

УДК 621.643: 624.21

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-227-243

ОТРИМАННЯ МАТРИЦІ ПОДАТЛИВОСТІ НЕСУЧОГО КАНАТУ ОДНОПРОЛІТНОГО ВИСЯЧОГО ТРУБОПРОВОДУ

Є. Й. Ріпецький, Р. Й. Ріпецький, О. І. Непеляк

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;

76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;

e-mail: evgeniyripetsky@gmail.com, ripetskyi.roman@gmail.com

У роботі розглянуто питання розробки дискретної моделі несучого канату висячого трубопроводу, в якій точки кріплення підвісок одночасно є точками дискретизації параметрів канату. Для отримання матриці податливості несучого канату виконано моделювання поведінки двох процесів: провисання несучого канату під дією власної ваги і додаткового навантаження. Конструювання дискретної моделі відбулося у два етапи. Спочатку було отримано значення вертикальних координат у випадку симетричного навантаження. На другому етапі відбулася верифікація отриманої моделі та її поширення на асиметричне навантаження.

Застосування чисельних методів розрахунку на основі дискретної моделі дозволило отримати координати вузлових точок канату в двох крайніх положеннях – початковому і під дією п'яти рівних сил по 20 КН, що були прикладені до вузлів. На проміжку зміни додаткового силового навантаження $[0...20 \text{ КН}]$ здійснено лінеаризацію залежності “сила – переміщення вузла”. Це дозволило визначити долі кожної сили в загальному векторі переміщень вузлів. На підставі цього було отримано лінеаризовану матрицю податливості гнучкого несучого канату з нелінійними характеристиками системи “трубопровід – несучий канат”. Показано приклад використання матриці податливості для визначення переміщень вузлів канату при несиметричному додатковому навантаженні.

Ключові слова: *несучий канат, висячий трубопровід, прольот, стріла прогину, матриця податливості, числові методи, дискретна модель*

Вступ. *Різноманітність природних умов в районах пролягання трубопроводів змусило проектувальників застосовувати оригінальні рішення стосовно конструкцій надземних переходів. Загальною тенденцією їх проектування є зниження металоємності, розробка найпростіших методів монтажу і технологічність виготовлення конструкцій переходів. Детальний аналіз цих рішень призвів до появи ще більш еко-*

номічних конструкції переходів. Цьому сприяють наукові дослідження поширених систем переходів із залученням сучасних засобів проектування, в основі яких лежать сучасні принципи моделювання [1].

Одним із методів надземної прокладки трубопроводів через природні та штучні перешкоди є висячі конструкції, в яких підвішений трубопровід підтримується натягнутим гнучким канатом. Такі гнучкі системи є ефективним конструктивним рішенням для складних умов прокладки, так як дозволяють значно збільшити довжину прогону на переходах [2].

Однак їх експлуатація вимагає врахування багатьох зовнішніх факторів, серед яких є надійність підвісної системи, схильність до деформацій та коливань [3].

Постановка проблеми. Основним несучим елементом висячих конструкцій є головний канат, який через систему підвісок з'єднаний з трубопроводом, утворюючи гнучку систему “трубопровід – несучий канат” (рис. 1).



Рис. 1. Загальний вигляд несучої системи висячого трубопроводу на ділянці надземного переходу через водну перешкоду

Елементи канатів в цій системі, на відміну від інших типів несучих елементів, таких як металеві ванти, мають меншу жорсткість і працюють лише на розтяг. Наявність пружних елементів у системі “трубопровід – несучий канат” утворює геометрично змінну конструкцію, що сприяє виникненню коливних процесів. Під дією гравітаційних сил ці процеси є найбільш вираженими у вертикальній площині. Оскільки несучий канат з'єднаний з більш жорстким трубопроводом через підвіс-

ки, що розташовані з певним інтервалом, то переміщення контактних вузлів будуть обмежені деформацією трубопроводу, що дозволяє вважати ці коливання малими.

Таким чином, нелінійну канатну підвіску, з точки зору коливного процесу, можна інтерпретувати як лінійний процес при відносно малих амплітудах коливань.

Отримання лінеаризованої матриці податливості гнучкого несучого канату з нелінійними характеристиками дозволить описати його поведінку при відхиленні від початкового стану статичної рівноваги під дією несиметричного навантаження.

Найбільш доцільно фіксувати прирости вертикальних переміщень вузлів, за якими можна визначити новий статичний стан. Такий підхід отримав назву розрахунку за існуючою схемою. Він передбачає використання в якості вхідних даних початкових координат розміщення вузлів канатної підвіски, а величина приросту переміщень розраховуються на підставі дискретної моделі силового навантаження [4]. Початкові координати визначаються на основі геодезичних вимірів з використанням високоточних технологій [5].

Численні дискретні методи розрахунку деформаційних процесів при одночасній дії кількох сил передбачають використання матриці податливості. Для лінійних процесів матриця податливості буде складатися з постійних елементів, тоді як канатна система в силу своєї нелінійності потребує спочатку процедури лінеаризації.

Мета роботи. Отримати лінеаризовану матрицю податливості гнучкого несучого канату з нелінійними характеристиками системи “трубопровід – несучий канат” на основі дискретної моделі, яка описує поведінку канату при його відхиленні від початкового стану статичної рівноваги під дією несиметричного навантаження.

