Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.95+511.2
DOI: 10.31471/2304-7399-2024-19(73)-47-56

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

І. Р. Тимків[1], І. Я. Савка[2], М. В. Дзюба[3]
[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б;
[3]ЗВО Університет Короля Данила; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Євгена Коновальця, 35; e-mail: tymkiv_if@ukr.net, s-i@ukr.net, dziubataryna2015@ukr.net

В обмеженій циліндричній області досліджено двоточкову задачу за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для одного гіперболічного рівняння четвертого порядку з оператором Бесселя. Доведено теореми існування та єдиності розв'язку задачі у просторі аналітичних за t на відрізку $[0,T]$ *функцій. За допомогою метричного підходу встановлено оцінки знизу для значень виразів, які містять функції Бесселя півцілого індексу. Ці вирази входять у знаменники коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок задачі.*

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, оператор Бесселя, малий знаменник, міра Лебега.*

Крайові задачі для рівнянь із частинними похідними з виродженими коефіцієнтами виникають при моделюванні дифузійних, гідро та газодинамічних процесів, явищ тепломасопереносу, кристалографії тощо. Дослідженню таких задач присвячені роботи [1-3, 7, 8, 13]. Зокрема, у працях [2, 3, 13] вивчено нелокальні двоточкові та багатоточкові задачі для параболічних рівняньз виродженнями та особливостями.

Одним із класом рівнянь із виродженими коефіцієнтами є рівняння, що містять оператор Бесселя [7, 8, 9, 12]. Зокрема, у роботі [7] в класі аналітичних функцій від дійсної змінної встановлено коректну розв'язність крайової задачі для одного виродженого за радіальною змінною параболічного рівняння другого порядку. Також умови розв'язності триточкової та мішаної задач з ваговою інтегральною умовою для параболічного рівняння з оператором Бесселя за просторовою змінною (B-параболічних рівнянь) встановлено у праці [8, 11], а умови розв'язності локальної багатоточкової задачі для таких рівнянь, але високого порядку – в роботі [5].

У даній роботі для факторизованого гіперболічного рівняння, що містить оператор Бесселя $\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\nu}{t}\frac{\partial}{\partial t}$, досліджено знаходження (в класі функцій, аналітичних за t) розв'язку $u(t,x)$ двоточкової задачі з умовами типу Діріхле. Розв'язність цієї задачі пов'язана з проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано метричний підхід [4, 10]. Малими знаменниками у даній задачі будуть нелінійні вирази, що містять функції Бесселя півцілого індексу.

Використовуватимемо такі позначення:

$$J_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n},\ n\in\mathbb{R},-$$

функція Бесселя (див. [14]) першого роду порядку n, де $\Gamma(q)$, $q\geq 0$, – гамма-функція Ейлера.

$L=-\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+q(x)$– диференціальний вираз, в якому $p_{ij}(x)=p_{ji}(x)>0,\ i,j\in\{1,\dots,p\},\ q(x)\geq 0$. Припустимо, що для цього виразу L виконуються додаткові умови $p_{ij}\in \mathrm{C}^{3,\rho}(\overline{G})$, $i,j\in\{1,\dots,p\}$, $q\in \mathrm{C}^{2,\rho}(\overline{G})$, $x\in\overline{G}$,$\overline{G}\subset\mathbb{R}^p$,– обмежена однозв'язна область, $0<\rho<1$. Тоді задача [4]

$$LX(x)=\lambda X(x),\quad X(x)|_{\partial G}=0$$

має повну ортонормовану в просторі $L_2(\overline{G})$ систему власних функцій $\{X_k(x),k\in\mathbb{N}\}$ і нескінченну множину додатних власних значень $\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, для яких виконуються оцінки

$$\forall k\in\mathbb{N}: C_1k^{2/p}\leq\lambda_k\leq C_2k^{2/p}, 0<C_1<C_2. \qquad (1)$$

E_α, $\alpha\in\mathbb{R}$, – простір функцій $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_kX_k(x)$ із скінченною нормою $\|\varphi;E_\alpha\|=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}}|\varphi_k|^2\lambda_k^{2\alpha}}$, де $\varphi_k\in\mathbb{C}$.

