УДК 517.537.72+517.548.9
DOI: 10.31471/2304-7399-2024-19(73)-18-23

ПРО ОСНОВНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ ТЕОРІЇ ВІМАНА-ВАЛІРОНА І АСИМПТОТИЧНА h-ЩІЛЬНІСТЬ ВИНЯТКОВИХ МНОЖИН

С. І. Дубей, О. Б. Скасків
Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, вул. Університетська, 1, м. Львів, Україна;
e-mail: mazorchyk@gmail.com, olskask@gmail.com

Нехай L *– клас додатних зростаючих на* $[0;+\infty)$ *функцій, а* L_1 *– його підклас, який складається з функцій* $h\in L$ *таких, що* $h\left(x+\frac{1}{h(x)}\right)= O(h(x)), (x\to+\infty)$. *Для вимірної за Лебегом множини* $E\subset[0;+\infty)$, *що має скінченну міру Лебега* $\operatorname{meas}E=\int_E dx<+\infty$, *визначимо її нижню асимптотичну* h*-щільність у нескінченності*

$$d_h(E)=\lim_{R\to+\infty} h(R)\cdot\operatorname{meas}(E\cap[R;+\infty)).$$

Нехай $S(a,b), -\infty\le a<b\le+\infty,$ *– клас аналітичних в* $\Pi(a,b)=\{z\colon a<\operatorname{Re}z<b\}$ *функцій таких, що* $(\forall x\in(a,b))\colon\ M(x,F):= \sup\{|F(t+iy)|\colon a<t\le x, y\in\mathbb{R}\}<+\infty$, *а* $L(x,F)=(\ln M(x,F))'_+$ *– правостороння похідна. Доведено таку теорему: нехай функції* $\Phi, h\in L$, *такі, що* $h(2r)=o(\Phi(r))(r\to\infty)$. *Якщо* $F\in S_\infty(0,\infty)$ *і*

$$(\exists x_n\nearrow+\infty\ (n\to+\infty))\colon\quad L(x_n,F)\ge\Phi(x_n)(n\ge1),$$

то співвідношення $F'(z)=(1+o(1))L(x,F)F(z)$ *виконується при* $x\to+\infty(x\notin E, d_h(E)=0)$ *для всіх* z *таких, що* $Rez=x$ *і* $|F(z)|=(1+o(1))M(x,F)$ *при* $x\to+\infty$.

1. Вступ

Нехай $\Pi(a,b)=\{z\colon a<Re\,z<b\}$ а $S(a,b), -\infty\le a<b\le+\infty,$ – клас аналітичних в $\Pi(a,b)$ функцій таких, що

$$(\forall x\in(a,b))\colon\ M(x,F)\overset{def}{=}\sup\{|F(t+iy)|\colon a<t\le x, y\in\mathbb{R}\}<+\infty.$$

За принципом максимуму модуля $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|\colon\in\mathbb{R}\}$ – неспадна функція на (a,b), а за теоремою про три прямі функція $\ln M(x,F)$ – опукла на (a,b) (див. [1, с. 145, с. 266]), а тому для всіх $x\in(a,b)$ права похідна $L(x)=L(x,F)\overset{def}{=}(\ln M(x,F))'_+$ існує і є неспадною на інтервалі (a,b).

Через $S_\infty(a,b)$ позначимо підклас класу $S(a,b)$, який складається з тих функцій $F\in S(a,b)$, що $L(x,F)\to+\infty\quad(x\to b-0)$.

Надалі розглядатимемо тільки клас $S_\infty(0,+\infty)$, що не впливатиме на загальність нашого розгляду.

Відомо (див. [1, с.149, теорема 1.3.17]), що для функцій $F \in S_\infty(0,+\infty)$ співвідношення
$$F'(z) = (1+o(1))L(x,F)\cdot F(z) \tag{1}$$
є правильним при $x \to +\infty x \in [0,+\infty)\backslash E$, тобто, зовні деякої множини E скінченної міри Лебега, для всіх z, таких, що $\operatorname{Re} z = x$ і
$$|F(z)| = (1+o(1))M(x,F) \tag{2}$$
при $x \to +\infty$. Це твердження про співвідношення (1) застосовується у дослідженні властивостей аналітичних розв'язків диференційних рівнянь (див., наприклад, [1]). Проте межі застосовності останнього твердження у певному сенсі є обмежені класом тих функцій $F \in S_\infty(0,+\infty)$, що мають скінченний R-порядок, тобто, таких, що
$$\rho_R(F) \overset{def}{=} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln M(x,F)}{x} < +\infty.$$
Для дослідження зростання аналітичних розв'язків $F \in S_\infty(0,+\infty)$ нескінченного R-порядку це твердження застосовне вже не досить ефективно, позаяк інформація про виняткову множину, що міститься в даному твердженні є доволі загальною. Власне, вимагається точніша інформація про виняткову множину у цьому співвідношенні. Виявляється (див., наприклад, [2]), що подібну інформацію можна отримати у підкласах, що визначаються обмеженнями на мінімально допустиму швидкість зростання при $x \to +\infty$ максимуму модуля $M(x,F)$.