Огляд літератури. Питанню розробки моделей статичного та динамічного навантаження несучих канатів приділено значну увагу з урахуванням особливостей сфер їх застосування. Канатні системи як несучі елементи широко використовуються не лише у різноманітних висячих спорудах, таких як мости, трубопроводи тощо [2-5], але й у підйомно-транспортних засобах, що працюють у регіонах із важкодоступним рельєфом. У останньому випадку канат поєднує несучу функцію з транспортною. Прикладом є обладнання для транспортування деревини [7-9].

В обох випадках у розрахункових схемах основу складає несучий канат, що провисає між двома щоглами під дією власної ваги та додаткових сил. Особливість конструкції визначається кількістю прикладених сил до канату. Так, для мостів і трубопроводів кількість прикладених сил дорівнюватиме кількості канатних підвісок, які передають несучому канату частину ваги підвишеного деформованого тіла.

В розрахункових схемах підйомно-транспортних машин до канату

буде прикладена всього одна сила від рухомої каретки з транспортованим вантажем. Під час руху каретки по несучому канату точка прикладення сили змінює своє положення [9]. Другою їх особливістю є ще те, що технологічний цикл підйомно-транспортної машини працює за маятниковою схемою. Це означає, що цикл супроводжується чередування транспортного режиму з холостим ходом. В останньому випадку несучий канат провисає під власною вагою [8].

Цей режим мало характерний для канатної підвіски висячого трубопроводу. Він проявляється лише на початковій стадії монтажу, коли канат ще знаходиться під впливом тільки власної ваги. Після з'єднання канату з трубопроводом під дією ваги трубопроводу канат змінює свій нарис і займає нове статичне положення. Коли по трубопроводу починають транспортувати продукт, наприклад, газ або нафту, то додаткове навантаження передається від трубопроводу до канату. Під час експлуатації трубопроводу також можуть спостерігатися зміни маси прокачаного продукту, що викликають відповідні зміни в положенні канатній системі [1, 2].

Відмічені процеси мають споріднену аналогію з конструкціями висячих мостів. Так, конструктори висячих мостів виділяють в поведінці несучого канату два різних режими роботи, які описуються іншими фізичними законами. У першому випадку вирішуються питання вільного провисання канату з отриманням рівняння його нарису. У другому випадку відбуваються пружні деформації канату під дією додаткових сил від підвішених мас, що проявляється у вертикальних переміщеннях його точок [10].

Відмінність розглянутих процесів полягає у тому, що в першому випадку на статичний стан рівноваги канату впливає потенціальна енергія гравітаційних сил, а в другому – потенціальна енергія деформації.

Теоретичний розв'язок даних задач ґрунтується на положеннях механіки гнучкої нитки і є добре відомим. Важка нитка, що знаходиться між двома опорами, розташованими на одній висоті, провисає згідно з рівнянням цепної лінії, яке описується гіперболічним косинусом [11].

Зокрема, наближену форму канату можна описати у вигляді параболи, що є основою для розв'язку практичних задач [12].

На основі робіт [10-12] зроблено наступні висновки, які використано при моделюванні канатної системи підвішеного трубопроводу:

1. В інженерних розрахунках функцію провисання канату під власною вагою апроксимують параболою з параметрами довжина прольоту – L і стрілою прогину f :

$$y = \frac{4f}{L^2} \cdot x(L - x) \quad (1)$$

Похибка апроксимації цепної лінії параболою становить менше 1%;

2. Зусилля натягу по довженні канату змінюється на 1,05-1,10, що дає підставу вважати величину

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = 1.05 \dots 1.10, \quad T \approx \text{const.} \quad (2)$$

3. Матричну форму запису рівнянь статички для вузлових точок несучого канату.

На основі цих положень розглянемо особливості моделювання несучих канатних систем.

Почнемо з більш простих моделей – підйомно-транспортних систем. Їх особливістю є наявність двох режимів: вільного провисання канату та навантаження однією силою від вантажу.

Досліджуючи процеси провисання канату завантаженого власною вагою автори [13] мали прагненням отримати точний аналітичний розв'язок рівняння цепної лінії для різних конструктивних схем. Кожна така задача вимагала свого індивідуального підходу, що проявилось в особливостях розрахункових схем зі своїми специфічними початковими та граничними умовами.

Навантаження несучого канату в конструкціях висячих мостів та трубопроводів відрізняються від підйомно-транспортних машин тим, що несучий канат сприймає масу підвішеного тіла одразу кількома підвісками. Точки їх кріплення до канату розміщено з певним інтервалом по довжині прольоту. Такі моделі зображають у вигляді балки на двох крайніх опорах, яка додатково утримується несучим канатом через систему підвісок.

Принципи розробки еквівалентних розрахункових схем для силового аналізу підвісних мостів наведено в статті [14]. Автори поставили за мету визначити силове навантаження на головний канат та опорні вежі підвісного моста для задач попереднього проектування чотирьох-прольотної конструкції. У запропонованій моделі мостове полотно замінено чотирма балками, які утримуються головним канатом. Геометричними характеристиками проектного розрахунку є довжина прольоту, висота опор та провисання головного канату (кабелю). Навантаження на мостову конструкцію зведено до двох видів: постійного та додаткового. Постійне навантаження рівномірно розподілене по довженні прольоту, а додаткове діє лише на певних ділянках балки. Задача була спрямована на пошук реакцій горизонтальних та вертикальних зусиль, що діють на вершини опор, а це в свою чергу дозволяє визначити їх деформації. Значну увагу в статті автори приділили й поведінці несучого канату, визначаючи його деформацію.