E_α^4 – простір таких функцій $u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x)$, що $u_k(t)$,$k\in\mathbb{N}$, є аналітичними за t на відрізку $[0,T]$, зі скінченною нормою,

$$\|u;E_\alpha^4\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{4}\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(j)}(t)\right|^2\lambda_k^{2\alpha}.$$

У просторі E_α^4, $\alpha\in\mathbb{R}$, розглянемо задачу

$$\prod_{r=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\nu}{t}\frac{\partial}{\partial t}+a_rL\right)u(t,x)=0,(t,x)\in(0,T)\times G, \qquad (2)$$

$$u(t_1,x)=\varphi_1(x),\ u(t_2,x)=\varphi_2(x),\ x\in G, 0<t_1<t_2\leq T. \qquad (3)$$

$$u(t,x)|_\Sigma=Lu(t,x)|_\Sigma=0,\Sigma=[0,T]\times\partial G, \qquad (4)$$

де $\nu \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2 > 0$, $a_1 \neq a_2$.

Розв'язок задачі (2) – (4) з простору E^4_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{5}$$

Тоді кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{N}$, є розв'язком задачі

$$\prod_{r=1}^{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t}\frac{d}{dt} + a_r \lambda_k \right) u_k(t) = 0, \tag{6}$$

$$u_k(t_1) = \varphi_{1,k}, \quad u_k(t_2) = \varphi_{2,k}. \tag{7}$$

Розв'язок рівняння (6) зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{r=1}^{2} C_{2r-1}(k) \frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t)}{t^{\nu-\frac{1}{2}}} + C_{2r}(k) \frac{J_{-\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t)}{t^{\nu-\frac{1}{2}}}. \tag{8}$$

Із умови аналітичності для функційи$u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, на відрізку $[0,T]$ таумов (7) випливає, що сталі $C_2(k) = C_4(k) = 0$, а для $C_1(k)$та $C_3(k)$ отримуємо систему

$$C_1(k) \frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t_j)}{t_j^{\nu-\frac{1}{2}}} + C_3(k) \frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t_j)}{t_j^{\nu-\frac{1}{2}}} = \varphi_{j,k}, \ k \in \mathbb{N}, j \in \{1,2\}. \tag{9}$$

Нехай $\Delta(k, t_1, t_2)$ є визначником системи (9),

$$\Delta(k, t_1, t_2) = \frac{1}{t_1^{\nu-\frac{1}{2}} t_2^{\nu-\frac{1}{2}}} \begin{vmatrix} J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_1) & J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t_1) \\ J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2) & J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t_2) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (2) – (4) *у просторі* $E^4_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$*, необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta(k, t_1, t_2) \neq 0. \tag{11}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5 із [4, с. 57].

Надалі вважатимемо, що умова (11) справджується. Розв'язуючи систему (9) методом Крамера, із формул (10) отримуємо, що розв'язок задачі (2) – (4) зображується формулою

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t_2) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t)}{t_2^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}}} - \frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t)}{t_2^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}}} \right) \varphi_{1,k} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_1) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t)}{t_1^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}}} - \frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t_1) J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t)}{t_1^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}}} \right) \varphi_{2,k} \right] \frac{X_k(x)}{\Delta(k,t_1,t_2)}. \tag{12}$$

Для встановлення достатніх умови існування розв'язку задачі (2) – (4) встановимо допоміжне твердження.

Лема 1. *Для всіх натуральних* k *справджуються оцінки*

$$\max_{t \in [0,T]} \left| \frac{d^q}{dt^q} \left(\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t)}{t^{\nu-\frac{1}{2}}} \right) \right| \leq C_3 \lambda_k^{(q+\nu)/2-1/4}, \tag{13}$$

де $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,$r \in \{1,2\}$,$C_3 > 0$.

