

УДК 517.977.8, 517.929

DOI: 10.31471/2304-7399-2025-20(76)-65-81

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГОР ПЕРЕСЛІДУВАННЯ ПРИ ЗБУРЕННІ РІВНЯННЯ РУХУ

А. О. Бардан*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;**58002, вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, Україна;**e-mail: bardan.andrii@chnu.edu.ua*

У статті досліджуються диференціальні ігри переслідування в умовах, коли рух переслідувача і втікача піддається впливу зовнішніх малих збурень. Такого типу задачі, але без врахування збурень, розглядались в роботах А.О. Чикрія. У даній праці розглянуто задачу у випадку, коли матриця керування повільно змінюється з часом і залежить від багаточастотних збурень. Обґрунтовано метод усереднення у випадку повільно змінних частот та побудовано оцінки відхилення між розв'язками точної та усередненої систем за однакових початкових умов на скінченному часовому інтервалі. Наведено приклад модифікованої диференціальної гри «Хлопчик-крокодил» із накладеними збуреннями. Знайдено час завершення переслідування для усередненої моделі. Проведено аналіз впливу різних за силою збурень на час завершення гри. Одержані результати можуть бути застосовані в задачах керування, де важливо враховувати вплив багаточастотних зовнішніх факторів на поведінку учасників динамічних процесів.

Ключові слова: *диференціальна гра переслідування, багаточастотне збурення, метод усереднення, осциляційний інтеграл, резонанс, керування, малий параметр, визначник Вронського.*

1. Вступ

Перші праці з диференціальних ігор з'явилися у XX столітті в контексті дослідження задач переслідування двох або більше об'єктів

на площині. У працях американського вченого Р. Айзекса [1] висвітлено розвиток математичної теорії управління та становлення теорії диференціальних ігор, які сприяли дослідженню у сфері керування процесами, що діють в умовах конфлікту та невизначеності.

Українські науковці також зробили вагомий внесок у розвиток теорії диференціальних ігор. У працях Б.М. Пшеничного [2] висвітлені диференціальні ігри, які описуються звичайними диференціальними рівняннями. У роботах А.О. Чикрія, зокрема в монографії [3] та в багатьох інших його публікаціях, розроблено та застосовано метод розв'язувальних функцій для аналізу широкого класу ігрових задач. Цей метод охоплює стаціонарні та нестаціонарні конфліктно-керовані процеси, які описуються звичайними, диференціально-різницеvими, стохастичними рівняннями та рівняннями з частинними похідними [4, 5, 6].

Диференціальні ігри описують процес переслідування двох або більше об'єктів, які поділяються на дві групи: переслідувачі та втікачі. Дві групи гравців є ворожими та прагнуть досягти різних цілей. Метою переслідувачів є наздогнати втікачів або наблизитися на відстань достатню для їх ураження. У свою чергу, мета втікачів — уникнути зустрічі з переслідувачами або принаймні відтягнути момент зустрічі. Кожен гравець володіє певною інформацією про своїх суперників. Проаналізувавши її, вони приймають рішення щодо своєї стратегії.

Прикладом подібної задачі в реальних умовах є політ двох винищувачів, один з яких виконує функцію перехоплювача. Кожен пілот керує своїм літаком за допомогою відповідних систем. Пілоти мають певну інформацію про суперника, це може бути відстань, напрямок, швидкість його руху та інше. Метою перехоплювача є знищення ворожого літака, що передбачає наближення на достатню відстань для запуску ракети з метою його ураження.

Проте в процесі переслідування як на переслідувачів, так і на втікачів можуть впливати певні збурення, спричинені метеорологічними умовами, військовими діями або іншими зовнішніми факторами, які не залежать від учасників. У багатьох подібних задачах

збурення мають багаточастотний характер, а в процесі еволюції може виникати резонанс частот, умова якого

$$(k, \omega) := k_1 \omega_1 + \dots + k_m \omega_m = 0,$$

де ω_i – частоти, $k_i \in \mathbb{Z}$, $\|k\| = |k_1| + \dots + |k_m| \neq 0, m \geq 2$.

Через збурення динаміка гри може змінюватися, що впливає на стратегії обох груп гравців. Така ситуація вимагає від гравців адаптації до нових умов і корекції своїх дій, щоб мінімізувати негативні наслідки та досягти поставлених цілей. У даній праці за допомогою методу усереднення [7] досліджується вплив багаточастотних збурень на конфліктно-керований процес. Зазначимо, що подібні задачі, раніше не розглядалися у вищезгаданих працях.