У запропонованій моделі враховуються три види жорсткостей: балки, опор та головного кабелю. Усі жорсткості замінені на еквівалентні: згинальну жорсткість балки, жорсткість опор та осьову жорсткість головного канату.

На основі рівняння рівноваги тіл для кожної вежі та з урахуванням граничних умов на кінцях веж були сформульовані нелінійні рівняння навантаження-відхилення в матричній формі, що трактується авторами як спрощена модель підвісного моста. На прикладі підвісного мосту з чотирма прольотами було проаналізовано реакції біля основ веж та відхилення їх вершин для шести випадків дії тимчасового навантаження.

Підводячи підсумок огляду даної статті [14] відзначимо, що вона відображає сучасні тенденції моделювання підвісних мостів. В методології дослідження присутні моменти отримання приведених жорсткостей, а на їх основі матричний розв'язок рівняння з отриманням параметрів навантаження – відхилення під дією додаткових сил.

Сам підхід використання матриць є досить поширеною практикою при визначенні статичної рівноваги різних канатів та кабелів, так як є прямий взаємозв'язок матричних операцій з дискретною формою подання параметрів канату [4, 15].

Чисельне моделювання підвісного моста при втраті канатом несучої здатності виконано в роботі [16]. Описано методику розрахунку асиметричного однопролітного висячого моста з отриманням ряду формул для розрахунку провису канату.

Що стосується висячих трубопроводів, то сам трубопровід має специфічний характер силового навантаження, а жорсткісні параметри є значно меншими, ніж у мостовому полотні підвісних мостів. Це призводить не лише до кількісних відмінностей, але й до якісних змін у процесі, зокрема, у характері деформацій та взаємодії елементів системи.

Виклад основного матеріалу

Дискретна модель симетричного навантаження. Загальним методом визначення матриці податливості пружного тіла є отримання значень сукупності переміщень обраних точок залежно від точки прикладання однієї сили. При такому підході в задачі переважають випадки несиметричного навантаження тіла. Враховуючи, що поведінка канатної підвіски при несиметричному навантаженні є частковим випадком симетричного навантаження, то при певних припущеннях стає можливим перейти до загального випадку навантаження.

Таким чином, розгляд питання несиметричного навантаження передуватиме процедурі моделювання симетричного навантаження канату. Розглянемо канатну систему зі сталевим несучим канатом, який має п'ять підвісок для кріплення трубопроводу (рис. 2).

Дискретна модель канату утворена шістьма ділянками з конкретними геометричними параметрами. Приймемо такі значення канатної підвіски: довжина прольоту AB становить канату $L = 135$ м, стрілу прогину $f = 15$ м, тоді довжина дискретної ділянки $d = 135/6 = 22,5$ м. На цій стадії маємо однозначно симетричну систему навантаження під

власною вагою канату.

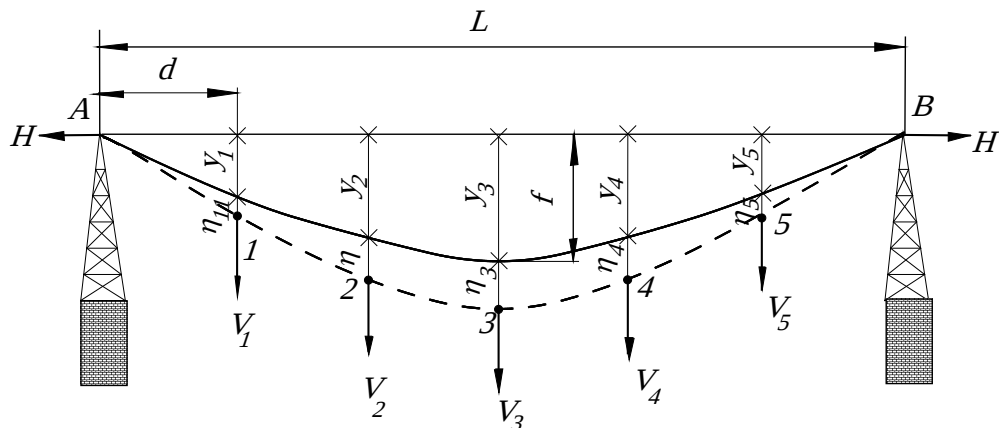


Рис. 2. Розрахункова схема канатної підвіски висячого трубопроводу

На підставі [10-12] зробимо припущення, що нарис канату у початковому стані під дією власної ваги приймає форму параболи за виразом (1). Це дозволило сформулювати початкові значення вертикальних координат п'яти точок y_i у вигляді матриці Y :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.333 \\ 13.333 \\ 15.000 \\ 13.333 \\ 8.333 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Згідно прийнятих припущень, розрахунок вертикальних переміщень під дією додаткового навантаження V_i зроблено за деформованою схемою, при якій визначають величини відхилень η_i від початкового стану Y . Зберігаючи принцип симетрії, прикладемо до кожної з точок однакові за величиною додаткові сили V_i , що в подальшому будуть імітувати дію навантаження зі сторони трубопроводу. Схематично зобразити прикладення п'яти рівних сил до точок канату можна у вигляді матриці-рядка ω . Елементи матриці-рядка мають значення "1" – при наявності навантаження і "0" у разі його відсутності.

