p_1 = \dots = p_n$. Для, не обов'язково рівних між собою, чисел $p_1, \dots, p_n$ в роботі [1] розглянуто комплексний випадок. В даній роботі побудовано зліченний алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на згаданому вище декартовому добутку. Зауважимо, що хоча даний декартів добуток є, у певному сенсі, підпростором відповідного декартового добутку комплексних просторів $\ell_{p_1}^{(\mathbb{C})}, \dots, \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$, згаданий результат не впливає автоматично із аналогічного результату для комплексного випадку, оскільки такі властивості, як, наприклад, алгебраїчна незалежність поліномів чи можливість зобразити поліном у вигляді певної алгебраїчної комбінації із коефіцієнтами з відповідного поля, у загальному випадку, не успадковуються при звуженні поліномів на підпростір.

2. Попередні відомості

Будемо позначати $\mathbb{N}$ та $\mathbb{Z}_+$ множини всіх додатних та невід'ємних цілих чисел відповідно.

Поліноми. Нехай X — векторний простір над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Відображення $A : X^m \rightarrow \mathbb{K}$, де $m \in \mathbb{N}$, називають m -лінійним, якщо A є лінійним відносно кожного зі своїх m аргументів. m -Лінійне відображення, яке є інваріантним відносно усіх можливих перестановок своїх аргументів, називають симетричним.

Відображення $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ називають m -однорідним поліномом, якщо існує m -лінійне симетричне відображення $A_P : X^m \rightarrow \mathbb{K}$ таке, що

$$P(x) = A_P(\underbrace{x, \dots, x}_m)$$

для кожного $x \in X$. Відображення A_P називають m -лінійним симетричним відображенням, асоційованим із поліномом P . Для зручності також визначають 0-однорідні поліноми з X в $\mathbb{K}$ як сталі відображення.

Відображення $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ називають поліномом, якщо його можна зобразити у вигляді

$$P = \sum_{j=0}^K P_j, \quad (1)$$

де $K \in \mathbb{Z}_+$ і $P_j \in j$ -однорідним поліномом для кожного $j \in \{0, \dots, K\}$.

Нехай X — нормований простір. Відомо, що m -лінійне відображення $A : X^m \rightarrow \mathbb{K}$ є неперервним тоді і лише тоді, коли значення

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_m\| \leq 1} |A(x_1, \dots, x_m)|$$

є скінченним. Аналогічно, поліном $P : X \rightarrow \mathbb{K}$ є неперервним тоді і лише тоді, коли значення

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |P(x)|$$

є скінченним. Для неперервного m -однорідного полінома P та для асоційованого з ним m -лінійного симетричного відображення A_P відомо (див. [2, теорема 2.2]), що

$$\|P\| \leq \|A_P\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|. \quad (2)$$

Системи твірних елементів алгебр. Нехай A — комутативна алгебра з одиницею над деяким полем $\mathbb{K}$. Для кожного полінома $Q : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ вигляду

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

де $\alpha_{(k_1, \dots, k_n)} \in \mathbb{K}$ і Ω є деякою непорожньою скінченною підмножиною множини $\mathbb{Z}_+^n$, визначимо відображення $Q_A : A^n \rightarrow A$ рівністю

$$Q_A(a_1, \dots, a_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}, \quad (3)$$

де $a_1, \dots, a_n \in A$ (вважаємо, що нульовий степінь a_j^0 елемента a_j дорівнює одиничному елементу алгебри A).

Нехай $a, a_1, \dots, a_n \in A$. Якщо існує поліном $Q : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ такий, що $a = Q_A(a_1, \dots, a_n)$, то елемент a називають *алгебраїчною комбінацією* елементів $a_1, \dots, a_n$.

Непорожню множину $G \subset A$ називають системою твірних елементів алгебри A , якщо кожен елемент алгебри A можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації деяких елементів множини G . Якщо, до того ж, кожне таке подання є єдиним, то множину G називають алгебраїчним базисом алгебри A .

Скінченну непорожню множину $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ називають алгебраїчно незалежною, якщо рівність $Q_A(a_1, \dots, a_n) = 0$ можлива лише, коли поліном Q є тотожним нулем. Нескінченну множину $A_1 \subset A$ називають *алгебраїчно незалежною*, якщо кожна її скінченна підмножина є алгебраїчно незалежною.