Із формули Пуассона для функцій Бесселя (див. [14]) для довільних $a_r > 0, r \in \{1,2\}, t \geq 0, k \in \mathbb{N}$, отримуємо

$$J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t) = \left(\frac{\sqrt{a_r\lambda_k}t}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\pi \cos(\sqrt{a_r\lambda_k}t\cos\theta)\sin^{2\nu+1}\theta d\theta. \quad (14)$$

Враховуючи для $k \in \mathbb{N}$ елементарні нерівності

$$\left|\cos\left(\sqrt{a_r\lambda_k}t\cos\theta\right)\sin^{2\nu+1}\theta\right| \leq 1, \qquad \theta \in [0,\pi], a_r > 0, t \in [0,T],$$

із формули (14) встановлюємо

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t)}{t^{\nu-\frac{1}{2}}}\right| \leq C_4\lambda_k^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}},$$

де $C_4 = C_4(\pi,\nu,a_1,a_2) > 0$. Диференціюючи рівність (14) q разів за змінною t, одержуємо, що

$$\frac{d^q}{dt^q}\left(\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t)}{t^{\nu-\frac{1}{2}}}\right) = \quad (15)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a_r\lambda_k}}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{a_r\lambda_k})^q}{\Gamma(\nu)} \int_0^\pi \cos^q\theta\sin^{2\nu-1}\theta\cos(\sqrt{a_r\lambda_k}t\cos\theta + q\pi/2)d\theta.$$

Із формул (15) та елементарних перетворень отримуємо нерівності

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\frac{d^q}{dt^q}\left(\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_r\lambda_k}t)}{t^{\nu-\frac{1}{2}}}\right)\right| \leq C_5\lambda_k^{(q+\nu)/2-1/4},$$

де $C_5 = C_5(a_1,a_2,\nu) > 0$, $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, з яких випливає твердження леми.

Збіжність ряду (12) у просторі E_α^4, $\alpha \in \mathbb{R}$, взагалі кажучи, пов'язано з проблемою малих знаменників, оскільки величини $|\Delta(k,t_1,t_2)|$ будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості чисел $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (11) *та існує стала* $\omega \in \mathbb{R}$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,t_1,t_2)| > \lambda_k^{-\omega}. \quad (16)$$

Якщо $\varphi_1, \varphi_2 \in E_{\alpha_1}$, *де* $\alpha_1 = \alpha + \omega + \nu + 3/2$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (2) – (4) *з простору* E_α^4. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_1 *та* φ_2.

Доведення. Із формули (12) на підставі оцінок (13) та (16) отримуємо, що існує така додатна незалежна від k стала C_6, що

$$\|u;E_\alpha^4\| \leq C_6\sum_{j=1}^2 \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |\varphi_{jk}|^2\lambda_k^{2\alpha+2\omega+2(\nu+3/2)}} \leq \quad (17)$$

$$\leq C_6\sum_{j=1}^2 \left\|\varphi_j;E_{\alpha_1}\right\|.$$

Проаналізуємо умови виконання нерівностей (16). Для цього скористаємось метричним підходом [4, 10], який полягає у вивченні міри множин параметрів задачі, зокрема у розглядуваному випадку t_1, t_2 – вузлів інтерполяції, для яких вказані нерівності виконуються або порушуються.

Введемо допоміжні твердження.

Лема 2. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *та* $\lambda > 0$ *справджується формула*

$$Q_n\left(\frac{d}{dt}\right) := \left(\frac{d}{dt} + \frac{3/2}{t}\right)\left(\frac{d}{dt} + \frac{5/2}{t}\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} + \frac{n+1/2}{t}\right)J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda t) = \\ = \sqrt{2/\pi}\lambda^{n-\frac{1}{2}}\frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}},\ \ t > 0. \tag{18}$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. Для $n = 1$ твердження леми випливає із зображення функції Бесселя у вигляді ряду (див. [14]) та властивостей гамма-функцій Ейлера отримуємо

$$Q_1\left(\frac{d}{dt}\right) := \left(\frac{d}{dt} + \frac{\frac{3}{2}}{t}\right)J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) = \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(l+\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\frac{3}{2}(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(l+\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l 2(2l+3)}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)(2l+3)}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi t}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l 2^{2l+1}}{\Gamma(2l+3)}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+1} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}}.$$

Припустимо, що лема 2 справедлива при $n = m$, $m \geq 1$. Доведемо її істинність при $n = m + 1$. Очевидно, що

$$Q_{m+1}\left(\frac{d}{dt}\right)J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t) = Q_m\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt} + \frac{m+3/2}{t}\right)J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t). \tag{19}$$

Із зображення функції Бесселя у вигляді ряду отримуємо

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{m+\frac{3}{2}}{t}\right)J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t) = \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l+m+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(l+m+\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+m+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(l+m+\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+m+\frac{1}{2}}\right) = \\ = \left(\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l+2m+3)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+m+\frac{5}{2})}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+m+\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