Таким чином, схема симетричного навантаження буде відображено у вигляді наступної матриці-рядка $\omega = (1, 1, 1, 1, 1)$.

При прикладанні додаткових сил V_i зміниться й горизонтальна складова реакції опори несучого канату – розпір H . Розпір має визначальне значення на величину осьової сили, що впливає на деформацію несучого канату. Внаслідок його видовження змінюється і його нарис, а точки дискретної моделі отримують додаткові переміщення η_i .

Аналогічну задачу зі знаходженням переміщень вузлів канату η_i в мостових конструкціях для k -вузлів розв'язують на основі рівняння вертикальної рівноваги вузлів, яке в матричній формі записується [15]:

$$V = HD(Y + \eta), \quad (4)$$

де вектори

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_5 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_5 \end{pmatrix}.$$

Зв'язок між додатковим навантаженням і отриманими при цьому вертикальними переміщеннями здійснено з використанням матриці D конструктивних особливостей канатної підвіски, яка для симетричного навантаження має вигляд з розміром 5×5 :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Елементи матриці D впливають із системи рівнянь статичної рівноваги точок, до яких прикладено вертикальні зусилля V_i . При складанні такого рівняння авторами було враховано висновки про можливість прийняти величину осьового натягу канату величиною постійною вздовж канату.

З виразу (4) отримаємо рівняння для знаходження додаткових переміщень η :

$$\eta = \frac{1}{H} D^{-1} V - Y. \quad (6)$$

У рівнянні (6) є дві невідомі: додаткові переміщення точок канату η_i і величина розпору H .

Для знаходження величини розпору H скористаємося принципом Лагранжа, згідно якого віртуальні роботи зовнішніх і внутрішніх сил від постійного навантаження на переміщеннях від додаткового навантаження дорівнює нулю [11]:

$$\delta W_{\text{зовн}} - \delta W_{\text{внутр}} = 0. \quad (7)$$

Це дозволяє знайти величину розпору H , оскільки внутрішні сили, що визначають розпір, будуть взаємодіяти з переміщеннями, створени-

ми зовнішнім навантаженням.

Стосовно несучого канату при формуванні виразів віртуальних робіт (7) враховано, що зовнішніми силами є сили тяжіння від приведених мас канату G_i , які діють на переміщеннях η_i від додаткового навантаження V_i . Тоді внутрішніми силами будуть сили осьового натягу канату T_Q на видовженні його ділянок на величину Δl_i .

Розв'язок рівняння (7) представлено рис. 3, на якому у вигляді графіків показано дві залежності зміни величини роботи зовнішніх $\delta W_{\text{зовн}}$ і внутрішніх $\delta W_{\text{внутр}}$ сил в залежності від стріли прогину канату при фіксованому додатковому навантаженні.

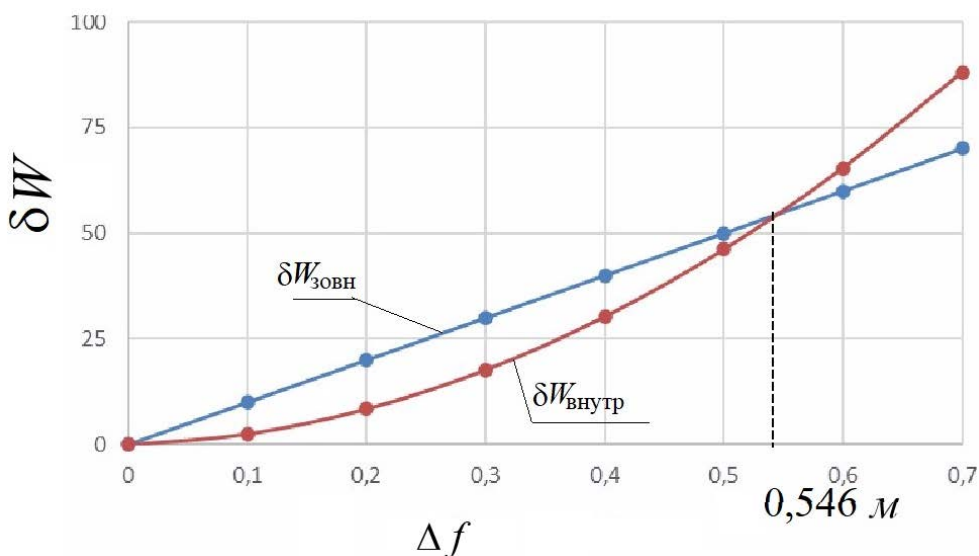


Рис. 3. Графіки залежності віртуальних робіт зовнішніх і внутрішніх сил $\delta W_{\text{внутр}}$ і $\delta W_{\text{зовн}}$ в залежності від приросту стріли прогину Δf при постійному додатковому навантаженню $V=20$ кН

