УДК 517.98

ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

М. І. Копач[1], А. Ф. Обшта[2], Б. А. Шувар[2]
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: kopachm2009@gmail.com
[2]*Національний університет «Львівська політехніка»*
78000, м. Львів, вул. С.Бандери, 12

Доведено теореми про існування розв'язків і їх двосторонні оцінки для одного класу нелінійних операторних рівнянь виду $x = Fx$ *у напівупорядкованому банаховому просторі* E.

Ключові слова: *напіввпорядкований простір, нормована структура, оцінки розв'язків.*

Вступ

Інтегральне рівняння

$$x(t) = f(t) + \int_D K(t,s)x^\gamma(s)ds,\ (0 < \gamma < 1), \tag{1}$$

досліджене в [1], а також рівняння виду

$$x(t) = f(t) + \int_D K(t,s)x^\gamma(s)ds + \int_D K_1(t,s)x(s)ds,\ (0 < \gamma < 1),$$

можна розглядати (див. [2]) як приклади рівняння

$$x = Fx \tag{2}$$

в банаховому просторі E з нелінійним оператором $F : E \to E$, який задовольняє умову

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\| Fx \|}{\| x \|} = \alpha \tag{3}$$

В [1] В.М. Дубровським встановлені деякі достатні умови існування розв'язків рівняння (1). В [2] зауважено, що результати В.М. Дубровського можна поширити на операторні рівняння виду (2) з оператором F, для якого виконується умова

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\| Fx \|}{\| x \|} = 0. \tag{4}$$

Умова (4) застосовувалась і іншими авторами, в тому числі А. Стюартом [3], при дослідженні крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Запропонована в [4, §8] методика дозволяє замінити умову (4) менш обмежуючою умовою (3) для рівняння (2) з монотонним оператором F.

1. Постановка задачі

Дана стаття присвячена розвитку і уточненню деяких результатів із [4] для рівняння виду (2), в якому оператор F задовольняє умову (3) із константою $\alpha \le 1$. Будемо вважати, що напіввпорядкований простір E є нормованою структурою з монотонною нормою (див., напр. [5, ст.37]).

2. Формулювання та обґрунтування результатів для рівнянь з ізотонним оператором

Теорема 1. *Нехай: 1) нормована структура є цілком правильно напіввпорядкованим простором; 2) заданий неперервний ізотонний оператор F; 3) існує таке число $M > 0$, що із співвідношення $\| x \| \ge M$ випливає нерівність*

$$\| Fx \| \le \| x \| \quad (x \in E); \tag{5}$$

4) задано елемент $u \in E$, для якого $u \le Fu$. Тоді існує розв'язок x^* рівняння (2), до якого монотонно неспадаючи збігається послідовність $\{y_n\}$, побудована з допомогою формул

$$y_0 = u, \quad y_{n+1} = Fy_n \quad (n = 0,1,...), \tag{6}$$

і має місце оцінка

$$u \le x^*.$$

Доведення. Нерівності

$$u = y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_n \le \cdots \tag{7}$$

виконуються в силу ізотонності оператора F і умови 4). Покажемо, що послідовність $\{y_n\}$ обмежена за нормою. Припустимо, що існує скінченна кількість таких y_n для яких $\| y_n \| \le M$. Тоді, починаючи з деякого n_0, для всіх $n > n_0$ будемо мати $\| y_n \| > M$. Використовуючи умову 3) і відповідні результати із [4, §8] отримаємо

$$\| y_{n_0+1} \| = \| Fy_{n_0} \| \le \| y_{n_0} \| .$$

Припускаючи для деякого $k > 0$ виконання нерівності $\| y_{n_0+k+1} \| \le \| y_{n_0+k-1} \|$, в силу умов 3), (6) і (7) отримуємо $\| y_{n_0+k+1} \| = \| Fy_{n_0+k} \| \le \| y_{n_0+k} \|$. На основі принципу математичної індукції маємо $\| y_{n_0} \| \ge \| y_{n_0+1} \| \ge \cdots \ge \| y_{n_0+k} \| \ge \cdots$.

