УДК 517.9

НЕОБХІДНА УМОВА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СЛАБКО-НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Л. М. Шегда
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@ nung.edu.ua

Отримано необхідну умову існування розв'язків слабко нелінійних вироджених крайових задач для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Ключові слова: *центральна канонічна форма, псевдообернена матриця, імпульсна дія.*

1. Постановка задачі та допоміжні результати.

Розглядається слабко нелінійна крайова задача для диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(x,t,\varepsilon), \qquad t \ne \tau_i, \quad t,\tau_i \in [a;b], \tag{1}$$

$$\Delta E_i\, x\big|_{t=\tau_i} - S_i x(\tau_i - 0) = \gamma_i + \varepsilon J_i\big(x(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon\big), \qquad i = 1,\dots,p, \tag{2}$$

$$l\,x = \gamma + \varepsilon J\big(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big). \tag{3}$$

Рівняння (1) – це диференціальне рівняння, в якому де $A(t), B(t)$ – $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними, достатню кількість раз неперервно диференційованими на $[a;b]$ функціями: $A(t), B(t) \in C^{3q-2}\big([a;b]\setminus\{\tau_i\}_I\big)$ (значення величини q визначається згідно теореми 2.1 [1]); $\det B(t) = 0 \ \forall t \in [a;b]$; $f(t)$ – n-вимірний вектор-стовпець з простору $f(t) \in C^{q-1}\big([a;b]\setminus\{\tau_i\}_I\big)$; $Z(x,t,\varepsilon)$ – нелінійна по x n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по x в околі породжуючої крайової задачі, яку отримуємо з (1)–(3) розв'язку при $\varepsilon = 0$, неперервна або кусково-неперервна по t з розривами першого роду при $t = \tau_i$, неперервна по $\varepsilon \in C[0,\varepsilon_0]$.

Рівняння (2) даної системи дає умову стрибка розв'язку: – $\Delta x\big|_{t=\tau_i} := x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)$ при $t = \tau_i$; $E_i := E$ – $(m_i \times n)$-вимірні одиничні матриці; $E_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, E_i := (0, \dots, 0, 1, \dots, 0), \dots, i = 1, \dots, p$, $p \le n$, $\Delta E_i\, x\big|_{t=\tau_i} := E_i\big(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)\big)$; S_i – $(m_i \times n)$-вимірні матриці; γ_i, $i = 1,\dots,p$, – m_i-вимірний вектор-стовпець констант; $\gamma_i \in R^{m_i}$;

$J_i(x(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійні вектор-функціонали, неперервно диференційовані по x в розумінні Фреше [2] в околі розв'язків породжуючої крайової задачі і неперервні по $\varepsilon \in C[0, \varepsilon_0]$.

Рівняння (3) задає крайову умову: $l := col(l_1, ..., l_p)$ – лінійний обмежений m-вимірний векторний функціонал; $l : C^1([a, b] \setminus \{\tau_1, ..., \tau_p\}) \to R^m$; $l_i : C^1([a, b] \setminus \{\tau_1, ..., \tau_p\}) \to R^{m_i}$, $i = 1, 2, ..., p$; $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійний вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x в розумінні Фреше [2] в околі розв'язків породжуючої крайової задачі і неперервний по ε; $\gamma \in R^m$ – m-вимірний вектор, $\gamma := col(\gamma_1, ..., \gamma_{m_p}) \in R^m$, $m := m_1 + ... + m_p$.