Точка перетину двох графіків дає розв'язок рівняння (7). Тобто при величині деформації стріли прогину $\Delta f = 0,546$ м відповідає рівність віртуальних робіт при додатковому навантаженню п'ятьма силами $V_i = 20$ кН. Для знайденого положення рівноваги було здійснено перерахунок величини розпору – H . В підсумку вектор розв'язку переміщень п'яти точок має вигляд:

$$\eta = \frac{1}{H} D^{-1} V - Y = \begin{pmatrix} 0,304 \\ 0,486 \\ 0,546 \\ 0,486 \\ 0,304 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Таким чином, застосований алгоритм з отриманням розв'язку (8)

відповідає симетричному навантаженню. Підтверджено, що лінія провисання канату під дією симетричного навантаження наближена до параболи.

Верифікація моделі на випадок несиметричного навантаження. У випадках несиметричного навантаження, наприклад, при прикладення однієї сили асиметрично до канату, його лінія провисання відхиляється від параболічного нарису. Це відхилення є результатом нерівномірного розподілу навантаження, що призводить до зміщення лінії провисання канату в бік більшої концентрації сил.

Для коректного опису деформацій канату при несиметричному навантаженні необхідно використовувати більш складні математичні моделі, що враховують асиметричність навантаження та нерівномірність розподілу сил. В цьому плані привабливим є застосування чисельних методів, які реалізуються на дискретних моделях.

Чисельні методи дозволяють точно враховувати складні фізичні явища, такі як несиметричне навантаження, нерівномірний розподіл сил та деформацій, що може бути складно змодельовати аналітичними методами.

Як і в симетричному навантаженні рівні сили прикладаються до вузлових точок. Однак, в умовах асиметричного навантаження допускається нерівність сил за величиною та зміна вузлів їх прикладання. Матриця-рядок асиметричного навантаження відображає схему за якою прикладені сили і може мати вигляд, наприклад, $\omega = (1, 0, 0, 1, 0)$, що показує дію тільки двох сил на канатну підвіску, які прикладені в точках з номерами $k=1$ і $k=4$. Причому рівність сил є необов'язкова (в загальному випадку $V_1 \neq V_4$).

В несучому канаті протікають аналогічні процеси, які є характерні і для пружного тіла. Перш за все, дія сили в одній точці прикладання викликає зміни у положеннях всіх його точок. Якщо прикладено більш ніж одну силу, то утворюється взаємопов'язана залежність між прикладеними силами і переміщеннями, яка оцінюється матрицею податливості. Особливістю канатної підвіски є нелінійний характер залежності “сила–переміщення”. Тому пошук такої матриці пов'язаний з лінеаризацією вказаної залежності. Подібна матриця може виступати як зв'язуюча ланка між підвішеним трубопроводом і канатною підвіскою.

Для отримання матриці податливості канатної підвіски скористаємося принципом аналогії з пружними тілами. Як і для пружних тіл, почергово до вузлів будемо прикладати по одній силі V_i , за величиною рівній випадку симетричного навантаження. Розглянемо як зміниться положення канату, якщо його навантажити лише однією силою такої ж величини, але зміщеною відносно середини прольоту. Почнемо з першого вузла $k=1$, тобто матриця-рядок в цьому випадку матиме вигляд $\omega = (1, 0, 0, 0, 0)$. Різниця полягатиме в тому, що це будуть не одиничні

сили, а сили за величиною $V_i=20$ КН, що пояснюється обраним діапазоном $[0...20$ КН] нашої подальшої лінеаризації.

Точна лінія провисання канату на цій стадії є невідомою, але її схематичний нарис може бути отримано з наступних міркувань. На рис. 4 наведено схематично графіки трьох функцій. Верхній відповідає вільному провисанню канату – $f_1(x)$, а нижній – симетричному навантаженню каната п'ятьма рівними силами, що прикладені у вузлах – $f_2(x)$.

Очевидно, несиметричне навантаження в даному випадку змінить форму лінії провисання канату, і його нова лінія, яка описується функцією $f_3(x)$, буде розташована між верхнім і нижнім графіками. Тобто, на всьому проміжку прольоту буде справедлива умова:

$$f_1(x) < f_3(x) < f_2(x), \quad \text{при } 0 < x < L. \quad (9)$$

Вважатиме, що умова (9) буде виконуватися і при прикладанні сили $V = 20$ КН до інших вузлів. В такому випадку умову (9) можна переписати для переміщенні вузлів канатної підвіски у дискретній формі:

$$y_i < y_i + v_i < y_i + \eta_i, \quad \text{при } 0 < x < L, \quad (10)$$

де v_i – переміщення при несиметричному навантаженні за умови, що максимальне зусилля не перевищує $V_{\max} < 20$ КН.