Перш ніж сформулювати отримане там твердження нам потрібно навести деякі означення.

Нехай L – клас додатних зростаючих на $[0;+\infty)$ функцій, а L_1 – його підклас, який складається з функцій $h \in L$ таких, що
$$h\left(x + \frac{1}{h(x)}\right) = O(h(x)), (x \to +\infty).$$

Нехай $h \in L$. Для вимірної за Лебегом множини $E \subset [0;+\infty)$, що має скінченну міру Лебега $\operatorname{meas} E = \int_E dx < +\infty$, визначимо її *верхню і нижню асимптотичні h-щільності у нескінченності*, відповідно, рівностями
$$\mathcal{D}_h(E) = \varlimsup_{R\to+\infty} h(R)\cdot \operatorname{meas}\,(E \cap [R;+\infty)),$$
$$d_h(E) = \varliminf_{R\to+\infty} h(R)\cdot \operatorname{meas}\,(E \cap [R;+\infty)).$$

Теорема 1.1 ([2]). *Нехай функції* $\Phi \in L$, $h \in L_1$ *– такі, що* $h(r) = o(\Phi(r))(r \to +\infty)$. *Якщо* $F \in \mathcal{S}(0,+\infty)$ і $L(x,F) \geq \Phi(x)(x \geq x_0)$, *то співвідношення (1) справджується при* $x \to +\infty(x \notin E, \mathcal{D}_h(E) = 0)$ *для всіх* z, $\operatorname{Re} z = x$, *таких, що (2) виконується при* $x \to +\infty$.

Схема доведення цієї теореми в [2] загалом збігається зі схемою доведення теореми 1.3.17 в [1, с.149] і використовує таку лему типу Бореля-Неванлінни.

Лема 1.1 (Скасків, Стасюк [2]). Нехай неперервна справа неспадна на $[r_0,+\infty)$ функція $u(r)$ та функції $\Phi \in L$, $h \in L_1$ – такі, що
$$u(r) \geq \Phi(r)(r \geq r_0),\quad h(r) = o(\Phi(r))(r \to +\infty).$$

Тоді існує функція $\delta(u) \nearrow +\infty(u \to +\infty)$, така, що $\delta(u) \le u(u \ge u_0)$, а множина $E = \left\{r \ge r_0 : u\left(r + \frac{\delta(u(r))}{u(r)}\right) \ge \left(1 + \frac{1}{\delta(u(r))}\right)u(r)\right\}$ має нульову верхню асимптотичну h-щільність в нескінченності, тобто, $\mathcal{D}_h(E) = 0$.

У даній роботі ми доведемо аналог цього варіанту леми типу Бореля-Неванлінни для дещо ширшого класу аналітичних функцій, а потім за схемою доведення теореми 1 в [2] доведемо її аналог.

2. Нова лема типу Бореля-Неванлінни

Лема 2.1. Нехай неперервна справа неспадна на $[r_0, +\infty)$ функція $u(r)$ та функції $\Phi \in L$, $h \in L_1$ – такі, що $h(2r) = o(\Phi(r))(r \to \infty)$ і

$$(\exists x_n \nearrow +\infty \ (n \to +\infty)): \quad u(x_n) \ge \Phi(x_n)(n \ge 1).$$

Тоді існує функція $\delta(u) \nearrow +\infty(u \to +\infty)$, така, що $\delta(u) \le u(u \ge u_0)$, а множина $E = \left\{r \ge r_0 : u\left(r + \frac{\delta(u(r))}{u(r)}\right) \ge \left(1 + \frac{1}{\delta(u(r))}\right)u(r)\right\}$ має нульову нижню асимптотичну h-щільність в нескінченності, тобто, $d_h(E) = 0$.