Таким чином, послідовність $\{y_n\}$ обмежена за нормою деякою величиною M_1, взагалі кажучи, більшою, ніж M. Нехай тепер існує як нескінченна кількість членів послідовності $\{y_n\}$, для яких $\| y_n \| \le M$. так і нескінченна кількість її членів, для яких $\| y_n \| > M$. Виберемо довільно два номери n_1 і n_2, $n_1 < n_2$ для яких $\| y_{n1} \| \le M$, $\| y_{n2} \| \le M$, припускаючи при цьому, що між n_1 і n_2 знайдеться таке n_3, для якого

$\| y_{n_3} \| > M$. На основі (7) маємо, що $y_{n_1} \le y_{n_3} \le y_{n_2}$ Застосовуючи лему 8.1 [4, с. 37], отримуємо оцінку

$$\| y_{n_3} \| \le \| y_{n_1} \| + \| y_{n_2} \| \le 2M,$$

яка говорить про те, що послідовність $\{y_n\}$ обмежена за нормою деяким числом $M_2 = \max\{M_1, 2M\}$. Монотонно неспадна обмежена за нормою послідовність $\{y_n\}$ у цілком правильно напіввпорядкованому просторі E має границю

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x^*,$$

при цьому $u \le x^*$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1)-3) теореми 1 і вибрано елемент $v \in E$, для якого $v \ge Fv$. Тоді існує розв'язок x^* рівняння (2), до якого монотонно незростаючи збігається послідовність $\{z_n\}$, побудована за допомогою формул*

$$z_0 = v, \quad z_{n+1} = Fz_n \quad (n = 0,1,...) \tag{8}$$

і має місце оцінка $x^* \le v$.

Доведення. Аналогічне до доведення теореми 1.

Якщо в умові 3) теореми 1 вимагати виконання нерівності

$$\| Fx \| < \| x \| \tag{9}$$

при $\| x \| \ge M$, $x \in E$, то будь-який розв'язок $x \in E$ рівняння (2) буде знаходитися в області $D = \{x \| \|x\| < M, x \in E\}$. Припускаючи, що для деякого розв'язку $x \in E$ рівняння (2) виконується нерівність $\| x \| \ge M$, а з (2) і (9) отримуємо $\| x \| = \| Fx \| < \| x \|$, що неможливо.

Теорема 3. *Нехай E – KN-простір обмежених елементів, оператор F – неперервний і ізотонний, а також існує таке число $M > 0$, що із нерівності $\| x \| \ge M$, $x \in E$ випливає нерівність (9). Тоді рівняння (2) має в E нижній розв'язок y^* і верхній розв'язок z^*.*

Доведення. Якщо e – одиниця в KN-просторі обмежених елементів, а y – довільний елемент з E, для якого маємо $\|y\| \ge M$, то $\| y \| e \ge Me$. Позначимо $a = Me$. Оскільки $\|a\| = \|-a\| = M$, то $\| Fa \| \le \| a \|$, $\| F(-a) \| \le \| -a \|$. Тому

$$| Fa | = \| Fa \| e \le \| a \| e = Me = a,$$

$$| F(-a) | = \| F(-a) \| e \le \| a \| e = Me = a.$$

Звідси отримуємо $-a \le F(-a)$, $a \ge Fa$. Із виконання умов теорем 1 і 2 при $u = -a$, $v = a$ робимо висновок про існування в E розв'язку y^* рівняння (2), до якого монотонно неспадаючи збігається послідовність $\{y_n\}$, побудована за допомогою формул (6), і розв’язку z^* цього ж рівняння, до якого монотонно незростаючи збігається послідовність $\{z_n\}$, побудована за допомогою формул (8). При цьому методом математичної індукції можна довести виконання співвідношень

$$u = -a \le y^*,\ v = a \ge z^*,\ y^* \le z^*,$$

звідки випливає, що $-a \le y^* \le z^* \le a$. Переконаємося, що y^* – нижній, а z^* – верхній розв’язок рівняння (2). Як доведено вище, довільний розв'язок $x \in E$ рівняння (2) належить області D. Завдяки визначенню елемента $a = Me$ маємо $x \in [-a, a] = \{x | -a \le x \le a, x \in E\}$. Обгрунтувати нерівність $y^* \le x \le z^*$ можна виходячи із принципу математичної індукції і нерівностей $y_n \le y_{n+1} \le x \le z_{n+1} \le z_n$ $(n = 0,1,\ldots)$, оскільки $u = -a, v = a$. Цим закінчується доведення теореми.

3. Зауваження для випадку рівнянь з цілком неперервним ізотонним оператором

Якщо F – цілком неперервний оператор, а E – банахів простір (не обов'язково напівпорядкований), то виконання умови 3) теореми 1 гарантує існування принаймні одного розв’язку $x \in E$ рівняння (2). Умова 3) означає, що оператор F перетворює кулю $S(M) \subset E$ в компактну обмежену множину B. Якщо вибрати число $M_1 > M$ настільки великим, щоб куля $S(M_1)$ містила в собі множини $S(M)$ і B, то з умови 3) випливає, що оператор F переводить цю множину в себе. Тому до рівняння (2) можна застосувати принцип Шаудера.