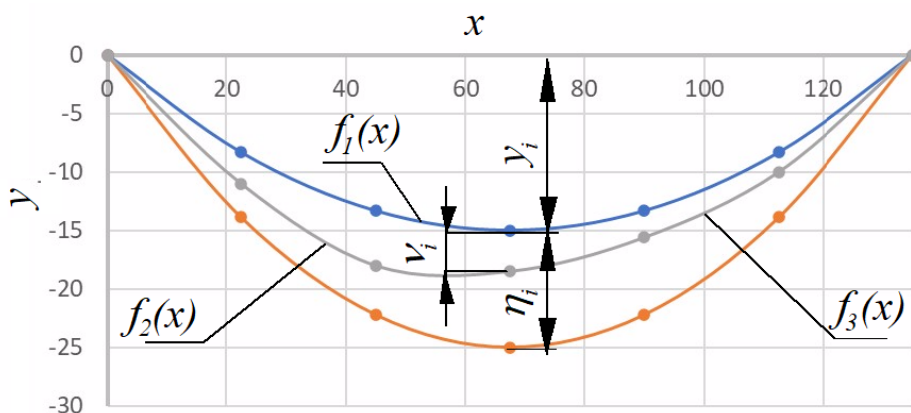


Рис. 4. Виконання умови (9) у вигляді графіків функцій провисання канату

Умова (10) дає змогу визначити форму лінії провисання канату на основі переміщень його вузлів.

Повертаючись до отриманого вектору переміщень вузлів (8) визначимо внесок кожної сили у загальному векторі переміщень точок. Це дозволить розчленувати загальні значення переміщення вузлів, представлені у вигляді матриці (8) на окремі складові. Для виконання подібної операції потрібно визначити долю кожної сили у загальному

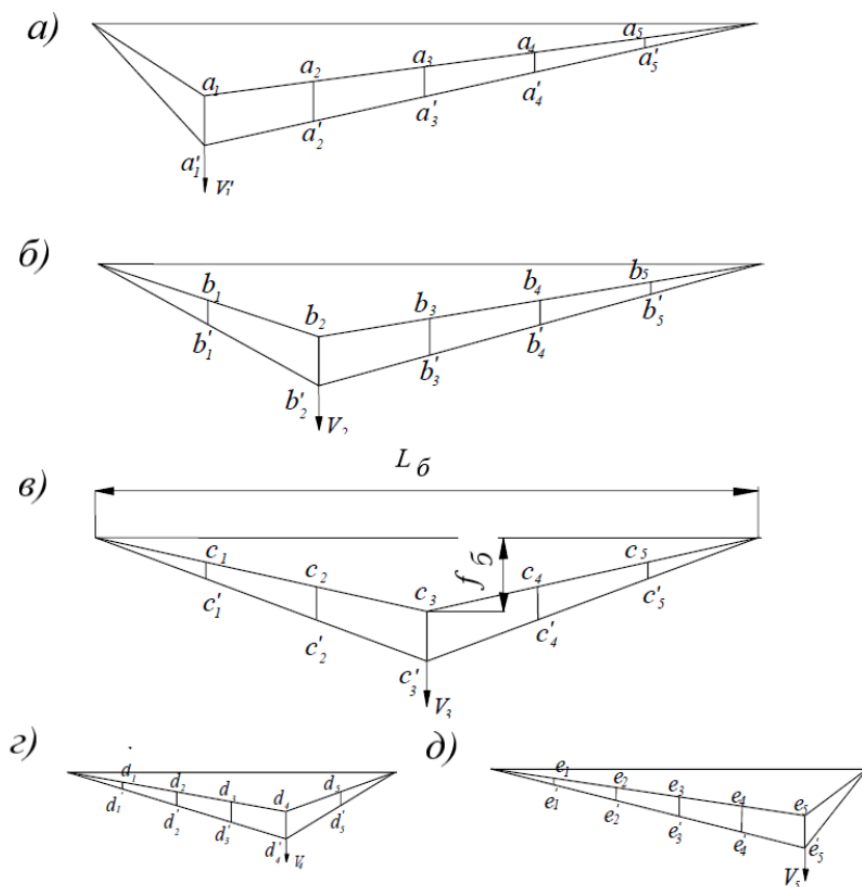
переміщенні.

Для цього за принципом подібності розглянемо прольот в безрозмірних одиницях (L_6, f_6) основною характеристикою якого буде дотримане співвідношення:

$$\frac{f}{L} = \frac{f_6}{L_6} = \frac{20}{180} = \frac{1}{9}.$$

Так, якщо довжина прольоту L_6 становитиме 6 безрозмірних одиниць, то стріла прогону f_6 дорівнюватиме $\frac{2}{3}$.

Розглянемо можливі схеми провисання канату, коли зосереджена сила буде прикладена по черзі в усіх точках, починаючи з першої точки $k=1$ (рис. 5а) і закінчуючи точкою $k=5$ (рис. 5д). Залежно від точки прикладання зосередженої сили, провисання канату набуде відповідних форм, що зображені на рис. 5а-д.



а) $\omega = (1, 0, 0, 0, 0)$; б) $\omega = (0, 1, 0, 0, 0)$; в) $\omega = (0, 0, 1, 0, 0)$;

г) $\omega = (0, 0, 0, 1, 0)$; д) $\omega = (0, 0, 0, 0, 1)$

Рис. 5. Схеми провисання канату в безрозмірних одиницях залежно від точки прикладання зосередженої сили $V_i = 20$ КН згідно матриці – рядок:

Тепер розглянемо переміщення вузлів в приростах, залежно від точки прикладання сили. За наведеними схемами видно, що приріст переміщення вузла 1, під дією сили V_1 визначається відрізком aa' (рис. 5а), а під дією сили V_2 – відрізком bb' (рис. 5б). Наступні прирости переміщень вузла 1 від прикладених сил V_3, V_4, V_5 відповідно становлять cc' (рис. 5в), dd' (рис. 5г) і ee' (рис. 5д).

