УДК 517.53

ЦІЛА КРИВА З ЛІНІЙНОЗАЛЕЖНИМИ КОМПОНЕНТАМИ ТА НАПЕРЕД ЗАДАНОЮ МНОЖИНОЮ ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ

Я. І. Савчук

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Для наперед заданої множини векторів побудовано цілу криву довільного скінченного додатного порядку з лінійно залежними компонентами, для якої множина неванліннівських дефектних векторів співпадає з заданою множиною.

Ключові слова: *ціла крива, неванліннівський дефектний вектор, мероморфна функція, допустима система векторів.*

Дана стаття є продовженням [1], тому використовуватимемо позначення, які є в [1] та [2], а також основні результати теорії цілих кривих.

Основним результатом [1] є

Теорема А. *Для довільної кривої* $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$ *скінченного порядку з* ω*-лінійно залежними компонентами множина* $D\left(\vec{G}\right)\cup A_0$ *є не більше ніж зліченним об'єднанням підпросторів* $A_j\in\boldsymbol{C}^p$ розмірності $\le p-1$.

Тут позначено через ω, $0\le\omega\le p-2$ розмірність лінійного підпростору $A_0=\left\{\vec{a}\in\boldsymbol{C}^p:\vec{G}\left(z\right)\cdot\vec{a}\equiv 0\right\}$.

Метою цієї статті є доведення такої теореми.

Теорема. *Нехай* A_0 *– довільний підпростір із* $\boldsymbol{C}^p$ *розмірності* $\omega\le p-2$, $\left\{A_j\right\}_{j=1}^{q}$ $\left(1\le q\le\infty\right)$ *– довільна система підпросторів із* $\boldsymbol{C}^p$, $A_j\supset A_0$, $\dim A_j\le p-1$, $0<\rho<\infty$. *Тоді існує ціла крива* $\vec{G}(z)=\left(g_1(z),\,g_2(z),\,\dots,g_p(z)\right)$ *з* ω*-лінійно залежними компонентами, для якої:*

а) $\left\{\vec{a}\in\boldsymbol{C}^p:\vec{G}\left(z\right)\cdot\vec{a}\equiv 0\right\}=A_0$;

б) *довільний вектор* $\vec{a}\in A=\bigcup\limits_{j=1}^{q}A_j$, $\vec{a}\notin A_0$, *буде дефектним, тобто* $\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)>0$;

в) *для усіх векторів* $\vec{a}\in\boldsymbol{C}^p\setminus A$ *виконується* $\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)=0$.

Відзначимо, що ця теорема є узагальненням відповідного результату в [3] на випадок цілих кривих з лінійно залежними компонентами.

Д о в е д е н н я. Нам буде зручно не вимагати, щоб компоненти цілої кривої не мали спільних нулів, в зв`язку з чим характеристику цілої кривої $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{p}}$ визначимо так:

$$T\left(r,\vec{G}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi-N\left(r,\vec{G}\right),$$

де $n\left(r,\vec{G}\right)$ – кількість нулів $\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|$ в крузі $\left\{z:|z|\le r\right\}$, а $N\left(r,\vec{G}\right)$ визначається за $n\left(r,\vec{G}\right)$ звичайним чином.

Отже, нехай $\vec{a}\in A=\bigcup_{j=1}^{q}A_j\ \left(1\le q\le\infty\right)$, $\dim A_j=p-n_j\le p-1$. Не виключатимемо можливості $A_j=A_0$ для деяких $j\in\boldsymbol{N}$. Тоді можна обмежитись випадком $q=\infty$. Для зручності перенумеруємо усі підпростори A_j, крім A_0, таким чином, щоб $A=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}A_j$.

Спочатку будуватимемо шукану цілу криву при $0<\rho<1/2$.

Для довільного $j\in\boldsymbol{Z}$ існують лінійно незалежні вектори $\vec{b}_j^{(1)},\vec{b}_j^{(2)},\ldots,\vec{b}_j^{(n_j)}$, такі, що для довільного вектора $\vec{a}_j\in A_j$ виконуються

$$\vec{a}_j\vec{b}_j^{(s)}=0,\quad s=1,2,\ldots,n_j,\tag{1}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{s=1}^{n_j}\left\|\vec{b}_j^{(s)}\right\|<\infty.\tag{2}$$

Позначимо $\vec{P}_j\left(z\right)=\vec{b}_j^{(1)}+\vec{b}_j^{(2)}z+\ldots+\vec{b}_j^{(n_j)}z^{n_j-1}$.