Кожен алгебраїчний базис є алгебраїчно незалежним. Крім того, кожна алгебраїчно незалежна система твірних елементів є алгебраїчним базисом.

Симетричні поліноми на декартових добутках просторів абсолютно сумовних послідовностей Нехай $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Будемо позначати $\ell_p^{(\mathbb{K})}$, де $p \in [1, +\infty)$, банахів простір над полем $\mathbb{K}$ всіх абсолютно сумовних у степені p послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, де $x_j \in \mathbb{K}$ для $j \in \mathbb{N}$, із нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $p = (p_1, \dots, p_n)$, де $p_1, \dots, p_n \in [1, +\infty)$. Розглянемо декартів добуток $\ell_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{K})}$ просторів $\ell_{p_1}^{(\mathbb{K})}, \dots, \ell_{p_n}^{(\mathbb{K})}$ як простір послідовностей

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad (4)$$

де $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}) \in \mathbb{K}^n$ для $j \in \mathbb{N}$, таких, що послідовність

$$(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots)$$

належить простору $\ell_{p_s}^{(\mathbb{K})}$ для кожного $s \in \{1, \dots, n\}$. Задамо на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{K})}$ норму

$$\|x\|_{\ell_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{K})}} = \left(\sum_{s=1}^n \left\| (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots) \right\|_{p_s}^{\max p} \right)^{1/\max p}.$$

Функцію $f : \ell_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{K})} \rightarrow \mathbb{K}$ називають симетричною, якщо

$$f(x \circ \sigma) = f(x)$$

для кожної послідовності $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{K})}$ і для кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, де

$$x \circ \sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots).$$

Нехай мультиіндекс $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ є таким, що $k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n \geq 1$. Визначимо поліном $H_{p,k}^{(\mathbb{K})} : \ell_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{K})} \rightarrow \mathbb{K}$ формулою

$$H_{p,k}^{(\mathbb{K})}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^n \left(x_j^{(s)}\right)^{k_s}. \quad (5)$$

Зауважимо, що поліном $H_{p,k}^{(\mathbb{K})}$ є симетричним. Згідно із [1, твердження 1], поліном $H_{p,k}^{(\mathbb{C})}$ є коректно визначеним і $\|H_{p,k}^{(\mathbb{C})}\| \leq n$, отже, є неперервним. Аналогічно до доведення згаданого твердження, можна довести відповідні результати для полінома $H_{p,k}^{(\mathbb{R})}$. Також в роботі буде використано наступний результат.

Теорема 2.1. (Див. [1, теорема 4]) Множина поліномів

$$\left\{ H_{p,k}^{(\mathbb{C})} : k \in \mathbb{Z}_+^n \text{ такий, що } k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n \geq 1 \right\} \quad (6)$$

є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$.

3. Основний результат

Лема 3.1. Нехай X — нормований простір над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і множина поліномів $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ така, що виконуються наступні умови:

1) для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ існує $m_j \in \mathbb{Z}_+$ таке, що поліном P_j є m_j -однорідним;

2) для кожного полінома $Q : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ вигляду

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \\ k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = l}} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

де l — деяке фіксоване ціле невід'ємне число і $\alpha_{(k_1, \dots, k_n)} \in \mathbb{K}$, рівність $Q_{\mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n) \equiv 0$, де поліном $Q_{\mathcal{P}(X)}$ визначено формулою (3), можлива лише тоді, коли $Q \equiv 0$.

Тоді множина $\{P_1, \dots, P_n\}$ є алгебраїчно незалежною.