2. Постановка задачі

Нехай керування переслідувача описується рівнянням

$$\dot{x} = A_1 x + \varphi_1(u), \quad (1)$$

де x – фазовий вектор, який складається з геометричних координат, швидкостей і прискорень переслідувача, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $n_1 \leq 9$, A_1 – квадратна матриця порядку n_1 , $\varphi_1(u)$ – функція керування, u – параметр керування переслідувача, $u \in U$, U – область керування.

Аналогічно, керування втікача описується рівнянням

$$\dot{y} = A_2 y + \varphi_2(v), \quad (2)$$

де y – фазовий вектор втікача, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_2 \leq 9$, A_2 – квадратна матриця порядку n_2 , $\varphi_2(v)$ – функція керування втікача, v – параметр керування втікача відповідно, $v \in V$, V – область керування. Області U та V – непорожні компакти в $U \subset \mathbb{R}^{n_3}$ та $V \subset \mathbb{R}^{n_4}$ відповідно, $\mathbb{R}^{n_3}$ і $\mathbb{R}^{n_4}$ – обмежені області, у загальному випадку $n_3 \neq n_4$.

Запишемо рівняння (1), (2) у вигляді одного рівняння

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \quad (3)$$

де $z = (x, y)^T$ – фазовий вектор, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ – блочна матриця порядку $n = n_1 + n_2$, $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u), \varphi_2(v))^T$ – блок керування.

У задачах переслідування термінальна множина – це множина станів, де переслідуювач досягає власної цілі. Тобто, це множина таких точок, в яких переслідуювач або «піймав» втікача, або досягнув бажаного відносного положення. Зазвичай, має форму циліндра у просторі R^n та задається як

$$M^* = M^0 + \varepsilon S, \quad (4)$$

де M^0 – власний лінійний підпростір в $\mathbb{R}^n$, S – одинична сфера з ортогонального доповнення до M^0 в просторі $\mathbb{R}^n$, параметр $\varepsilon \geq 0$ визначає радіус цієї сфери.

Кожен із гравців обирає свої стратегії керування та безпосередньо впливає на хід процесу (3), з метою досягнення власних цілей. Мета переслідуювача полягає в тому, щоб за мінімальний час вивести траєкторію процесу на задану замкнену термінальну множину (4). Мета втікача – уникнути перетину траєкторії процесу з цією множиною на всьому напівнескінченному інтервалі часу, або, якщо це неможливо, то максимально відтермінувати цей момент.

Такі системи рівнянь лежать в основі багатьох практичних методів переслідування, таких як паралельне переслідування, погонна крива та переслідування з випередженням.

Подібна модель диференціальної гри, коли на рух переслідуювача і втікача накладені зовнішні малі збурення, була розглянута в [8], де рівняння (3) має такий вигляд

$$\frac{dz}{dt} = A(\tau)z + \varphi(u, v) + \mu Z(\tau, a, \psi).$$

У цій роботі ми розглядаємо випадок, коли матриця A повільно змінюється з часом і на неї впливають багаточастотні збурення, тобто замість матриці A у системі рівнянь (3) розглядається матриця $\mu A(\tau, a, \psi)$, де μ – малий параметр, $\mu \in (0, \mu_0]$, змінна $\tau = \mu t$ у задачах нелінійної механіки [9, с. 12] називається «повільним часом»

і змінюється на відрізку $[0, L]$, коли $t \in [0, L\mu^{-1}]$. У такому випадку система рівнянь диференціальної гри набуває вигляду

$$\frac{dz}{dt} = \mu A(\tau, a, \psi)z + \varphi(u, v), \quad (5)$$

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \psi), \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y(\tau, a, \psi), \quad (7)$$

де a і ψ - відповідно амплітудні (повільні) і фазові (швидкі) змінні, $a \in D$, D - обмежена область в $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, вектор-функції X, Y та матрична функція A - 2π -періодичні за компонентами вектора ψ .

Якщо $m = 1$, то система рівнянь (6), (7) називається одночастотною, а при $m > 1$ - багаточастотною. У випадку багаточастотної системи дослідження та побудова її розв'язку значно ускладнюються через можливість виникнення резонансу частот. Для отримання ефективної оцінки похибки методу усереднення для амплітудних і фазових змінних, порядок якої $O(\mu^\alpha)$, де $0 < \alpha \leq m^{-1}$, накладаються умови на вектор частот $\omega(\tau)$ для виходу із малого околу резонансу. Дослідження багаточастотних систем методом усереднення на скінченних і нескінченних часових інтервалах із заданими початковими, багатоточковими або інтегральними умовами детально розглянуто в монографії А.М. Самойленка та Р.М. Петришина [7].