На підставі властивості гамма-функції

$$\Gamma(l + m + 5/2) = \frac{(2l+2m+3)}{2}\Gamma(l + m + 3/2)$$

із рівності (20) отримуємо

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{m+\frac{3}{2}}{t}\right)J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t) = \lambda\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(l+m+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+m+\frac{1}{2}} = \\ = \lambda J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda t). \tag{21}$$

Із формул (19), (21) та припущення індукції одержуємо

$$Q_{m+1}\left(\frac{d}{dt}\right)J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t) = \sqrt{2/\pi}\lambda^{m+\frac{1}{2}}\frac{\sin(\lambda t)}{\sqrt{t}}.$$

Отже, твердження леми справедливе при $n = m + 1$. Лему доведено.

Лема 3. [6] *Нехай* $f \in C^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$, $p_i \in C([a,b];\mathbb{R})$, $i \in \{1,\dots,n\}$, *є такими, що для всіх* $t \in [a,b]$ *виконується нерівність*

$$|f^{(n)}(t)+p_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t)+\cdots+p_0(t)f(t)| \geq \delta > 0.$$

Тоді для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0/2)$ *виконується оцінка*

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\{t \in (a,b): |f(t)|<\varepsilon\} \leq C_7 \max\left\{1;\frac{M}{\delta}G_1^n\right\}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}},$$

де $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(n+1)G_1^n}$, $G_1 = 1 + \max\limits_{0\leq j\leq n-1}\max\limits_{t\in[a,b]}\sqrt[n-j]{|p_i(t)|}$, $M = \sum_{j=1}^{n+1}\max\limits_{t\in[a,b]}|f^{(j)}(t)|$, *де* C_7 *– додатна стала.*

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^2$*) векторів* $(t_1,t_2) \in [T_0,T]^2$, $T_0>0$, *нерівність* (16) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k *при*

$$\omega > (\nu+1)\left(2\nu+\frac{3p}{2}+\frac{5}{4}\right)+p+\frac{1}{4}.$$

Доведення. Запишемо визначник $\Delta(k,t_1,t_2)$ у вигляді

$$\Delta(k,t_1,t_2) = \frac{\Upsilon(k,t_1,t_2)}{t_1^{\nu-1/2}t_2^{\nu-1/2}}, \tag{22}$$

$$\Upsilon(k,t_1,t_2) = J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{a_1\lambda_k}t_1\right)J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{a_2\lambda_k}t_2\right)-J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{a_2\lambda_k}t_1\right)J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2\right),$$

та будемо розглядати $\Upsilon(k,t_1,t_2)$ як функцію двох змінних (t_1,t_2) у деякому фіксованому квадраті $[T_0,T]^2$, $0<T_0<T$.

Для кожного натурального k запровадимо такі множини:

$$W_\omega(k) = \{(t_1,t_2) \in [T_0,T]^2: |\Upsilon(k,t_1,t_2)| < \lambda_k^{-\omega}\},\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Нехай W_ω – множина тих векторів, які належать до нескінченної кількості множин $W_\omega(k)$, $k \in \mathbb{N}$, тобто

$$W_\omega = \mathrm{limsup}_{k\to+\infty} \bigcap_{K=1}^{+\infty}\bigcup_{k\geq K} W_\omega(k).$$

В цих позначеннях для доведення теореми потрібно довести, що $\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^2}W_\omega = 0$. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі [4] для доведення цього досить показати, що для деякого $\omega \in \mathbb{R}$ збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^2}W_\omega(k), \tag{23}$$

Встановимо збіжність ряду (23) для

$$\omega = (\nu+1)\left(2\nu+\frac{3p}{2}+\frac{5}{4}\right)+p+\frac{1}{4}+\tilde{\varepsilon},\ \tilde{\varepsilon}>0.$$