Доведення. Доведемо алгебраїчну незалежність множини поліномів $\{P_1, \dots, P_n\}$. Нехай поліном $R: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ такий, що

$$R_{\mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n) \equiv 0. \quad (7)$$

Покажемо, що $R \equiv 0$. Оскільки R є поліномом, то його можна зобразити у вигляді

$$R(z_1, \dots, z_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

де $\alpha_{(k_1, \dots, k_n)} \in \mathbb{K}$ і Ω є деякою непорожньою скінченною підмножиною множини $\mathbb{Z}_+^n$. Нехай

$$J = \max_{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega} (k_1 m_1 + \dots + k_n m_n).$$

Запишемо поліном R у вигляді

$$R(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=0}^J R_j(z_1, \dots, z_n), \quad (8)$$

де

$$R_j(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega \\ k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = j}} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

для $j \in \{0, \dots, J\}$. Тоді

$$R_{\mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n) = \sum_{j=0}^J R_{j, \mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n).$$

Зауважимо, що для кожного $j \in \{0, \dots, J\}$ поліном $R_{j, \mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n)$ є j -однорідною компонентою полінома $R_{\mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n)$. Тому, згідно із рівністю (7), взявши до уваги відому формулу Мартіна для знаходження однорідних компонент за значеннями полінома, отримуємо рівність

$$R_{j, \mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n) \equiv 0.$$

Тому, згідно із умовою 2), $R_j \equiv 0$. Звідси, враховуючи рівність (8), $R \equiv 0$. Отже, множина $\{P_1, \dots, P_n\}$ є алгебраїчно незалежною. $\square$

Для кожного неперервного дійснозначного m -однорідного полінома P , визначеного на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, визначимо m -однорідний поліном $\widehat{P}: \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})} \rightarrow \mathbb{C}$ наступним чином. Нехай A_P — m -лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P . Визначимо відображення $A_{\widehat{P}}: \left(\ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}\right)^m \rightarrow \mathbb{C}$ формулою

$$A_{\widehat{P}}(z_1, \dots, z_m) = \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1+\dots+j_m} A_P^{(s)}\left(w_{j_1}(z_1), \dots, w_{j_m}(z_m)\right) \quad (9)$$

для $z_1, \dots, z_m \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$, де оператори

$$w_0, w_1: \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})} \rightarrow \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$$

визначені формулами

$$w_0(z) = ((\operatorname{Re} x_1^{(1)}, \dots, \operatorname{Re} x_1^{(n)}), (\operatorname{Re} x_2^{(1)}, \dots, \operatorname{Re} x_2^{(n)}), \dots),$$

$$w_1(z) = ((\operatorname{Im} x_1^{(1)}, \dots, \operatorname{Im} x_1^{(n)}), (\operatorname{Im} x_2^{(1)}, \dots, \operatorname{Im} x_2^{(n)}), \dots)$$

для кожного $z = ((x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}), (x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)}), \dots) \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$. Зауважимо, що оператори w_1 і w_2 є лінійними, неперервними і

$$\|w_0\| = \|w_1\| = 1. \quad (10)$$

Можна перевірити, що $A_{\widehat{P}}$ є m -лінійним симетричним відображенням. Із неперервності відображень A_P, w_0 і w_1 випливає неперервність відображення $A_{\widehat{P}}$. Згідно із формулою (9), враховуючи рівність (10),

$$\|A_{\widehat{P}}\| \leq 2^m \|A_P\|. \quad (11)$$

Нехай $\widehat{P}$ — звуження відображення $A_{\widehat{P}}$ на діагональ. Оскільки відображення A_P є неперервним і m -лінійним, то відображення $\widehat{P}$ є неперервним m -однорідним поліномом. Згідно з (2), (9) і (11),

$$\|\widehat{P}\| \leq \|A_{\widehat{P}}\| \leq 2^m \|A_P\| \leq \frac{(2m)^m}{m!} \|P\|. \quad (12)$$

Зауважимо, що $\widehat{P_1 P_2} = \widehat{P_1} \widehat{P_2}$ для кожних неперервних поліномів $P_1, P_2 : \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$, які є, відповідно, m_1 - та m_2 -однорідними, де $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Продовжимо оператор “ $\widehat{}$ ” за лінійністю на всі неперервні поліноми на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, поклавши

$$\widehat{P} = \widehat{P_0} + \widehat{P_1} + \dots + \widehat{P_K} \quad (13)$$

для кожного неперервного полінома $P : \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ вигляду (1).

Лема 3.2. Для кожного неперервного полінома $P : \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ поліном $\widehat{P} : \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})} \rightarrow \mathbb{C}$, визначений формулою (13), є неперервним.