Оскільки вектори $\vec{b}_j^{(1)},\vec{b}_j^{(2)},\ldots,\vec{b}_j^{(n_j)}$ – лінійно незалежні і $\dim A_j=p-n_j$, то рівність (1) виконується тільки для векторів із A_j. Для $\vec{a}\in\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{p}}\setminus A_j$ маємо

$$\sum_{s=1}^{n_j}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}_j^{(s)}\right|>0.\tag{3}$$

Тому

$$\vec{P}_j\left(z\right)\vec{a}\not\equiv0,\ \vec{a}\notin A_j;\ \ \vec{P}_j\left(z\right)\vec{a}\equiv0,\ \vec{a}\in A_j\ .\tag{4}$$

Відповідно до (2) виконується

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\|\vec{P}_j\left(z\right)\right\|=O\left(r^{p-1}\right),\ r\to\infty.\tag{5}$$

Виберемо послідовність θ_j таку, що: $-\pi < \theta_j < \pi$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{j+1} > \theta_j$, $\theta_j \to \pi$ при $j \to +\infty$, $\theta_j \to -\pi$ при $j \to -\infty$.

Покажемо, що ціла крива

$$\vec{G}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vec{P}_j(z) W\left(ze^{-i\theta_j}\right), \tag{6}$$

де $W(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + z \cdot n^{-1/\rho}\right)$, є шуканою.

Оскільки за умовою теореми $A_j \supset A_0$ при всіх $j \in \boldsymbol{Z}$, то, відповідно до (4), для довільного $\vec{a} \in A_0$ матимемо $\vec{P}_j(z)\vec{a} \equiv 0$ для всіх $j \in \boldsymbol{Z}$, отже, $\vec{G}(z) \cdot \vec{a} \equiv 0$.

Так як $W\left(re^{i\varphi}\right) = o\left\{W(r)e^{2-p}\right\}$, $r \to \infty$, при $\varphi \in \left]0, 2\pi\right[$, то, відповідно до (4),

$$\vec{G}(z) \cdot \vec{a} = \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \vec{P}_j(z)\vec{a} \cdot W\left(ze^{-i\theta_j}\right) + \vec{P}_0(z)\vec{a} \cdot W(z) \not\equiv 0,$$

для всіх $\vec{a} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{p}} \setminus A_0$.

Отже, ми показали, що побудована нами ціла крива виду (6) задовольняє умові а) теореми, і, очевидно є цілою кривою з ω-лінійно залежними компонентами. Доведемо тепер виконання інших умов.

Відомо (див., напр., [4, гл. II, п.5]), що

$$\ln M(r, W) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} r^{\rho} + o\left(r^{\rho}\right), \quad r \to \infty;$$

при $\varphi \in [-\pi; \pi]$ рівномірно виконується

$$\ln\left|W\left(re^{i\varphi}\right)\right| \leq \frac{\pi \cos \varphi\rho}{\sin \pi\rho} r^{\rho} + o\left(r^{\rho}\right), \quad r \to \infty,$$

причому при $\varphi \in [-\pi + \delta; \pi - \delta]$, $\delta > 0$ рівномірно виконується

$$\ln\left|W\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \frac{\pi \cos \varphi\rho}{\sin \pi\rho} r^{\rho} + o\left(r^{\rho}\right), \quad r \to \infty.$$

Звідси та із (5) отримуємо

$$T\left(r, \vec{G}\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\|\vec{P}_j\left(re^{i\varphi}\right)\right\| \cdot M(r, W)\right\} d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{\sin \pi\rho} r^{\rho} + o\left(r^{\rho}\right), \quad r \to \infty. \tag{7}$$

Зафіксуємо число $m \in \boldsymbol{Z}$. Візьмемо $\eta = \eta(m)$, $0 < \eta < \left(\theta_{m+1} + \theta_{m-1}\right)/4$ і розглянемо цілу криву в куті

$V_m = V_m(\eta) = \{z : (\theta_m + \theta_{m-1})/2 + \eta < \varphi = \arg z < (\theta_{m+1} + \theta_m)/2 - \eta\}$. Нехай $\vec{a} \in A_m \setminus A_0$. Тоді, враховуючи (4), отримуємо:

$$\frac{\left|\vec{G}(z)\cdot\vec{a}\right|}{\left\|\vec{G}(z)\right\|} = \frac{\left|\sum\limits_{\substack{j=-\infty \\ j\neq m}}^{\infty} \vec{P}_j(z)\vec{a}\cdot W\left(ze^{-i\theta_j}\right)\right|}{\left\|\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \vec{P}_j(z)\cdot W\left(ze^{-i\theta_j}\right)\right\|} = \frac{\left|\sum\limits_{\substack{j=-\infty \\ j\neq m}}^{\infty} \vec{P}_j(z)\vec{a}\cdot W\left(ze^{-i\theta_j}\right)\Big/W\left(ze^{-i\theta_m}\right)\right|}{\left\|\vec{P}_m(z) + \sum\limits_{\substack{j=-\infty \\ j\neq m}}^{\infty} \vec{P}_j(z)\cdot W\left(ze^{-i\theta_j}\right)\Big/W\left(ze^{-i\theta_m}\right)\right\|}.$$