Для цього, відзначимо, що включення

$$W_\omega(k) \subset V_1(k) \cup V_2(k) \tag{24}$$

виконується для всіх натуральних чисел k, де

$$V_1(k) = \left\{(t_1,t_2) \in [T_0,T]^2: |\Upsilon(k,t_1,t_2)| < \lambda_k^{-\omega},\right.$$
$$\left.\left|J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2)\right| \geq \lambda_k^{-\frac{\nu+p}{2}-\frac{1}{4}-\varepsilon_1}\right\},$$

$$V_2(k) = \left\{(t_1,t_2) \in [T_0,T]^2: \left|J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2\right)\right| < \lambda_k^{-\frac{\nu+p}{2}-\frac{1}{4}-\varepsilon_1}\right\},\ \varepsilon_1>0.$$

Далі виконаємо розбиття множини $V_1(k)$ на дві множини:

$$V_1(k) = \left(\tilde{V}_{11}(k) \times [T_0, T]\right) \cup \left(\tilde{V}_{12}(k) \times [T_0, T]\right),$$

де

$$\tilde{V}_{11}(k) := \left\{t_1 \in [T_0, T]: (t_1, t_2) \in V_1(k), \left|\sin\left(\sqrt{a_2\lambda_k} t_1\right)\right| \geq \lambda_k^{-\frac{p}{2}-\sigma_1}\right\},$$

$$\tilde{V}_{12}(k) := \left\{t_1 \in [T_0, T]: (t_1, t_2) \in V_1(k), \left|\sin\left(\sqrt{a_2\lambda_k} t_1\right)\right| \leq \lambda_k^{-\frac{p}{2}-\sigma_1}\right\},$$

де $\sigma_1 > 0$.

Оцінимо міри одновимірних множин $\tilde{V}_{11}(k)$ та $\tilde{V}_{12}(k)$. Для цього для кожного натурального k розіб'ємо відрізок $[T_0, T]$ на такі проміжки $S_q(k)$, $q \in \{1, \dots, N_1(k)\}$, та $R_q(k)$, $q \in \{1, \dots, N_2(k)\}$, кінцями яких є точки T_0, T та t_1-нулі функцій

$$g_k^{\pm}(t_1) = \sin\left(\sqrt{a_2\lambda_k} t_1\right) \pm \frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\sigma_1}}, t_1 \in [T_0, T],$$

що

$$\forall t_1 \in S_q(k) \quad \left|\sin\left(\sqrt{a_2\lambda_k} t_1\right)\right| \geq \frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\sigma_1}},$$

$$\forall t_1 \in R_q(k) \left|\sin\left(\sqrt{a_2\lambda_k} t_1\right)\right| < \frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\sigma_1}}.$$

Кількість t_1-нулів функцій $g_k^{\pm}(t_1)$ на відрізку $[T_0, T]$ дорівнює кількості цілих чисел m_1 (відповідно, цілих чисел m_2), які справджують нерівність

$$T_0 \leq \frac{1}{\sqrt{a_2\lambda_k}}\left(\pi m_1 - \arcsin\frac{1}{\lambda_k^{p/2+\sigma_1}}\right) \leq T$$

$$\left(T_0 \leq \frac{1}{\sqrt{a_2\lambda_k}}\left(\pi m_2 + \arcsin\frac{1}{\lambda_k^{p/2+\sigma_1}}\right) \leq T\right).$$

Очевидно, що для фіксованого k кожна з функцій $g_k^{+}(t_1)$ і $g_k^{-}(t_1)$ може мати не більше ніж $C_8\sqrt{\lambda_k}$ нулів, а тому кількість проміжків $N_r(k)$ задовольняє нерівність

$$N_r(k) \leq C_8\sqrt{\lambda_k}, C_8 = 1 + \frac{(T-T_0)\sqrt{a_2}}{\pi}, \ \ r \in \{1,2\}. \tag{25}$$

Згідно з побудовою розбиття для кожного проміжка $R_q(k)$, де $q \in \{1, \dots, N_2(k)\}$, існує $l \in \mathbb{Z}$ таке, що

$$R_q(k) \subset \left[\frac{1}{\sqrt{a_2\lambda_k}}\left(\pi l - \arcsin\frac{1}{\lambda_k^{p/2+\sigma_1}}\right), \frac{1}{\sqrt{a_2\lambda_k}}\left(\pi l + \arcsin\frac{1}{\lambda_k^{p/2+\sigma_1}}\right)\right].$$

Тому

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}} R_q(k) \leq \frac{2}{\sqrt{a_r\lambda_k}} \arcsin\frac{1}{\lambda_k^{p/2+\sigma_1}}, \ \ q \in \{1, \dots, N_2(k)\}. \tag{26}$$