Доведення леми 2. Міркуємо спочатку подібно, як і в [2]. Доведемо, що для всіх $\delta > r_0$, $r_0 = 1$ множина $E(\delta) = \left\{r \ge 1 : u(r + \frac{\delta}{u(r)}) \ge (1 + \frac{1}{\delta})u(r)\right\}$ має нульову асимптотичну h-щільність в нескінченності, тобто $d_h(E) = 0$.

Не зменшуючи загальності припустимо, що множина $E(\delta)$ – необмежена. У протилежному випадку твердження леми – тривіальне.

Позначимо

$$E(\delta, r) = E(\delta) \cap [r; +\infty), r_1 = \inf\{r : r \in E(\delta, r_0)\}, r_1' = r_1 + \frac{\delta}{u(r_1)}.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $r_1, \dots, r_n$ і $r_1', \dots, r_n'$ вже визначені. Визначимо

$$r_{n+1} \overset{def}{=} \inf\{r : r \in E(\delta, r_n')\}, r_{n+1}' \overset{def}{=} r_{n+1} + \frac{\delta}{u(r_{n+1})},$$

$$E(\delta, r_n') = \left\{r \ge r_n' : u\left(r + \frac{\delta}{u(r)}\right) \ge (1 + \frac{1}{\delta})u(r)\right\}.$$

Нескладно зрозуміти, що $E(\delta) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n, r_n']$.

За побудовою

$$u(r_{n+1}) \ge u(r_n') = u(r_n + \frac{\delta}{r_n}) \ge (1 + \frac{1}{\delta})u(r_n).$$

Звідси, $r_n \nearrow +\infty(n \to +\infty)$ і $u(r_{k+1}) \ge (1 + \frac{1}{\delta})u(r_k), (k \ge 1)$, звідки

$$u(r_{k+1}) - u(r_k) \ge \frac{u(r_k)}{\delta}(k \ge 1).$$

Отже, $\frac{\delta(u(r_{k+1}) - u(r_n))}{u(r_k)} \ge 1(k \ge 1)$. Тому, для $r \in [r_n', r_{n+1}]$ ми отримаємо

$$\text{meas}\, E(\delta, r) \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_k' - r_k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\delta}{u(r_k)} \le$$
$$\le \frac{\delta}{u(r_{n+1})} + \delta^2 \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{u(r_k) - u(r_{k-1})}{u(r_k)u(r_{k-1})} = \frac{\delta}{u(r_{n+1})} +$$
$$+\delta^2 \sum_{k=n+2}^{+\infty} \left(\frac{1}{u(r_{k-1})} - \frac{1}{u(r_k)}\right) = \frac{\delta + \delta^2}{u(r_{n+1})}.$$

Подібно, для $r \in (r_n, r_n')$ отримуємо, що

$$\text{meas}\, E(\delta, r) \le \sum_{k=n}^{+\infty} (r_k' - r_k) \le \frac{\delta}{u(r_k)} + \delta^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u(r_k) - u(r_{k-1})}{u(r_k)u(r_{k-1})} \le \frac{\delta + \delta^2}{u(r_n)}.$$

Нехай $x_j \in [r_n', r_{n+1}]$, тоді

$$h(x_j)\text{meas}\, E(\delta, x_j) \le h(x_j) \frac{\delta + \delta^2}{u(r_{n+1})} \le \frac{h(x_j)(\delta + \delta^2)}{u(x_j)} = o(1) \quad (j \to +\infty).$$

Якщо ж $x_j \in (r_n, r_n')$, то $2x_j > 2r_n \ge r_n + \frac{\delta}{u(r_n)} = r_n'$. Звідси, якщо $2x_j \le r_{n+1}$, то як і вище отримаємо, що

$$h(2x_j)\text{meas}\, E(\delta, 2x_j) \le h(2x_j) \frac{\delta + \delta^2}{u(2x_j)}.$$

Якщо ж $2x_j > r_{n+1}$, то

$$\text{meas}\, E(\delta, 2x_j) \le \text{meas}\, E(\delta, r_{n+1}) \le \frac{\delta + \delta^2}{u(r_{n+1})} \le \frac{\delta + \delta^2}{u(x_j)}.$$

Тому,

$$h(2x_j)\text{meas}\, E(\delta, 2x_j) \le \frac{h(2x_j)(\delta + \delta^2)}{u(x_j)} \le \frac{h(2x_j)(\delta + \delta^2)}{\Phi(x_j)} = o(1).$$

Отже, $(\forall \delta > 0)\colon d_h E(\delta) = 0$.