Міркуючи як і в [4, с.164-165], маємо

$$\ln\left|\frac{W\left(re^{i(\varphi-\theta_j)}\right)}{W\left(re^{i(\varphi-\theta_m)}\right)}\right| \le -A_m(\eta)\cdot r^\rho + o\left(r^\rho\right), \quad r\to\infty, \tag{8}$$

де $A_m(\eta) > 0,\ j \neq m$, рівномірно відносно φ та j в куті V_m. Звідси та із (5)

$$\begin{aligned}\frac{\left|\overline{G}(z)\cdot\vec{a}\right|}{\left\|\overline{G}(z)\right\|} &= \frac{O\left(r^{p-1}\right)\cdot exp\left\{-A_m(\eta)\cdot r^p + o\left(r^p\right)\right\}}{\left\|\vec{P}_m(z) + O\left(exp\left\{-A_m(\eta)\cdot r^p + o\left(r^p\right)\right\}\right)\right\|} \le \\ &\le exp\left\{-A_m(\eta)\cdot r^p + o\left(r^p\right)\right\}, \qquad r\to\infty\end{aligned} \tag{9}$$

рівномірно в куті V_m.

Тоді, враховуючи (9), матимемо

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right) \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\theta_m+\theta_{m-1})/2+\eta}^{(\theta_{m+1}+\theta_m)/2-\eta} \ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{a}\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\vec{a}\right|}\,d\varphi + O(1) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\pi}\left(\left(\theta_{m+1} - \theta_{m-1}\right)/2 - 2\eta\right)A_m(\eta)\cdot r^\rho + o\left(r^\rho\right), \quad r\to\infty. \tag{10}$$

Враховуючи (7) та (10), отримуємо, що порядок цілої кривої дорівнює ρ і $\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right) > 0$.

Отже, ми показали (при $0 < \rho < 1/2$), що для побудованої цілої кривої $\vec{G}$ за формулою (6) виконується $A \subset D\left(\vec{G}\right) \cup A_0$, тобто виконується умова б).

Нехай тепер $\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p \setminus A$, тобто $\vec{a} \notin A_j$ при всіх $j \in \boldsymbol{Z}$. Тому $\vec{P}_j(z)\vec{a} \not\equiv 0$ при всіх $j \in \boldsymbol{Z}$ відповідно до (4). Оскільки $\vec{P}_j(z)\vec{a}$ – многочлен, то $\left|\vec{P}_j(z)\vec{a}\right| \ge \alpha_j > 0$ при $r = |z| \ge r_0(j)$. Звідси ($r = |z| \ge r_0(m)$)

$$\frac{\left\|\overline{G}(z)\right\|}{\left|\overline{G}(z)\cdot\vec{a}\right|}=\frac{\left\|\vec{P}_m(z)+\sum\limits_{\substack{j=-\infty\\ j\neq m}}^{\infty}\vec{P}_j(z)\cdot W\left(ze^{-i\theta_j}\right)\Big/W\left(ze^{-i\theta_m}\right)\right\|}{\left|\vec{P}_m(z)\vec{a}+\sum\limits_{\substack{j=-\infty\\ j\neq m}}^{\infty}\vec{P}_j(z)\vec{a}\cdot W\left(ze^{-i\theta_j}\right)\Big/W\left(ze^{-i\theta_m}\right)\right|}\leq \tag{11}$$

$$\leq\frac{2}{\alpha_j}\left\|\vec{P}_m(z)\right\|=0\left(r^{p-1}\right),\qquad r\to\infty$$

рівномірно в куті $V_m(\eta)$

Нам далі потрібна буде така лема [2, гл. 2, п. 1].

Лема А. *Нехай* $\vec{G}$ *– ціла* p*-мірна крива,* k *та* μ *– деякі додатні числа,* $k>1$, $0<\mu\leq 2\pi$, $\vec{a}\in \boldsymbol{C}^p\setminus A_0$. *Тоді існує таке* $K>0$, *що для довільної вимірної множини* $E_r\subset[-\pi;\pi]$, $mesE_r\leq\mu$ *при* $r\geq r_0>1$ *виконується*

$$\int\limits_{E_r}\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{a}\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\vec{a}\right|}d\varphi\leq\frac{K\,p}{k-1}\mu\ln\frac{32}{\mu}\cdot T\left(kr,\vec{G}\right). \tag{12}$$

Візьмемо довільне $\mu>0$. Очевидно, існує таке $n_0=n_0(\mu)\in\boldsymbol{N}$, що

$$\left(\pi-\theta_{n_0}\right)+\left(\theta_{-n_0}+\pi\right)<\mu/2. \tag{13}$$

Виберемо числа $\eta(s)$, $-n_0\leq s\leq n_0$, такими, щоб виконувалось

$$\sum_{s=-n_0}^{n_0}\eta(s)<\mu/4\ . \tag{14}$$

Тепер оцінимо $m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)$:

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{a}\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\vec{a}\right|}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{E_r}+\sum_{s=-n_0}^{n_0}\int\limits_{(\theta_s+\theta_{s-1})/2+\eta(s)}^{(\theta_{s+1}+\theta_s)/2-\eta(s)}\right)\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{a}\right\|}{\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\vec{a}\right|}d\varphi+\ln\left\|\vec{a}\right\|=\sigma_1+\sigma_2+\ln\left\|\vec{a}\right\|, \tag{15}$$

де $E_r=\left\{\bigcup\limits_{s=-n_0}^{n_0}\left]\left(\theta_{s+1}+\theta_s\right)/2-\eta(s);\ \left(\theta_{s+1}+\theta_s\right)/2+\eta(s+1)\right[\right\}\cup$

$$\cup\left[-\pi;\ \left(\theta_{-n_0}+\theta_{-n_0-1}\right)/2+\eta(-n_0)\right[\cup\left]\left(\theta_{n_0}+\theta_{n_0+1}\right)/2-\eta(n_0);\ \pi\right].$$

З (13) та (14) легко видно, що $mesE_r \le \mu$. Тому відповідно до леми А

$$\sigma_1 \le \frac{K\,p}{k-1}\mu \ln\frac{32}{\mu}\cdot T\left(kr,\vec{G}\right) \le \frac{K\,p}{k-1}\mu \ln\frac{32}{\mu}\cdot C\left(k\right)\cdot T\left(r,\vec{G}\right),\ C\left(k\right)=const. \quad (16)$$

Остання нерівність записана в зв`язку з тим, що

$$T\left(r,\vec{G}\right)=O\left(r^{\rho}\right),\quad r^{\rho}=O\left(T\left(r,\vec{G}\right)\right),\quad r\to\infty$$

Оскільки в σ_2 входить скінченна кількість доданків, то, відповідно до (11), маємо:

$$\sigma_2 = O\left(\ln r\right)=o\left(T\left(r,\vec{G}\right)\right),\quad r\to\infty. \quad (17)$$

Об`єднуючи (15), (16) та (17), отримаємо

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)\le\left\{\frac{K\,p}{k-1}\mu\ln\frac{32}{\mu}\cdot C\left(k\right)+o\left(1\right)\right\}\cdot T\left(r,\vec{G}\right),\quad r\to\infty.$$

Звідси, $\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)\le\frac{K\,p}{k-1}\mu\ln\frac{32}{\mu}\cdot C\left(k\right)$. Спрямувавши тут $\mu\to 0$, отримаємо $\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)=0$, тобто довільний вектор $\vec{a}\in \boldsymbol{C}^p\setminus A$ не буде неванліннівським дефектним вектором для побудованої нами цілої кривої $\vec{G}$ за формулою (6).

Отже, теорема доведена повністю для випадку $0<\rho<1/2$.

Неважко перевірити, що якщо $\vec{L}\left(z\right)=\vec{G}\left(z^n\right)$, то $\rho\left(\vec{L}\right)=n\cdot\rho\left(\vec{G}\right)$. Враховуючи це і розглядаючи цілі криві $\vec{G}\left(z^n\right)$, $n=1, 2,\ldots$, отримуємо приклади цілих кривих з ω-лінійно залежними компонентами і множиною дефектних векторів, яка співпадає з $A\setminus A_0$, і довільним порядком $0<\rho<n/2$. Оскільки n може бути яким завгодно великим, то і порядок ρ може бути будь-яким додатним скінченним числом.

Література

1. Савчук Я.І. Структура множини неванліннівських дефектних векторів для цілих кривих з лінійно залежними компонентами / Я.І. Савчук // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2013. – №1(21). – С. 20-25.
2. Петренко В.П. Целые криве / В.П. Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.
3. Савчук Я.И. О множестве дефектных векторов целых кривых / Я.И. Савчук // Укр. мат. журн. – 1983. – Т.35, №3. – С. 385-389.
4. Гольдберг А.А. Распределение значений мероморфных функцій / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 15.12.2014 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Лопушанським О.В.*** *(м. Львів)*

WHOLE CURVE WITH LINEAR DEPENDENT COMPONENTS AND BEFOREHAND SET GREAT NUMBER OF IMPERFECT VECTORS

Ya. I. Savchuk
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

For the beforehand set great number of vectors the whole curve of random continues positive order with linearly dependent components, for which the great number of nevanlinn imperfect vectors coincides with the set great number, is built.

Key words: *whole curve, nevanlinn imperfect vector, meromorphic function, possible system of vectors.*