Для спрощення системи рівнянь (5), (6), (7) побудуємо усереднену за швидкими змінними ψ_v , $v = \overline{1, m}$, задачу. Одержимо значно простішу задачу вигляду

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \mu A_0(\tau, \bar{a})\bar{z} + \varphi(u, v), \quad (8)$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}), \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y_0(\tau, \bar{a}), \quad (10)$$

де $\bar{z}(0) = z_0, \bar{a}(0) = a_0, \bar{\psi}(0) = \psi_0$.

Нехай вектор-функція $A_0(\tau, a)$ - середнє значення вектор-функції $A(\tau, a, \psi)$ на кубі періодів. Тоді вона набуває вигляду

$$A_0(\tau, \bar{a}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} A(\tau, a, \psi) d\psi_1 \dots d\psi_m.$$

Аналогічний вигляд мають вектор-функції X_0 та Y_0 .

Знаходження розв'язку задачі Коші для рівняння (9) не залежить від фазових змінних. За знайденим розв'язком $\bar{a}(\tau) = \bar{a}(\tau; a_0)$, $\bar{a}(0, a_0) = a_0$, знаходження розв'язку $\bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu)$ зводиться до задачі інтегрування

$$\bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu) = \psi_0 + \int_0^\tau \left(\frac{\omega(s)}{\mu} + Y_0(s, \bar{a}(s, a_0)) \right) ds.$$

Також значно спрощується рівняння (5), тому що вектор-функція A_0 не залежить від вектора швидких змінних ψ .

Обґрунтуємо метод усереднення для системи рівнянь (5), (8) у випадку повільно змінних частот $\omega_\nu(\tau)$. Для цього доведемо існування та єдиність розв'язку початкової задачі, а також побудуємо оцінку для розв'язків точної та усередненої системи на довільному скінченному часовому інтервалі $t \in [0, L]$, за умови що початкові умови збігаються.

3. Обґрунтування методу усереднення

У монографії [7] для $\tau \in [0, L]$ обґрунтовано метод усереднення для системи рівнянь (6), (7), а саме, для достатньо гладких вектор-функцій X, Y і ω за всіма змінними, $\det W(\tau) \neq 0$, $\tau \in [0, L]$, де $W(\tau)$ - визначник Вронського за системою функцій $\{\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)\}$, та існування розв'язку усередненої задачі $\bar{a} = \bar{a}(\tau, \bar{y}), \bar{a}(0, \bar{y}) = \bar{y}$, який лежить в області D разом із деяким ρ - околom. Тоді для досить

малого $\mu_0 > 0$ існує єдиний розв'язок системи рівнянь (6), (7) і виконується оцінка

$$\|a(\tau, \bar{y}, \bar{\xi}, \mu) - \bar{a}(\tau, \bar{y})\| + \|\psi(\tau, \bar{y}, \bar{\xi}, \mu) - \bar{\psi}(\tau, \bar{y}, \bar{\xi}, \mu)\| \leq c_1 \mu^{\frac{1}{m}}, \quad (11)$$

для всіх $0 \leq \tau \leq L$ і $0 < \mu \leq \mu_0$, $c_1 > 0$ і не залежить від μ , $a(0, \bar{y}, \bar{\xi}, \mu) = \bar{y}$, $\psi(0, \bar{y}, \bar{\xi}, \mu) = \bar{\xi}$.

Застосуємо методику, запропоновану в [7], для обґрунтування методу усереднення рівняння (5).

Для оцінки відхилення розв'язку застосуємо інтегральну нерівність Белмана [10, с. 11], яку наведемо у вигляді теореми.

Теорема 3.1. *Нехай u і f — неперервні та невід'ємні функції, визначені на відрізку $J = [\alpha, \beta]$, а c — невід'ємна стала. Якщо для всіх $t \in J$ виконується нерівність*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^t f(s)u(s) ds,$$

тоді правильна оцінка

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_{\alpha}^t f(s) ds \right), \quad t \in J.$$

Введемо позначення: $G := [0, \tau] \times D \times \mathbb{R}^m$ — декартів добуток, $F := (X, Y, A)$, $C_{\psi}^l(\bar{G}, \sigma)$ — простір функцій, рівномірно обмежених в області $\bar{G}$ разом із похідними за змінною ψ , сталою $\sigma > 0$, разом із похідними до порядку ℓ . Аналогічне позначення для $C_{\tau, a}^{\ell}(\bar{G}, \sigma)$ — простір функцій, неперервно диференційовних за змінними τ і a до порядку ℓ , обмежених сталою σ .