Таким чином, загальне безрозмірне переміщення вузла 1 є сумою:

$$\eta_{61} = aa' + bb' + cc' + dd' + ee'. \quad (11)$$

Якщо безрозмірну величину переміщення η_{61} прийняти за 100%, то на основі доданків виразу (11) можна визначити долю кожної сили у формуванні приросту переміщень вузла 1. Аналогічно до рівності (11) складено вирази для інших вузлів (2-5) і результати занесемо в таблицю 1.

Таблиця 1. Долі приросту загального переміщень i -го вузла в залежності від точки прикладання сили

Номер вузла	Долі приросту переміщень від дії сил V_i				
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
1	0,3357	0,2679	0,2036	0,1286	0,0643
2	0,1691	0,3339	0,2471	0,1646	0,0853
3	0,1145	0,2175	0,3360	0,2175	0,1145
4	0,0853	0,1646	0,2471	0,3339	0,1691
5	0,0643	0,1286	0,2036	0,2679	0,3357

Перейдемо від безрозмірних одиниць приросту переміщень до натуральних, при цьому вважатиме, що отриманні долі приросту переміщень зберігатиме своє значення.

На прикладі вузла 1 продемонструємо застосування отриманих часток для визначення складових переміщення цього вузла. Для цього скористаємося раніше визначеними долями сили, що кожна з них визначає частку загального приросту переміщення.

Так, перший рядок таблиці 1 визначає долі кожної сили ($i = 1 \dots 5$) у загальному безрозмірному приросту переміщення вузла 1. Сума всіх часток дорівнює одиниці.

Відомо, якщо будуть прикладені всі п'ять сил $V_i = 20$ КН, то переміщення вузла 1, згідно матриці η (8), становить $\eta_1 = 0,304$ м. Тоді відповідно до отриманих часток переміщення вузла 1 під дією п'яти рівних сил $V_i = 20$ КН ($i = 1 \dots 5$) розіб'ється пропорційно на окремі складові наступним чином (м):

0,102	0,081	0,062	0,039	0,020
-------	-------	-------	-------	-------

Якщо ж замість сил п'яти $V_i=20$ КН ($i=1\dots 5$) прикласти одиничні сили $V_i=1$ Н ($i=1\dots 5$), то перший рядок матриці податливості матиме вигляд (10^{-4} м):

0,051	0,041	0,031	0,020	0,010
-------	-------	-------	-------	-------

Виконавши аналогічні дії для вузлів $i=2\dots 5$, отримаємо всі елементи матриці податливості несучого канату однопролітного висячого трубопроводу розміром 5×5 :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0,051 & 0,041 & 0,031 & 0,020 & 0,010 \\ 0,041 & 0,081 & 0,060 & 0,040 & 0,021 \\ 0,031 & 0,059 & 0,092 & 0,059 & 0,031 \\ 0,021 & 0,040 & 0,060 & 0,081 & 0,041 \\ 0,010 & 0,020 & 0,031 & 0,041 & 0,051 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}, \text{ м} \quad (12)$$

Таким чином,отримана матриця податливості (12) гнучкого несучого канату відображає по-суті лінеаризовану нелінійну характеристику в приростах переміщень кожного i -го вузла під дією п'яти одиничних сил.

Лінеаризовану матрицю податливості (12) можна використовувати для знаходження переміщень у випадках несиметричного навантаження.

Розглянемо випадок несиметричного навантаження,у якому діють тільки дві сили $V_1=12$ КН і $V_4=15$ КН, що прикладені до першого і четвертого вузлів. Матриця схеми навантаження матиме вигляд $\omega = (1, 0, 0, 1, 0)$, а саме навантаження зобразиться у вигляді вектора:

$$V = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \Delta \cdot V = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.09 \\ 1.26 \\ 1.46 \\ 0.72 \end{pmatrix}.$$

то отримаємо наступний розв'язок:

Як видно з отриманого розв'язка маємо явну несиметричну форму провисання несучого канату, максимальна стріла прогину вже знаходиться під вузлом 4, тобто зміщення відбулося на величину $d = 22,5$ м.

Врахування нелінійних ефектів через лінеаризацію дало змогу значно спростити розв'язування задачі, зберігаючи при цьому достатню точність для практичних розрахунків.

Висновки. Отримано матрицю податливості несучого канату висячого трубопроводу шляхом чисельного моделювання поведінки канату в двох процесах: провисанням його під дією власної ваги і під додатковим навантаженням. Дискретна модель несучого канату зведена до

п'яти точок, в якій точки кріплення підвісок одночасно є точками дискретизації параметрів канату. Конструювання дискретної моделі відбулося у два етапи. Спочатку було отримано значення вертикальних координат у випадку симетричного навантаження. На другому етапі відбулася верифікація отриманої моделі та її поширення на асиметричне навантаження.