Розглянемо випадок, коли відповідна однорідна породжуюча крайова задача має нетривіальні розв'язки $x_0(t, c_r)$ [3]. Будемо шукати умову існування і алгоритм побудови кусково неперервних диференційованих по t з розривами першого роду при $t = \tau_i$, неперервних по $\varepsilon \in C[0, \varepsilon_0]$ розв'язків $x = x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a; b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ крайової задачі (1)–(3), які перетворюються при $\varepsilon = 0$ в один з розв'язків $x_0(t, c_r) = x(t, 0)$ породжуючої крайової задачі

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in [a; b], \tag{4}$$

$$\Delta E_i x\big|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i, \qquad \tau_i \in (a; b), \qquad i = 1, ..., p. \tag{5}$$

Будемо вважати, що система (4) така, що невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [1, ст. 53]. Згідно з теоремою 1 [3] породжуюча крайова задача (4), (5) має r-параметричне сімейство лінійно незалежних розв'язків

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f, \gamma])(t) \tag{6}$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a, b]$ та $\gamma_i \in R^{m_i}$ в крайовій умові задовольняють d лінійно незалежним умовам:

$$P_{Q_d^*}(\gamma - l\tilde{x}(\cdot)) = 0, \tag{7}$$

де $X_{n-s}(t)$ – фундаментальна матриця відповідної однорідної диференціальної системи (4) розміром $(n \times (n - s))$, складена з $(n - s)$ лінійно незалежних розв'язків; $B(t)\dfrac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [a; b]$; $Q := l X_{n-s}(\cdot)$ – $(m \times (n - s))$-вимірна матриця; $Q := col(-S_1 X_{n-s}(\tau_1), ..., -S_p X_{n-s}(\tau_p))$; $rank\, Q = n_1 \le \min(m, n - s)$; $P_{Q^*} = I_m - QQ^+$ – $(m \times m)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^m на нуль-простір $N(Q^*)$,

$P_{Q^*}: R^m \to N(Q^*)$; $rank\, P_{Q^*} = d$; $P_{Q^*_d} = d$ – $(d \times m)$-вимірна матриця, яка складається з d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*}; $P_Q = I_{n-s} - Q^+ Q -$ – $((n-s)\times(n-s))$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^{n-s} на нуль-простір $N(Q)$, $P_Q : R^{n-s} \to N(Q)$; $rank\, P_Q = r$; P_{Q_r} – $((n-s)\times r)$-вимірна матриця, яка складається з r лінійно незалежних стовпців матриці P_Q; $X_r(t) = X_{n-s}(t)P_{Q_r}$ – матриця розміром $(n \times r)$; Q^+ – псевдообернена матриця до Q за Муром-Пенроузом [4], [5]; $(G[f,\gamma])(t)$ – узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію $f(t) \in C^{q-1}([a;b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ таким чином

$$(G[f,\gamma])(t) := \int_a^t X_{n-s}(t) Y^*_{n-s}(\tau) f(\tau) d\tau -$$

$$- \Phi(t) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1} \Psi^*(t) f(t) \right) + X_{n-s}(t) Q^+ \gamma - X_{n-s}(t) Q^+ l\tilde{x}(\cdot);$$

$$l\tilde{x}(\cdot) = l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y^*_{n-s}(\tau) f(\tau) d\tau - \Phi(\cdot) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left([\Psi^*(t) L \Phi(t)]^{-1} \Psi^*(t) f(t) \right)(\cdot) \right);$$

$Y_{n-s}(t)$ – фундаментальна матриця розміром $(n \times (n-s))$, складена з $(n-s)$ лінійно незалежних розв'язків спряженої до однорідної диференціальної системи (4); $\frac{d}{dt} B^*(t) y = -A^*(t) y$, $t, \in [a;b]$; фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ задовольняють співвідношення $Y^*_{n-s}(t) B(t) X_{n-s}(t) =$ $= E_{n-s}$; $L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$ – оператор, що діє в унітарному просторі n-вимірних вектор-функцій класу $C^1[a;b]$; $rank\, B(t) = n - r_1 = const$, $\forall t \in [a,b]$; матриця має на відрізку $[a;b]$ повний жордановий набір векторів відносно оператора $L(t)$, який складається з r_1 ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1, r_1}$; $q = \max s_i$; $s = s_1 + s_2 + ... + s_{r_1}$; $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ – $(n \times s)$-вимірні матриці, складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$ $\left(L^*(t) = \frac{d}{dt} B^*(t) + A^*(t) \right)$:

$$\Phi(t) = \left[\varphi_1^{(1)}(t), ..., \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), ..., \varphi_2^{(s_2)}(t); ..., \varphi_r^{(1)}(t), ..., \varphi_r^{(s_{r_1})}(t) \right],$$

$$\Psi(t) = \left[\psi_1^{(s_1)}(t), ..., \psi_1^{(1)}(t); \psi_2^{(s_2)}(t), ..., \psi_2^{(1)}(t); ..., \psi_r^{(s_{r_1})}(t), ..., \psi_r^{(1)}(t) \right].$$

2. Основний результат.

Знайдемо **необхідну умову** існування розв'язку $x(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1)–(3), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один з породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r)$ (6) крайової задачі (4), (5). Справедлива наступна теорема.

Теорема *(необхідна умова). Нехай крайова задача* (1)–(3) *задовольняє вказаним вище умовам і має розв'язок* $x = x(t, \varepsilon): x(\cdot, \varepsilon) \in C^1([a; b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, *який перетворюється при* $\varepsilon = 0$ *в породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_r^0)$ *(6) з константою* $c_r = c_r^0$. *Тоді вектор* $c_r^0 \in R^r$ *задовольняє рівнянню*

$$P_{Q_d^*}\left(J\left(x_0\left(\cdot, c_r^0\right), 0\right) - l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau) Z\left(x_0\left(\tau, c_r^0\right), \tau, 0\right) d\tau - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \Phi(\cdot) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\left[\Psi^*(t) L \Phi(t)\right]^{-1} \Psi^*(t) Z\left(x_0\left(t, c_r^0\right), t, 0\right) \right)(\cdot) \right) \right) = 0 . \qquad (8)$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.5 [4, ст. 109], [5, ст.119]. Позначимо ліву частину рівняння (8) через $F(c_r^0)$ і будемо називати рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1)-(3). У випадку періодичних задач константа c_r має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку, а в класичній періодичній задачі рівняння (8) має назву рівняння для породжуючих амплітуд [6].

Якщо рівняння (8) має розв'язок $c_r = c_r^0 \in R^r$, тоді вектор c_r^0 визначає той породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $x(t, \varepsilon)$ вихідної крайової задачі (1)–(3), який перетворюється в $x_0(t, c_r^0)$ при $\varepsilon = 0$. Якщо ж рівняння (8) не має розв'язків, то і крайова задача (1)-(3) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні розв'язки рівняння для породжуючих констант. Таким чином необхідна умова існування розв'язків крайової задачі (1)-(3) задовольняється вибором константи c_r в r – параметричному сімействі породжуючих розв'язків (6) та полягає в тому, щоб рівняння (8) мало хоча б один дійсний розв'язок $c_r = c_r^0 \in R^r$.

Література

1. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа: Учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

3. Systems of Singular Differential Equations with Puise / A. Boichuk, M. Langerova, M. Ruzickova, E. Voitushenko. – Advance in Difference Equations 2013, 2013:186, p. 2-12.
4. Бойчук А.А. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А.А. Бойчук, В.Ф. Журавлев, А.М.Самойленко. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
5. Boichuk A.A. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.
6. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И.Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

Стаття поступила в редакційну колегію 26.12.2014 р.
*Рекомендовано до друку к. ф-м. н., доцентом **Гургулою С.І.**, д.ф.-м.н., професором **Бойчуком О. А.** (м. Київ)*

NECESSARY CONDITION FOR THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF A WEAKLY NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH IMPULSIVE ACTION

L. M. Shegda
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

We have obtained necessary condition for existence of solution of a weakly nonlinear degenerated boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with impulsive action.

Key words: *central canonical form, pseudoinverse matrices, impulsive action.*