Позначимо:

$$P_{\nu+1}\left(\frac{d}{dt}, k\right) = Q_{\nu-1}\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt} + a_1\lambda_k - \frac{(\nu-1/2)^2}{t^2}\right). \tag{27}$$

Із формули (27) та леми 2 для $t_1 \in \tilde{V}_{11}(k)$ випливають такі нерівності

$$\left|P_{\nu+1}\left(\frac{d}{dt_1},k\right)\Upsilon(k,t_1,t_2)\right| =$$
$$= \left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}(a_2-a_1)\lambda_k^{\frac{\nu}{2}}\frac{\sin(\sqrt{a_2\lambda_k}t_1)}{t_1}J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2)\right| \geq$$
$$\geq C_9\lambda_k^{-p-\frac{1}{4}-\varepsilon_1-\sigma_1},\ \ C_9>0. \tag{28}$$

Оцінимо міри Лебега множин $\tilde{V}_{11}(k)$. Відзначимо, що із леми 1 випливає оцінка

$$M=\sum_{r=1}^{\nu+2}\max_{t_1\in[T_0,T]}\left|\frac{d^r}{dt_1^r}\Upsilon(k,t_1,t_2)\right| \leq C_{10}\lambda_k^{\frac{3\nu}{2}+\frac{1}{2}}, C_{10}>0, \tag{29}$$

а $G_1=\lambda_k^{\frac{1}{2}}$. Тому із леми 3 на підставі нерівностей (28), (29) отримуємо

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\tilde{V}_{11}(k) \leq C_{12}\frac{\lambda_k^{\frac{3\nu}{2}+\frac{1}{2}}\lambda_k^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}{\lambda_k^{-p-\frac{1}{4}-\varepsilon_1-\sigma_1}}\left(\frac{\lambda_k^{-\omega}}{\lambda_k^{-p-\frac{1}{4}-\varepsilon_1-\sigma_1}}\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \leq C_{11}\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\tilde{\varepsilon}}}, \tag{30}$$

де $\tilde{\varepsilon}>(\nu+2)(\varepsilon_1+\sigma_1)$, $C_{11}>0$.

Оскільки

$$\tilde{V}_{12}(k)\subset\left\{t_1\in[T_0,T]:\left|\sin(\sqrt{a_2\lambda_k}t_1)\right|\leq\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\sigma_1}\right\},$$

то, враховуючи оцінку (25), для міри Лебега множини множин $\tilde{V}_{12}(k)$ маємо

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\tilde{V}_{12}(k)\leq\sum_{q=1}^{N_2(k)}\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}R_q(k)\leq$$
$$\leq C_8\sqrt{\lambda_k}\frac{2}{\sqrt{a_r\lambda_k}}\arcsin\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\sigma_1}}\leq\frac{2C_8}{\sqrt{a_r}}\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\sigma_1}}=C_{12}\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\sigma_1}}. \tag{31}$$

Тоді згідно з теоремою Фубіні на підставі оцінок (30) і (31) отримуємо, що

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^2}V_1(k)=\int_{T_0}^{T}\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\,\tilde{V}_{11}(k)dt_2+\int_{T_0}^{T}\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\,\tilde{V}_{12}(k)dt_2\leq$$
$$\leq(T-T_0)(C_{11}+C_{12})\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\min\{\sigma_1,\varepsilon_1\}}}. \tag{32}$$

Із доведення теореми 4 роботи [7] випливає, що для фіксованого натурального k виконується нерівність

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}}\left\{t_2\in[T_0,T]:\left|J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2)\right|<\lambda_k^{-\frac{\nu+p}{2}-\frac{1}{4}-\varepsilon_1}\right\}\leq C_{13}\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\varepsilon_2}},$$

звідки за теоремою Фубіні

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^2}V_2(k)\leq(T-T_0)C_{13}\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\varepsilon_2}}, C_{13}>0 \tag{33}$$

Із включень (24), оцінок мір (32), (33) для множин $V_1(k)$ і $V_2(k)$, отримуємо, що

$$\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^2}W_\omega(k)\leq\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^2}V_1(k)+\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^2}V_2(k)\leq C_{14}\frac{1}{\lambda_k^{\frac{p}{2}+\varepsilon_3}},$$

де $C_{14} = (T - T_0)\max\{(C_{11} + C_{12}), C_{13}\}$, $\varepsilon_3 = \min\{\sigma_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, звідки на підставі нерівностей (1) буде випливати збіжність ряду (23). Теорему доведено.