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови:*

- (1) *вектор-функції F — 2π - періодичні за компонентами вектора ψ , $F \in C_{\tau, a}^{\ell-1}(\bar{G}, \sigma)$, $(\frac{\delta F}{\delta \tau}, \frac{\delta F}{\delta a}) \in C_{\psi}^{\ell}(\bar{G}, \sigma)$, $\ell \geq m$;*
- (2) *вектор частот $\omega \in C^m[0, L]$ і визначник Вронського за системою функцій $\{\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)\}$ відмінний від нуля на $[0, L]$;*

- (3) функція φ неперервна на компактi $U \times V$;
 (4) існує єдиний розв'язок $\bar{z}(\tau) = \bar{z}(\tau, a_0, \psi_0, \mu)$, який для $(\tau, \mu) \in [0, L] \times (0, \mu_0]$ лежить в області D разом із деяким ρ - околom;
 (5) існує таке число $\sigma_1 > 0$, що виконується оцінка

$$\sum_{k \neq 0} \|k\| \max_{s \in [0, L]} \|A_k(s, \bar{a}(s))\| \leq \sigma_1.$$

Тоді для досить малого $\mu^* \in (0, \mu_0]$ існує єдиний розв'язок системи рівнянь (8)-(10) із початковими умовами (a_0, ψ_0, z_0) і виконується оцінка

$$\|z(\tau, a_0, \psi_0, z_0, \mu) - \bar{z}(\tau, a_0, z_0, \mu)\| \leq c_6 \mu^{\frac{1}{m}},$$

для всіх $(\tau, \mu) \in [0, L] \times (0, \mu^*]$, де $c_6 > 0$ і не залежить від μ .

Доведення. Нехай $z(t) = z(t, z_0, a_0, \psi_0, \mu)$, $\bar{z}(t) = \bar{z}(t, z_0, a_0, \psi_0, \mu)$. Із неперервності правих частин системи рівнянь (5)-(7) випливає існування розв'язку на деякому інтервалі $(0, t_1)$, де $t_1 \leq \frac{L}{\mu}$. Для $t \in (0, t_1)$ маємо

$$z(t) - \bar{z}(t) = \mu \int_0^t (A(\mu s, a(\mu s), \psi(\mu s))z(s) - A_0(\mu s, \bar{a}(\mu s))\bar{z}(s))ds.$$

Перейдемо до «повільного часу» $\tau = \mu t$. Тоді

$$\begin{aligned} z(\tau) - \bar{z}(\tau) &= \int_0^\tau (A(s, a, \psi)z - A_0(s, \bar{a})\bar{z})ds = \int_0^\tau (A(s, a, \psi)(z - \bar{z}))ds + \\ &+ \int_0^\tau ((A(s, a, \psi) - A(s, \bar{a}, \psi))\bar{z})ds + \int_0^\tau ((A(s, \bar{a}, \psi) - A(s, \bar{a}, \bar{\psi}))\bar{z})ds + \\ &+ \int_0^\tau ((A(s, \bar{a}, \bar{\psi}) - A_0(s, \bar{a}))\bar{z})ds = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned}$$

Оскільки вектор-функція $A(s, \bar{a}, \bar{\psi})$ періодична з періодом 2π за компонентами вектора $\bar{\psi}$, то запишемо її у вигляді ряду Фур'є

$$A(s, \bar{a}, \bar{\psi}) = A_0(s, \bar{a}) + \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau A_k(s, \bar{a}) \exp(i, (k, \bar{\psi}))ds.$$

Тоді доданок S_4 можна записати у вигляді

$$S_4 = \int_0^\tau ((A(s, \bar{a}, \bar{\psi}) - A_0(s, \bar{a}))\bar{z})ds = \int_0^\tau ((A_0(s, \bar{a}) - A_0(s, \bar{a}))\bar{z})ds + \\ + \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau A_k(s, \bar{a}) \exp(i, (k, \psi))\bar{z}ds = \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau A_k(s, \bar{a}) \exp(i, (k, \psi))\bar{z}ds.$$

Знайдемо оцінки норми кожного із доданків $S_v, v = \overline{1, 4}$. З умови (1) відомо, що $\|A(\tau, a, \psi)\| \leq \sigma$. Використаємо цю умову для оцінки доданку S_1

$$\|S_1\| \leq \int_0^\tau \|A(s, a, \psi)\| \cdot \|z - \bar{z}\|ds \leq \sigma \int_0^\tau \|z - \bar{z}\|ds,$$

Перейдемо до оцінки доданку S_2 . З умови (4) відомо, що функція $\bar{z}(\tau)$ є обмеженою. Тоді нехай існує стала $\sigma_2 > 0$ така, що $\|z(\tau)\| \leq \sigma_2$. Враховуючи це та нерівність (11), отримуємо

$$\|S_2\| \leq \int_0^\tau ((A(s, a, \psi) - A(s, \bar{a}, \psi))\bar{z})ds \leq \sigma_2 \int_0^\tau \|a - \bar{a}\|ds \leq \\ \leq \sigma_2 c_1 \mu^{\frac{1}{m}} L \leq c_2 \mu^{\frac{1}{m}},$$

де $c_2 = \sigma_2 c_1 L$.