4. Формулювання і обгрунтування результатів для рівнянь з антитонним оператором

Розглянемо випадок неперервного антитонного оператора $F : E \to E$, для якого при $y \le z$, $y, z \in E$ маємо $Fy \le Fz$, $Fy \ge Fz$. Задамо норму пари (y, z) елементів $y, z \in E$ за допомогою одної з формул

$$\| y, z \| = \max\{\| y \|, \| z \|\},$$

$$\| y, z \| = (\| y \|^p + \| z \|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \ge 1),$$

а напівпорядкованість пари (y, z) наступним чином: $(y, z) \le (u, v)$, якщо $y \le u,\ z \le v$ або $(y, z) \le (u, v)$ при $y \le u,\ z \ge v$, де $y, z, u, v \in E$. Для норми $\| y, z \|$ для довільних $y, z \in E$ мають місце співвідношення $\| y \| \le \| y, z \|,\ \| z \| \le \| y, z \|$.

З такою напівпорядкованістю простір $E \times E$ є цілком правильно напівпорядкованим простором і структурою, якщо цими властивостями володіє простір E.

Теорема 4. *Нехай: 1) E – цілком правильно напівврядкований простір і структура; 2) оператор F – антитонний ; 3) існує таке число $M > 0$, що із співвідношення $\| y,z \| > M$ випливає нерівність*

$$\| Fy, Fz \| \le \| y,z \|; \left\| Fy, Fz \right\| \le \left\| y,z \right\|; \tag{10}$$

4) задано елементи $u, v \in E$, для яких

$$u \le Fv, \quad v \ge Fu; \tag{11}$$

5) система рівнянь

$$y = Fz, \quad z = Fy; \tag{12}$$

має не більше одного розв'язку в $E \times E$; 6) рівняння (2) має розв'язок. Тоді для єдиного розв'язку $x^* \in E$ рівняння (2) мають місце оцінки

$$y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_n \le \cdots \le x^* \le \cdots \le z_n \le \cdots \le z_1 \le z_0,$$

де послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ побудовані за допомогою формул

$$y_0 = u, \quad z_0 = v, \quad y_{n+1} = Fz_n, \quad z_{n+1} = Fy_n. \tag{13}$$

При цьому послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ збігаються до x^* за нормою в E.

Доведення. З антитонності оператора F та співвідношень (11), (12), (13) випливає

$$y_0 \le Fz_0 = y_{1,} \quad z_1 = Fy_0 \le z_0.$$

Тому $y_2 = Fz_1 \ge Fz_0 = y_1$, $z_2 = Fy_1 \le Fy_0 = z_1$. Використовуючи принцип математичної індукції можна довести справедливість нерівностей

$$y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_n \le y_{n+1} \le \cdots, \quad z_0 \ge z_1 \ge \cdots \ge z_n \ge z_{n+1} \ge \cdots. \tag{14}$$

Переконаємось тепер у тому, що послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ обмежені за нормою. Якщо б, починаючи з деякого номера $n = N \ge 0$, ми мали б

$$\| y_n, z_n \| \le M, \tag{15}$$

то були б обмежені за нормою і послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. Припустимо протилежне. Нехай для довільного $N > 0$ знайдеться такий номер $n > N$, що

$$\| y_n, z_n \| > M. \tag{16}$$

Можливі два випадки. В першому випадку знайдеться не більше ніж скінченна кількість членів послідовності $\{(y_n, z_n)\}$, для яких $\| y_n, z_n \| \le M$. Тоді, починаючи з деякого номера $n = N$, буде виконуватись нерівність (16). На основі (13) і умови 3) для таких n будемо мати

$$\| y_{N+1}, z_{N+1} \| = \| Fz_N, Fy_N \| \le \| z_N, y_N \| = \| y_N, z_N \|. \tag{17}$$

Припускаючи виконання нерівності (17) при $n = N + k$, тобто

$$\| y_{N+k}, z_{N+k} \| \le \| z_{N+k-1}, y_{N+k-1} \|,$$

із (13) і умови 3) отримуємо

$$\| y_{N+k+1}, z_{N+k+1} \| = \| Fz_{N+k}, Fy_{N+k} \| = \| Fy_{N+k}, Fz_{N+k} \| \leq \| y_{N+k}, z_{N+k} \|,$$

що на основі принципу математичної індукції доводить нерівності

$$\| y_N, z_N \| \geq \| y_{N+1}, z_{N+1} \| \geq \cdots \geq \| y_{N+k}, z_{N+k} \geq \cdots \|.$$