Позначимо тепер $x_j' = 2x_j$. Тоді

$$h(x_j')\text{meas}\, E(\delta, x_j') \le \varepsilon \qquad (\forall j \ge j_0(\varepsilon, \delta)). \tag{3}$$

Нехай $r_{(n)} = x_{j_0}'(\varepsilon_n, \delta_n)(n \in \mathbb{N})$, а (ε_n) – фіксована послідовність додатних чисел, яку ми виберемо пізніше. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $r_{(n+1)} > r_{(n)}(n \in \mathbb{N})$. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $r \in [r_{(n)}, r_{(n+1)})$ визначимо функції $\delta(u)$ і $\varepsilon(r)$ так, щоб виконувались рівності $\delta(u(r)) = \delta_n, \varepsilon(r) = \varepsilon_n$.

Зрозуміло, що якщо $\varepsilon_n \to +0(n \to +\infty)$, то $\varepsilon(r) \to +0(r \to +\infty)$.

Для множини $E^* \overset{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} ([r_{(n)}, r_{(n+1)}) \cap E(\delta_n, r_{(n)}))$, вибираючи $\varepsilon_n = n^{-2}(n \in \mathbb{N})$, з нерівності (3) тепер отримаємо

$$h(r_{(n)})\text{meas}\, \left(E^* \cap [r_{(n)}, +\infty)\right) \le h(r_{(n)}) \sum_{k=n}^{+\infty} \text{meas}\, \left(E(\delta_k, r_{(k)}) \cap [r_{(k)}, r_{(k+1)})\right) \le h(r_{(n)}) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{h(r_{(k)})} \le \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = o(1).$$

Тому $d_h(E^*) = 0$.

Остаточно тепер для всіх $n \in \mathbb{N}$ і всіх $r \in [r_{(n)}, r_{(n+1)})\backslash E^*$ з доведеного вище отримуємо, що

$$u\left(r + \frac{\delta(u(r))}{u(r)}\right) = u\left(r + \frac{\delta_n}{u(r)}\right) < \left(1 + \frac{1}{\delta_n}\right)u(r) = \left(1 + \frac{1}{\delta(u(r))}\right)u(r).$$

Лему повністю доведено.

3. Основна теорема

Теорема 3.1. *Нехай функції* $\Phi, h \in L$, *такі, що* $h(2r) = o(\Phi(r))(r \to \infty)$. Якщо $F \in S_\infty(0, \infty)$ і

$$(\exists x_n \nearrow +\infty \ (n \to +\infty)): \quad L(x_n, F) \ge \Phi(x_n)(n \ge 1),$$

то співвідношення (1) виконується при $x \to +\infty (x \notin E, d_h(E) = 0)$ для всіх z таких, що $\text{Re}z = x$ і $|F(z)| = (1 + o(1))M(x, F)$ при $x \to +\infty$.

Доведення. У доведенні теореми 2 використовуватимемо лему типу леми Бореля-Неванлінни, доведену вище. З цієї леми, застосованої до функції $u(r) = L_0(r, F)$, де $L_0(r, F) = L(r, F)$ в точках неперервності $L(r, F)$ і $L_0(x_1, F) = \lim_{r\to x_1+0} L(r, F)$ у точці x_1 – точці розриву $L(r, F)$, для всіх $x \in [0; +\infty)\backslash E(d_h(E) = 0)$, оскільки точок розриву x_1 не більше, ніж зліченна кількість, отримуємо нерівність

$$L(x + \frac{\delta(x)}{L(x,F)}, F) < (1 + \frac{1}{\delta(x)})L(x, F)$$

де $\delta(x) = \delta(L(x, F))$. Отже, для всіх $|\tau| \leq \psi(x) = \delta(x)/L(x, F)$ і $x \in [0; +\infty)\backslash E$

$$L(x + \tau, F) - L(x, F) < L(x, F)/\delta(x).$$

Нехай функція $\varepsilon(x) \to +0(x \to +\infty)$, а $w = x + it$ довільна точка, така, що $|F(w)| \geq M(x, F)(1 + \varepsilon(x))^{-1}$. З опуклості $\ln M(x, F)$ випливає, що для всіх $\{x, h\} \subset \mathbb{R}$