Доведення. Нехай $P : \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ — довільний неперервний поліном. Розглянемо зображення цього полінома у вигляді (1). Кожна m -однорідна компонента P_m , де $m \in \{0, \dots, K\}$, в цьому зображенні є неперервною, тому значення $\|P_m\|$ є скінченним. Тому, згідно із рівністю (13) та нерівністю (12),

$$\|\widehat{P}\| \leq \sum_{m=0}^K \|\widehat{P_m}\| \leq \sum_{m=0}^K \frac{(2m)^m}{m!} \|P_m\| < +\infty.$$

Як наслідок, поліном $\widehat{P}$ є неперервним. □

Лема 3.3. Для кожного неперервного симетричного полінома $P : \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ поліном $\widehat{P} : \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})} \rightarrow \mathbb{C}$, визначений формулою (13), є симетричним.

Доведення. Нехай $P : \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ — довільний неперервний симетричний поліном. Розглянемо зображення цього полінома у вигляді (1). Кожна m -однорідна компонента P_m , де $m \in \{0, \dots, K\}$, в цьому зображенні є симетричною. Звідси випливає, що

$$A_{P_m}(x_1 \circ \sigma, \dots, x_m \circ \sigma) = A_{P_m}(x_1, \dots, x_m)$$

для кожних $x_1, \dots, x_m \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ і для кожної бієкції $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, де A_{P_m} — m -лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P_m . Тому, згідно з рівністю (9), зважаючи на рівності $w_0(z \circ \sigma) = w_0(z)$ і $w_1(z \circ \sigma) = w_1(z)$,

$$\begin{aligned} \widehat{P_m}(z \circ \sigma) &= A_{\widehat{P_m}}(\underbrace{z \circ \sigma, \dots, z \circ \sigma}_m) \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1+\dots+j_m} A_{P_m}(w_{j_1}(z \circ \sigma), \dots, w_{j_m}(z \circ \sigma)) \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1+\dots+j_m} A_{P_m}(w_{j_1}(z) \circ \sigma, \dots, w_{j_m}(z) \circ \sigma) \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1+\dots+j_m} A_{P_m}(w_{j_1}(z), \dots, w_{j_m}(z)) \\ &= \widehat{P_m}(z) \end{aligned}$$

для всіх $z \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$ і всіх бієкцій $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Отже, поліном $\widehat{P_m}$ є симетричним для кожного $m \in \{0, \dots, K\}$. Звідси, зважаючи на рівність (13), випливає, що поліном $\widehat{P}$ є симетричним. $\square$

Твердження 3.1. Нехай Γ — довільна індексна множина. Нехай для кожного $\gamma \in \Gamma$ визначено деякий неперервний m_γ -однорідний поліном $P_\gamma : \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$, де $m_\gamma \in \mathbb{N}$. Припустимо, що множина поліномів $\{\widehat{P}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ є алгебраїчно незалежною. Тоді множина поліномів $\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ теж є алгебраїчно незалежною.

Доведення. Нехай $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ — довільна скінченна підмножина індексної множини Γ . Покажемо, що множина поліномів $\{P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_n}\}$ є алгебраїчно незалежною. Доведемо, що ця множина задовольняє умови леми 3.1. Нехай поліном $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ вигляду

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \\ k_1 m_{\gamma_1} + \dots + k_n m_{\gamma_n} = l}} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

де l — деяке фіксоване ціле невід’ємне число і $\alpha_{(k_1, \dots, k_n)} \in \mathbb{R}$, такий, що $R \equiv 0$, де

$$R = Q_{\mathcal{P}(\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})})}(P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_n}).$$

Покажемо, що $Q \equiv 0$. Зауважимо, що R є неперервним l -однорідним поліномом на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ і

$$\widehat{R} = Q_{\mathcal{P}(\ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})})}(\widehat{P}_{\gamma_1}, \dots, \widehat{P}_{\gamma_n}). \quad (14)$$

Згідно з нерівністю (12)

$$\|\widehat{R}\| \leq \frac{(2l)^l}{l!} \|R\|.$$

Тому, враховуючи, що $R \equiv 0$, отримуємо, що $\widehat{R} \equiv 0$. Як наслідок, зважаючи на рівність (14) та на алгебраїчну незалежність множини $\{\widehat{P}_{\gamma_1}, \dots, \widehat{P}_{\gamma_n}\}$, отримуємо, що $Q \equiv 0$. Таким чином, для множини $\{P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_n}\}$ задовольняються умови леми 3.1. Тому ця множина є алгебраїчно незалежною.