Розглянемо доданок S_3 і побудуємо оцінку

$$\|S_3\| \leq \int_0^\tau ((A(s, \bar{a}, \psi) - A(s, \bar{a}, \bar{\psi}))\bar{z})ds \leq \sigma_2 \int_0^\tau \|A(s, \bar{a}, \psi) - A(s, \bar{a}, \bar{\psi})\|ds.$$

Виконавши перетворення підінтегральної функції, одержимо

$$\int_0^\tau \|A(s, \bar{a}, \psi) - A(s, \bar{a}, \bar{\psi})\|ds = \int_0^\tau \sum_{k \neq 0} \|A_k(s, \bar{a}) \exp^{i(k, \psi)} - A_k(s, \bar{a}) \times \\ \times \exp^{i(k, \bar{\psi})}\|ds = \int_0^\tau \sum_{k \neq 0} \|A_k(s, \bar{a})(\exp^{i(k, \psi)} - \exp^{i(k, \bar{\psi})})\|ds = \\ = \int_0^\tau \sum_{k \neq 0} \|A_k(s, \bar{a})\| \sqrt{2} \|k\| \cdot \|\psi - \bar{\psi}\|ds.$$

З умови (5), а також враховуючи нерівність (11), маємо

$$\|S_3\| \leq \sqrt{2}c_1\mu^{\frac{1}{m}} \int_0^\tau \sum_{k \neq 0} (\|A_k(s, \bar{a})\| \|k\|) ds \leq \sqrt{2}c_1\mu^{\frac{1}{m}} \sigma_1 L \leq c_3\mu^{\frac{1}{m}},$$

де $c_3 = \sqrt{2}c_1\sigma_1 L$.

На підставі відповідного інтегрального розв'язку для рівняння (10) у вигляді

$$\bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu) = \psi_0 + \int_0^\tau \left(\frac{\omega(s)}{\mu} + Y_0(s, \bar{a}(s, a_0)) \right) ds,$$

для S_4 одержимо

$$S_4 = \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau (A_k(s, \bar{a}) \exp(i, (k, \bar{\psi})) \bar{z}) ds = \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau (A_k(s, \bar{a}) \times \\ \times \exp(i, (k, \psi_0 + \int_0^s \frac{\omega(z)}{\mu} dz + \int_0^s (k, Y_0(s, \bar{a})) dz)) \|z\|) ds.$$

Тоді оцінка для S_4 набуває вигляду

$$\|S_4\| \leq \sum_{k \neq 0} \left\| \int_0^\tau f_k(s, \mu) \exp \left(\frac{i}{\mu} \int_0^s (k, \omega(z)) dz \right) ds \right\|,$$

де

$$f_k(s, \mu) = A_k(s, \bar{a}) \exp(i, (k, \psi_0)) \exp \left(i, \int_0^s (k, Y_0(s, \bar{a})) dz \right) \equiv A_k(s, \bar{a}) \exp(i, \xi).$$

Для оцінки S_4 розглянемо осциляційний інтеграл

$$I_k(\tau, \mu) = \int_0^\tau f(y) \exp \left(\frac{i}{\mu} \int_0^y (k, \omega(z)) dz \right) dy.$$

Ця оцінка набуває вигляду [7, с. 21]

$$\|I_k(\tau, \mu)\| \leq \bar{\sigma} \mu^{\frac{1}{m}} \left(\left(1 + \frac{1}{\|k\|} \right) \max_{[0, L]} \|f(\tau)\| + \frac{1}{\|k\|} \max_{[0, L]} \left\| \frac{f(\tau)}{d\tau} \right\| \right) \quad (12)$$

і справджується для всіх $(\tau, \mu) \in [0, L] \times [0, \mu_1]$, $0 < \mu_1 \leq \mu_0$, $\bar{\sigma} > 0$ та не залежить від μ і k .

Оцінимо норми f_k і $\frac{df_k}{ds}$. Для f_k маємо $\|f_k(s, \mu)\| \leq \|A_k(s, \bar{a})\|$.