Позначивши

$$G = \{(y,z) \| \| y,z \| \leq \sup \| y_N, z_N \|, y,z \in E\},$$

маємо, що послідовність $\{(y_n, z_n)\}$ обмежена за нормою в скінченній області $G \subset E \times E$. Якщо ж кількість членів послідовності $\{(y_n, z_n)\}$, для яких має місце нерівність (15), нескінченна і також нескінченна кількість членів цієї ж послідовності, для яких виконується (16), тоді існує нескінченне число членів, наприклад, послідовності $\{z_n\}$, для яких $\| z_n \| \leq M$ і нескінченне число її членів, для яких $\| z_n \| > M$. Виберемо довільним чином номери n_1 і n_2, для яких $\| z_{n_1} \| \leq M$, $\| z_{n_2} \| \leq M$. Якщо знайдеться таке n_3 що $n_1 \leq n_3 \leq n_2$ і $\| z_{n_3} \| > M$, то з (14) отримуємо $z_{n_1} \leq z_{n_3} \leq z_{n_2}$. Застосовуючи лему 8.1 [4, с. 37], маємо

$$\| z_{n_3} \| \leq \| z_{n_1} \| + \| z_{n_2} \| \leq 2M. \tag{18}$$

Довільний вибір n_1, n_2, n_3 і нерівності (17) дають підстави робити висновок про те, що нерівність $\| z_n \| \leq 2M$ виконується для всіх $n \in N$ або починаючи з деякого номера n_0. Аналогічно доводиться обмеженість за нормою послідовності $\{y_n\}$. У цілком правильно напіввпорядкованому просторі E монотонні і обмежені за нормою послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ збігаються за нормою в E до своїх границь y^* і z^*. Крім цього, послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ співпадають відповідно з послідовностями $\{Fz_{n-1}\}$, $\{Fy_{n-1}\}$. Звідси випливає, що y^* і z^* є компонентами розв'язку (y^*, z^*) системи (12). Оскільки рівняння (2) має розв'язок $x^* \in E$, а система (12) має єдиний розв'язок, то $y^* = z^* = x^*$, що й треба було довести.

Зауваження 1. *Зауважимо, що умови 1)-4) теореми 4 забезпечують існування розв'язку системи (12), але не гарантують існування розв'язку рівняння (1). Тому доцільно до попередніх умов 1)-4) приєднати умову 6). З іншого боку, якщо x – розв'язок рівняння (2), то система (12) може мати розв'язки відмінні від пари (x,x). Це спонукає до приєднання також і умови 5).*

Зауваження 2. *Нехай K – конус додатних елементів у нормованій структурі E, яка є цілком правильно впорядкованим простором. Якщо в попередньому викладі в умовах теорем припущення, що оператор F діє з E в E замінити припущенням, що F діє з K в K, то при їх об-*

ґрунтуванні посилання на лему 8.1 з [4] не потрібне, оскільки достатньо використати властивість монотонності норми в K. *Обґрунтування тверджень цих теорем для випадку, коли* $F : E \to E$ *можливе при використанні згадуваної леми 8.1 з [4], згідно з якою співвідношення* $y \le x \le z \quad (y, x, z \in E)$ *тягнуть за собою виконання нерівності*

$$\| x \| \le \| y \| + \| z \| .$$

Література

1. Дубровский В.М. Системи нелинейных нтегральных уравнений / В.М. Дубровский // Успехи мат.наук. – 1949. – Т.4. – №2. – С. 176-177.
2. Красносельский М.А. Некоторые задачи неленейного анализа / М.А. Красносельский // Успехи мат. наук. – 1954. – Т.9. – №3. – С. 57-114.
3. Stuart C.A. Integral equations with geereasing nonlinearitres and applications / C.A. Stuart // J. Different Equat. – 1975. – Vol.18. – №1. – P. 202-207.
4. Курпель Н.С. Двусторонние операторные неравенства и их применение / Н.С. Курпель, Б.А. Шувар. – К: Наук. думка, 1980. – 267 с.
5. Вулих Б.З. Ведение в теорию полуупорядоченных пространств / Б.З. Вулих. – М: Физматгиз, 1961. – 407 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 23.09.2014 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором,
член-кореспондентом НАН України ***Пташником Б.Й*** *(м. Львів),*
д.т.н., професором ***Олійником А.П.***

ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE ONE CLASS OF OPERATOR EQUATIONS

M. I. Kopach[1], A. F. Obshta[2], B. A. Shuvar[2]
[1]Vasyl Stefanik Precarpathian National University
76000, Ivano-Frankivsk, st. Shevchenka, 57;
e-mail: kopachm2009@gmail.com
[2]National University "Lvivska Politechnika";
79013, Lviv, st. S. Bander, 12

In this paper it is proved some theorem on existence of solution in a class of differential equation $x = Fx$ *in semi-ordered Banach space* E *and given some estimations for the solutions.*

Key words*: semi ordering space, normalized structure, evaluation of solutions.*