Із теорем 2 та 3 випливає коректна розв’язність задачі (2) – (4) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^2$) векторів $(t_1, t_2) \in [T_0, T]^2$.

Методи, описані в даній роботі можна поширити на випадок двоточкових задач для рівнянь із частиннними похідними високих порядків.

Література

1. Городецький В.В., Колісник Р.С., Шевчук Н.М. Нелокальна за часом задача для одного еволюційного рівняння в просторах типу S. // Буковинський математичнийжурнал. – 2020. – Т.8, №1. – С. 65 – 83. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2020.02.086
2. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. Пукальський І.Д., Яшан Б.О. Багатоточкова за часом крайова задача для 2b-параболічного рівняння з виродженням. Буковинськийматематичний. журнал. – 2024. – Т.12, №1 – С. 94-106. DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2024.01.09
4. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
5. Пташник Б.Й., Тимків І.Р. Багатоточкова задача для В-параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, №3. – С. 418-429. (Переклад: PtashnykB.I, TymkivI.R. Multipoint problem for B-parabolic equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. –V.65. – P. 463-477. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-013-0789-3)
6. Симотюк М.М. Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42, №4. – С. 90-95.
7. Симотюк М.М., Тимків І.Р. Крайова задача для одного виродженого параболічного рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка". – "Фіз.-мат. науки". – 2014. – №804. – С. 57-63.
8. Bouziani A. On thee-point boundary value problem with a weighted integral condition for a classe of singular parabolic equations // Abstract and Applied Analysis. – 2002. – V.7, №.10. – P. 517-530. DOI: https://doi.org/10.1155/S1085337502206041
9. Betancor J.J., De León-Contreras M. Parabolic equations involving Bessel operators and singular integrals // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2018. – V.90, №18. DOI: https://doi.org/10.1007/s00020-018-2444-8
10. Il’kiv V.S., Ptashnyk B.I. Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators // Ukrainian Mathematical Journal. – 2006. – V.58, 1847-

1875. DOI:https://doi.org/10.1007/s11253-006-0172-8
11. Mesloub S.,Bouziani A. Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with the Bessel operator. //JournalofAppliedMathematicsandStochasticAnalysis. –2000. – 15. – P. 277-286. DOI: https://doi.org/10.1155/S1048953302000242
12. Lauerova D. The existence of a periodic solution of a parabolic equation with the Bessel operator // Aplikace Matematiky. 1984, 29 (1). – P. 40-44.
13. Rassias J.M., Karimov E.T. Boundary-values problem with non-local conditions for degenerate parabolic equations // Contemporary Analisis and Applied mathematics. – 2013. – №.1. – P. 42-48. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.3208
14. Watson G.N. A treatise on the theory of Bessel functions. 2nd Edition. – Cambridge: University Press. – 1922. – 804 p.

Стаття надійшла до редакційної колегії 29.11.2024 р.

A TWO-POINT PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH THE BESSEL OPERATOR

I. R. Tymkiv[1], I. Ya. Savka[2], M. V. Dziuba[3]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 5, ph: +380(342) 727131; e-mail: tymkiv_if@ukr.net
[2]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str. 3-b; e-mail: s-i@ukr.net
[3]HEI King Danylo University; 76018, Ivano-Frankivs'k, Evgena Konovaltsya Str. 35, e-mail: dziubamaryna2015@ukr.net

This work investigates two-point problem in the time variable with Dirichlet-type conditions in the spatial coordinates for a 4th-order hyperbolic equation with the Bessel operator in a bounded cylindrical domain. The theorems of existence and uniqueness of the solution to the problem in the space of analytic functions with respect to the time variable t on a segment [0,T] are proven. The metric approach is used to establish lower bound estimates for expression values involving Bessel functions of a half-integer index. These expressions appear in the denominators of the Fourier series coefficients in the solution of the problem.

Key words: *hyperbolic equation, Bessel operator, small denominator, Lebesgue measure.*