Далі знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{df_k}{ds} = & \left(\frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial s} + \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial \bar{a}} X_0(s, \bar{a}) \right) \exp(i\xi) + \\ & + iA_k(s, \bar{a}) (k, Y_0(s, \bar{a})) \exp(i\xi). \end{aligned}$$

та відповідну оцінку

$$\left\| \frac{df_k}{ds} \right\| \leq \left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial s} \right\| + \left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial \bar{a}} \right\| \sigma + \|k\| \sigma \cdot \|A_k(s, \bar{a})\|,$$

де $\|X_0(\tau, \bar{a})\| \leq \sigma$, $\|Y_0(\tau, \bar{a})\| \leq \sigma$.

Застосувавши оцінку (12) для $k \neq 0$, одержимо

$$\begin{aligned} \|S_4\| \leq & c_4 \mu^{\frac{1}{m}} \sum_{k \neq 0} \left(\sup \|A_k(s, \bar{a})\| + \sigma \cdot \|A_k(s, \bar{a})\| + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\|k\|} \left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial s} \right\| + \frac{\sigma}{\|k\|} \left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial \bar{a}} \right\| \right). \end{aligned}$$

Нехай $\sigma_3 = (1 + \sigma)$, тоді

$$\begin{aligned} \|S_4\| \leq & c_4 \mu^{\frac{1}{m}} \sum_{k \neq 0} \left(\sigma_3 (\sup \|A_k(s, \bar{a})\|) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\|k\|} \left(\left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial s} \right\| + \sigma \left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial \bar{a}} \right\| \right) \right) \leq c_5 \mu^{\frac{1}{m}}, \end{aligned}$$

де $c_5 = c_4 \sigma_3 \mu^{\frac{1}{m}} \sum_{k \neq 0} \left(\sup \|A_k(s, \bar{a})\| + \frac{1}{\|k\|} \left(\left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial s} \right\| + \sigma \left\| \frac{\partial A_k(s, \bar{a})}{\partial \bar{a}} \right\| \right) \right)$.

Врахувавши оцінки норм S_v , $v = 1, 4$

$$\begin{aligned} \|z(\tau, a_0, \psi_0, z_0, \mu) - \bar{z}(\tau, a_0, z_0, \mu)\| \leq & \mu^{\frac{1}{m}} (c_2 + c_3 + c_5) + \\ & + \sigma \int_0^\tau \|z(\tau, a_0, \psi_0, z_0, \mu) - \bar{z}(\tau, a_0, z_0, \mu)\| ds. \end{aligned}$$

На підставі нерівності Белмана (теорема 3.1), отримаємо

$$\|z(\tau, a_0, \psi_0, z_0, \mu) - \bar{z}(\tau, a_0, z_0, \mu)\| \leq \mu^{\frac{1}{m}} (c_2 + c_3 + c_5) \exp(\sigma L) = c_6 \mu^{\frac{1}{m}}, \quad (13)$$

де $c_6 = (c_2 + c_3 + c_5) \exp(\sigma L)$.

Для виконання одержаної оцінки на відрізку $[0, L]$ виберемо параметр $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$ так, щоб $c_6 \mu^{\frac{1}{m}} \leq \frac{\rho}{2}$. Тоді для $\mu \in (0, \mu_2)$ $\mu_2 = \min(\mu_1, (\frac{\rho}{2c_6})^m)$. Розв'язок системи (5) лежить в околі усередненої системи $\bar{z}(\tau, a_0, z_0, \mu)$ для всіх $(\tau, \mu) \in [0, L] \times (0, \mu_2]$, і для цих значень виконується оцінка (14). $\square$

4. Приклад

Розглянемо приклад диференціальної гри, коли два об'єкти мають різну інерційність, відомий як «Хлопчик і крокодил» [3, с. 71–75]. Переслідувач («крокодил») рухається повільно на поворотах через обмежений радіус кривизни траєкторії, проте здатен розвивати велику швидкість. Втікач може миттєво змінювати напрямок руху, але його швидкість є значно меншою. Диференціальна гра описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u, x \in \mathbb{R}^s, s \geq 2, \|u\| \leq \rho, \rho > 0 \\ \dot{y} &= v, y \in \mathbb{R}^s, \|v\| \leq \sigma, \sigma > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Термінальна множина є замкненою і визначається умовою M^* : $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Мета переслідувача полягає в тому, щоб спрямувати траєкторію процесу до цієї термінальної множини. Натомість мета втікача полягає у тому, щоб уникнути потрапляння до термінальної множини або максимально відтермінувати момент зустрічі.