Отже, кожна скінченна підмножина множини $\{P_{\gamma} : \gamma \in \Gamma\}$ є алгебраїчно незалежною. Тому ця множина є алгебраїчно незалежною. Твердження доведено. $\square$

Дослідимо властивості множини

$$\left\{ H_{p,k}^{(\mathbb{R})} : k \in \mathbb{Z}_+^n \text{ такий, що } k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n \geq 1 \right\}, \quad (15)$$

де поліноми $H_{p,k}^{(\mathbb{R})}$ визначено формулою (5). Зауважимо, що

$$\widehat{H_{p,k}^{(\mathbb{R})}} = H_{p,k}^{(\mathbb{C})} \quad (16)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що $k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n \geq 1$.

Наслідок 3.1. Множина поліномів (15) є алгебраїчно незалежною.

Доведення. Згідно із теоремою 2.1, множина поліномів (6) є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$. Тому, зокрема, множина (6) є алгебраїчно незалежною. Як наслідок, зважаючи на рівність (16), згідно із твердженням 3.1, множина поліномів (15) є алгебраїчно незалежною. $\square$

Твердження 3.2. *Кожен неперервний симетричний m -однорідний поліном P , який діє з $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ в $\mathbb{R}$, є алгебраїчною комбінацією елементів множини (15).*

Доведення. Згідно із лемами 3.2 та 3.3, m -однорідний поліном $\hat{P}$ є неперервним і симетричним. Отже, поліном $\hat{P}$ належить до алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$. Тому, як наслідок із теореми 2.1, поліном $\hat{P}$ можна подати у вигляді алгебраїчної комбінації елементів множини (6), тобто у вигляді

$$\hat{P}(z) = \sum_{\substack{l: \Gamma_m \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=m}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_m \\ l(k)>0}} \left(H_{p,k}^{(\mathbb{C})}(z) \right)^{l(k)} \quad (17)$$

для кожного $z \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{C})}$, де $\alpha_l \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma_m = \{k \in \mathbb{Z}_+^n : k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n \geq 1 \text{ та } |k| \leq m\}$$

$$\text{і } \varkappa(l) = \sum_{k \in \Gamma_m} |k| l(k).$$

Оскільки поліноми P і $H_{p,k}^{(\mathbb{R})}$ є звуженнями, відповідно, поліномів $\hat{P}$ і $H_{p,k}^{(\mathbb{C})}$ на простір $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, то із рівності (17) отримуємо рівність

$$P(x) = \sum_{\substack{l: \Gamma_m \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \varkappa(l)=m}} \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_m \\ l(k)>0}} \left(H_{p,k}^{(\mathbb{R})}(x) \right)^{l(k)} \quad (18)$$

для кожного $x \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$.

Покажемо, що усі коефіцієнти α_l є дійсними числами. Оскільки усі значення полінома P є дійсними числами, то

$$P(x) - \overline{P(x)} = 0 \quad (19)$$

для кожного $x \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Із рівності (18) випливає, що

$$P(x) - \overline{P(x)} = 2i \sum_{\substack{l: \Gamma_m \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \kappa(l)=m}} \text{Im } \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_m \\ l(k)>0}} \left(H_{p,k}^{(\mathbb{R})}(x) \right)^{l(k)} \quad (20)$$

для кожного $x \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Із рівностей (19) та (20) випливає рівність

$$0 = \sum_{\substack{l: \Gamma_m \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \kappa(l)=m}} \text{Im } \alpha_l \prod_{\substack{k \in \Gamma_m \\ l(k)>0}} \left(H_{p,k}^{(\mathbb{R})}(x) \right)^{l(k)} \quad (21)$$

для кожного $x \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Таким чином, отримали зображення нуля у вигляді алгебраїчної комбінації з дійсними коефіцієнтами елементів множини (15). Згідно із наслідком 3.1, множина (15) є алгебраїчно незалежною. Тому із отриманого зображення випливає, що усі коефіцієнти $\text{Im } \alpha_l$ дорівнюють нулю. Тому усі коефіцієнти α_l є дійсними числами.