Застосування чисельних методів розрахунку на основі дискретної моделі дозволило отримати у вигляді дискретних координат положення вузлових точок канату в двох крайніх положеннях – початковому і під дією п'яти рівних сил по 20 КН, що були прикладені до вузлів. На проміжку зміни додаткового силового навантаження $[0 \dots 20 \text{ КН}]$ здійснено лінеаризацію залежності “сила – переміщення вузла”. Це дозволило визначити долі кожної сили в загальному векторі переміщень вузлів. На підставі цих даних було остаточно отримано лінеаризовану матрицю податливості гнучкого несучого канату з нелінійними характеристиками системи “трубопровід – несучий канат”. Показано приклад використання матриці податливості для визначення переміщень канату при несиметричному додатковому навантаженні.

Література

1. Грудз В. Я., Тимків Д. Ф., Михалків В. Б., Костів В. В. Обслуговування і ремонт газопроводів. – Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2009. – 712 с.
2. Киреенко В. И. Висячие трубопроводные переходы / В. И. Киреенко, В. Н. Шимановский, Д. А. Коршунов, Ю. В. Смирнов. – К.:Будівельник, 1968, – 158 с.
3. Солдатов К. И. Собственные колебания висячих трубопроводных переходов//Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта / ДИИТ. – Д., 2005. – Номер 6. – С. 97–119.
4. Arco D. C., Aparicio, A. C. Simplified Numerical Analysis of Suspension Bridges //Proceedings of the fourth international bridge engineering conference, San Francisco, California, August 28-30, 1995: Volume 2, – p. 324-334.
5. Vertical Deformation Monitoring of the Suspension Bridge Tower Using GNSS: A Case Study of the Forth Road Bridge in the UK/Qusen Chen, Weiping Jiang, Xiaolin Meng, Peng Jiang, Kaihua Wang, Yilin Xie, Jun Ye//Remote Sens. 2018, 10, p. 364-372.
6. Gimsing N.J., Georgakis C.T. Cable Supported Bridges. Concept and Design. 3rd Ed. Ltd John Wiley & Sons, 2012. 592 p.
7. Беркман М. Б., и др. Подвесные канатные дороги. – М.:Машиностроение 1984. – 264 с.
8. Адамовський М. Г., Мартинців М.П. Бадера Й.С. Підвісні канатні

- лісотранспортні системи.–К.: ІЗМН. 1997. –156 с.
9. Тисовський Л.О., Рудько І.М. Дослідження закономірностей руху вантажу вздовж канатної транспортної установки. Підйомно-транспортна техніка. 2005. Вип. 4(16). С. 12-18.
10. Gimsing, N.J.,Georgakis, C.T. (2012) Cable Supported Bridges: Concept and Design. 3rd Edition, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, UK.
11. Synge J.L., Griffith B.A. Principles of mechanics. –New York: McGraw Hill Book Company, 1959. – 515 p.
12. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», –1976 г., – 608 с.
13. Тисовський Л.О., Рудько І.М. До визначення рівняння кривої прогину каната підвісної транспортної установки // Науковий вісник: Збірник науково-технічних праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2005, вип. 15.1. – с. 137 – 142.
14. Dong-Ho C., Sun-Gil G, Ho-Sung N.Simplified Analysis for Preliminary Design of Towers in Suspension Bridges. Journal of Bridge Engineering Volume: 19 –2014 – p.04013007–1- 04013007-12.
15. Starossek U. Dynamic Stiffness Matrix of sagging Cable// Journal of engineering mechanics 117(1991) 12, – p. 2815-2829.
16. Grigorjeva T. Paeglitis A. The simplified analysis of the asymmetric single-pylon suspension bridge with rigid cables// Engineering Structures and Technologies 12(2), (2021): – p. 61-66.

Стаття надійшла до редакційної колегії 31.03.2025 р.

OBTAINING THE STIFFNESS MATRIX OF THE CARRYING CABLE OF A SINGLE-SPAN SUSPENSION PIPELINE

E. Y. Ripetskyi, R. Y. Ripetskyi, O. I. Nepelyak

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;

evgeniyripetsky@gmail.com, ripetskyi.roman@gmail.com

The paper considers the development of a discrete model of the carrying cable of a suspension pipeline, in which the suspension attachment points are simultaneously serve as the points for discretizing the cable parameters. To obtain the stiffness matrix of the carrying cable, the behavior of two processes was modeled: the sag of the supporting cable under its own weight and additional load. The discrete model was constructed in two stages. First, the values of vertical coordinates were obtained in the case of symmetrical loading. The second stage involved verification of the model and its extension to asymmetric loading.

The application of numerical calculation methods based on a discrete model made it possible to obtain the coordinates of the cable's nodal points in two extreme positions - the initial one and under the action of five equal

forces of 20 KN each, which were applied to the nodes. The linearization of the dependence “force-displacement of a knot” was carried out over the interval of change in the additional force load [0...20 KN]. This made it possible to determine the shares of each force in the total vector of node displacements. On the basis of these data the linearized matrix of pliability of flexible carrying cable with nonlinear characteristics of the system “pipeline - carrying cable” was finally obtained. An example of using the ductility matrix to determine the displacements of the cable nodes under asymmetric additional load is shown.

Keywords: *carrying cable, suspension pipeline, span, deflection boom, stiffness matrix, numerical methods, discrete model.*