Приведемо систему (14) до системи першого порядку. Для цього виконаємо такі заміни:

$$\begin{aligned} z_1 &= x - y, \\ z_2 &= \dot{x}. \end{aligned}$$

Тоді система (14) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - v, \\ \dot{z}_2 &= u. \end{aligned} \quad (15)$$

Час переслідування для системи (15) можна знайти із рівняння [3, с. 171]

$$\|z_1 + tz_2\| = \frac{\rho t^2}{2} - \sigma t + \varepsilon. \quad (16)$$

Нехай $z_1 = (a_1, a_2), z_2 = (b_1, b_2)$, тоді рівняння (16) набуває вигляду

$$(a_1 + a_2 t)^2 + (b_1 + b_2 t)^2 = \left(\frac{1}{2} \rho t^2 - \sigma t + \varepsilon \right)^2.$$

Зведемо одержане рівняння до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \rho^2 t^4 - \rho \sigma t^3 + (\rho \varepsilon + \sigma^2 - a_2^2 - b_2^2) t^2 - (2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 + 2\varepsilon \sigma) t + \\ + (\varepsilon^2 - a_1^2 - b_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Розглянемо модифікацію диференціальної гри «Хлопчик і крокодил» за наявності малих збурень

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u + \mu A(\tau, a, \psi), x \in \mathbb{R}^s, \\ \dot{y} &= v + \mu A(\tau, a, \psi), y \in \mathbb{R}^s, \end{aligned}$$

де $\mu \in (0, \mu_0]$ - малий параметр.

Припустимо, що усереднена за швидкими змінними система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u + \alpha \mu, x \in \mathbb{R}^s, \|u + \alpha \mu\| \leq \rho, \\ \dot{y} &= v + \beta \mu, y \in \mathbb{R}^s, \|v + \beta \mu\| \leq \sigma, \end{aligned}$$

а термінальна множина залишається незмінною $M^* : \|x - y\| \leq \varepsilon$.

Виконаємо аналогічні перетворення, отримаємо таке рівняння для знаходження часу переслідування задачі зі збуреннями

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\rho + \alpha \mu)^2 t^4 - (\rho + \alpha \mu) (\sigma + \beta \mu) t^3 + ((\rho + \alpha \mu) \varepsilon + (\sigma + \beta \mu)^2 - \\ - (a_2^2 + b_2^2)) t^2 + (-2(\sigma + \beta \mu) \varepsilon - (2a_1 a_2 + 2b_1 b_2)) t + (\varepsilon^2 - a_1^2 - b_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Розглянемо рівняння для знаходження часу завершення переслідування задачі без збурень (17) і відповідне рівняння для задачі із наявністю малих збурень (18), та проаналізуємо їхні розв'язки. Очевидно, що для значення малого параметру $\mu = 0$, рівняння (18) є тотожним рівнянню (17). Для подальшого аналізу задамо такі числові коефіцієнти. Нехай

$$a_1 = 4, a_2 = 10, b_1 = 1, b_2 = 0, \rho = 3, \sigma = 1, \varepsilon = 2.$$

Тоді рівняння (17) набуває такого вигляду

$$2.25t^4 - 3t^3 - 93t^2 - 84t - 13 = 0. \quad (19)$$

Для дослідження впливу збурень на хід гри, потрібно аналізувати найменший із додатних коренів кожного із рівнянь. Для рівняння (19) найменший додатний корінь $t_0 \approx 7.51$.

Щоб знайти розв'язок відповідного рівняння для системи зі збуреннями (18) потрібно додатково задати значення ще для трьох коефіцієнтів. Розглянемо такі випадки:

- (1) нехай $\mu = 0.1$, а коефіцієнти впливу збурень на переслідувача і втікача рівні $\alpha = 0.2, \beta = 0.2$, тоді рівняння (18) матиме вигляд

$$2.2801t^4 - 3.0852t^3 - 92.9196t^2 - 84.08t - 13 = 0.$$

Найменший додатний корінь цього рівняння $t_1 \approx 7.48$. Оскільки $t_1 < t_0$, то можна дійти очевидного висновку, що наявність мінімальних збурень із однаковим впливом на обох гравців скорочує час захоплення втікача;

- (2) нехай $\mu = 0.1$, а коефіцієнт впливу збурень на втікача значно більший, за відповідний коефіцієнт для переслідувача, тобто $\alpha = 0.1, \beta = 0.6$, а рівняння (18) матиме вигляд

$$2.260025t^4 - 3.1884t^3 - 92.8564t^2 - 84.24t - 13 = 0.$$

Найменший додатний корінь цього рівняння $t_2 \approx 7.53$, тоді $t_2 > t_0$. З цього результату можна зробити висновок, що за таких умов збурення дають певну перевагу втікачу;