Таким чином, зображення (18) є зображенням полінома P у вигляді алгебраїчної комбінації з дійсними коефіцієнтами елементів множини (15). Твердження доведено. $\square$

Наслідок 3.2. *Кожен неперервний симетричний поліном P , який діє з $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ в $\mathbb{R}$, є алгебраїчною комбінацією елементів множини (15).*

Доведення. Нехай $P: \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервний симетричний поліном вигляду (1). Згідно із твердженням 3.2, кожна однорідна компонента полінома P є алгебраїчною комбінацією елементів множини (15). Сума таких алгебраїчних комбінацій є алгебраїчною комбінацією, яка дорівнює поліному P . Наслідок доведено. $\square$

Теорема 3.1. Множина поліномів (15) є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$.

Доведення. Згідно із наслідком 3.1, множина (15) є алгебраїчно незалежною. Згідно із наслідком 3.2, множина (15) є системою твірних елементів алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Тому множина (15) є алгебраїчним базисом цієї алгебри. $\square$

Література

1. Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. *Algebraic basis of the algebra of all symmetric continuous polynomials on the Cartesian product of ℓ_p -spaces*, Axioms, **11** (2022), no. 2, art. no. 41. <https://doi.org/10.3390/axioms11020041>
2. Mujica J. *Complex Analysis in Banach Spaces*. North Holland, 1986.
3. Vasylyshyn T. *Symmetric functions on spaces $\ell_p(\mathbb{R}^n)$ and $\ell_p(\mathbb{C}^n)$* , Carpathian Math. Publ., **12** (2020), no. 1, 5–16. <https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.5-16>

Стаття надійшла до редакційної колегії 07.04.2025 р.

SYMMETRIC POLYNOMIALS ON CARTESIAN PRODUCTS OF REAL BANACH SPACES OF ABSOLUTELY SUMMABLE SEQUENCES

**M.M. Varvariuk, T.V. Vasylyshyn, I.I. Nykorovych,
R.V. Ponomarov**

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, 57 Shevchenko street, Ivano-Frankivsk, Ukraine;
e-mail: mvarvaryuk97@gmail.com, taras.vasylyshyn@pnu.edu.ua,
iryna.nyk@gmail.com, rostislavpon@gmail.com*

Let $\ell_p^{(\mathbb{R})}$ be the real Banach space of all absolutely summable in the power $p \in [1, +\infty)$ sequences of real numbers. For $n \in \mathbb{N}$, let $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ be the Cartesian product of Banach spaces $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})}, \dots, \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, where $p_1, \dots, p_n \in [1, +\infty)$. We consider the space $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ as the space of all sequences $x = (x_1, x_2, \dots)$ of n -dimensional vectors $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})$, where $j \in \mathbb{N}$, such that the sequence $(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots)$ belongs to the space $\ell_{p_s}^{(\mathbb{R})}$ for every $s \in \{1, \dots, n\}$. A function f defined on the space $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ is called symmetric if

$$f((x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)) = f((x_1, x_2, \dots))$$

for every $(x_1, x_2, \dots) \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ and for every bijection $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. We show that the set

$$\left\{ H_{p,k}^{(\mathbb{R})} : k \in \mathbb{Z}_+^n \text{ such that } k_1/p_1 + \dots + k_n/p_n \geq 1 \right\}$$

is an algebraic basis of the algebra of all symmetric continuous real-valued polynomials on the space $\ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, where $H_{p,k}^{(\mathbb{R})}$ is defined by

$$H_{p,k}^{(\mathbb{R})}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{s=1 \\ k_s > 0}}^n (x_j^{(s)})^{k_s}$$

for $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times \ell_{p_n}^{(\mathbb{R})}$.

Key words: polynomial, symmetric function, algebraic basis, Banach space.