- (3) нехай $\mu = 0.1$, а коефіцієнт впливу збурення на переслідувача є від'ємним $\alpha = -0.2, \beta = 0.2$, тоді рівняння (18) матиме вигляд

$$2.2201t^4 - 3.0384t^3 - 92.9996t^2 - 84.08t - 13 = 0.$$

Найменший додатний корінь цього рівняння $t_3 \approx 7.57$;

- (4) нехай $\mu = 0.1, \alpha = 0.2, \beta = -0.2$, тоді рівняння (18) матиме вигляд

$$2.2801t^4 - 2.9596t^3 - 92.9996t^2 - 76.08t - 13 = 0.$$

Найменший додатний корінь цього рівняння $t_4 \approx 7.42$. Аналізуючи розв'язки t_4, t_3 та t_0 , можна зробити висновок, що наявність збурення можуть не тільки надавати перевагу гравцеві, а і створювати перешкоди або ускладнювати ситуацію для гравця, які неодмінно вплинуть на час завершення гри.

Аналіз наведених сценаріїв показує, що збурення можуть мати різний вплив залежно від їх інтенсивності та спрямованості:

- (1) за однакового впливу збурень на переслідувача та втікача час захоплення зменшується ($t_1 < t_0$);
- (2) у разі більшого впливу збурень на втікача час захоплення збільшується, надаючи йому перевагу ($t_2 > t_0$);
- (3) негативний вплив збурень на переслідувача продовжує час гри ($t_3 > t_0$);
- (4) негативний вплив збурень на втікача, скорочують час захоплення ($t_4 < t_0$).

5. Висновки

Збурення мають значний вплив на результат гри. Вони можуть прискорювати або уповільнювати хід подій залежно від сили дії на гравців. Це вказує на важливість детального аналізу збурень для передбачення результатів гри. Розуміння цих процесів дозволяє адаптувати моделі до реальних умов і покращити точність прогнозування.

Література

1. Isaacs R. *Differential Games: A Mathematical Theory With Applications to Warfare, Control and Optimization*. Dover Publications, 1999. 416 p.
2. Pshenychnyi B. M. ε -Strategies in Differential Games. *Topics in differential games*. 1973. P. 45–99.
3. Chikrii A. O. *Conflict-controlled processes*. Boston: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
4. Chikrii A. O., Petryshyn R. I., Cherevko I. M., Bihun Ya. I. Method of Resolving Functions in the Theory of Conflict-Controlled Processes. *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems*. 2019. T. 203. P. 3–33.
5. Liubarshchuk Ye. A., Bihun Ya. I., Cherevko I. M. Non-stationary Differential-Difference Games of Neutral Type. *Dynamic Games and Applications*. 2019. T. 9, № 3. P. 771–779.
6. Liubarshchuk Ye. A., Bihun Ya. I., Cherevko I. M. Game Problems for Systems with Variable Delay. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. T. 48, № 4. P. 18–31.
7. Самойленко А. М., Петришин Р. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 474 с.
8. Бардан А.О. Усереднення в задачі диференціальної гри переслідування за наявності багаточастотних збурень. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2024. Т. 45, № 2. С. 18–28. URL: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).18-28](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).18-28).
9. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillation*. New York: Gordon and Breach, 1962. 537 p.
10. Pachpatte B. *Inequalities for Differential and Integral Equations*. New York: Academic Press, 1998. 611 p.

Стаття надійшла до редакційної колегії 27.02.2025 р.

INVESTIGATION OF DIFFERENTIAL PURSUIT GAMES UNDER PERTURBATION OF THE MOTION EQUATION

A. O. Bardan

*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University;
58012, 2 Kotsiubynskoho street, Chernivtsi, Ukraine;
e-mail: bardan.andrii@chnu.edu.ua*

The article investigates differential pursuit games in conditions where the movement of the pursuer and the escaper is affected by external small disturbances. Similar problems but without taking into account perturbations were considered in the works of A.O. Chikrii. In this article the problem is considered in the case where the control matrix changes slowly over time and is affected by multi-frequency disturbances. The averaging method is justified in the case of slowly changing frequencies. Estimates of the deviation were constructed between the solutions of the exact and averaged systems under the same initial conditions on a finite time interval. An example of a modified differential game "Crocodile and Boy" with imposed disturbances is given. The pursuit completion time for the averaged model is found. The influence of disturbances with different strength on the game completion time is analyzed. The obtained results can be applied in various control problems, where it is important to take into account the influence of external factors on the behavior of participants in dynamic processes.

Key words: *differential pursuit game, multi-frequency perturbation, disturbance, averaging method, oscillatory integral, resonance, control, small parameter, Wronskian determinant.*