$$\ln M(x + h, F) - \ln M(x, F) \leq hL(x + h, F),$$

Тому,

$$\ln M(x + h, F) - \ln M(x, F) - hL(x, F) \leq |h||L(x + h, F) - L(x, F)|.$$

Отже, для всіх $|\tau| \leq \psi(x)$ і $x \in [0; +\infty)\backslash E$

$$\ln M(x + \tau, F) - \ln M(x, F) - \tau L(x, F) \leq 1.$$

Тому, для всіх $x \in [0; +\infty)\backslash E$ і $\eta \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}\,\eta| \leq \psi(x)$

$$|\frac{F(w + \eta)}{F(w)} e^{-\eta L(x,F)}| \leq (1 + \varepsilon(x))\exp\{\ln M(x + \mathrm{Re}\,\eta, F) -$$
$$-\ln M(x, F) - \mathrm{Re}\,\eta L(x, F)\} \leq (1 + \varepsilon(x))e.$$

Очевидно, та сама нерівність виконується для всіх $\eta \in \mathbb{C}|\eta| \leq \psi(x)x \in E$, позаяк $\{\eta \in \mathbb{C}: |\eta| \leq a\} \subset \{\eta \in \mathbb{C}: |\mathrm{Re}\,\eta| \leq a\}$.

Розглянемо тепер для $\eta: |\eta| \leq \psi(x)(x \in E)$ функцію

$$g(\eta) = \frac{F(w+\eta)}{F(w)} e^{-\eta L(x,F)} - 1.$$

За лемою Шварца, для всіх $\eta: |\eta| \leq \psi(x)$, маємо

$$|g(\eta)| \leq (1 + e(1 + \varepsilon(x)))\frac{|\eta|}{\psi(x)} = c(x)\frac{|\eta|}{\psi(x)},$$

де $c(x) = (1 + e(1 + \varepsilon(x)))$. Звідси, для всіх $\eta, |\eta| < \psi(x)/c(x)$, $x \in E$,

$$|\frac{F(w+\eta)}{F(w)} e^{-\eta L(x,F)}| \geq 1 - |g(\eta)| > 0.$$

Зокрема, звідси випливає, що для всіх $|\eta| < \psi(x)/c(x)$, $x \in E$, виконується $|F(w + \eta)| > 0$. Тому функція

$$G(\eta) = \int_0^\eta \frac{F'(w+\eta)}{F(w+\eta)} d\tau - \eta L(x, F), \quad G(0) = 0,$$

є аналітичною в крузі $\{\eta: |\eta| < \psi(x)/c(x)\}$. Зауважимо, що $G'(0) = \frac{F'(w)}{F(w)} - L(x, F)$ і для всіх $\eta: |\eta| \leq q < \psi(x)/c(x)$, виконується

$$\mathrm{Re}\,G(\eta) = \ln|\frac{F(w+\eta)}{F(w)} e^{-\eta L(x,F)}| = \ln|1 + q(\eta)| \leq \ln\left(1 + \frac{qc(x)}{\psi(x)}\right).$$

Звідси, за модифікованою нерівністю Коші, отримуємо

$$|G'(0)|q \leq 2\sup\{\mathrm{Re}\,G(\eta): |\eta| \leq q\} \leq 2\ln\left(1 + \frac{qc(x)}{\psi(x)}\right).$$

Остаточно, при $(x \to +\infty)(x \notin E)$

$$|\frac{F'(w)}{F(w)}\frac{1}{L(x,F)} - 1| \le \frac{2}{qL(x,F)}\ln\left(1+\frac{qc(x)}{\psi(x)}\right) \le$$
$$\le \frac{2c(x)}{L(x,F)\psi(x)} = \frac{c(x)}{\delta(L(x,F))} = o(1)$$

для всіх $w = x + it$, таких, що $|F(w)| \ge M(x,F)(1+\varepsilon(x))^{-1}$. Теорему 2 доведено. □

Гіпотеза 1. В лемі 2 і теоремі 2 умову $h(2r) = o(\Phi(r))(r \to \infty)$ можна замінити на умову $h(r) = o(\Phi(r))(r \to \infty)$.

Література

1. Strelitz Sh. I. Asymptotic properties of analytical solutions of differential equations. Vilnius: Mintis, 1972.
2. Salo T.M., Skaskiv O.B., Stasyuk Ya.Z. *On a central exponent of entire Dirichlet series*, Mat. Stud., 19 (2003), no. 1, 61–72.

Стаття надійшла до редакційної колегії 29.10.2024 р.

ON THE MAIN RELATION OF THE WIMAN-VALIRON THEORY AND ASYMPTOTIC h-DENSITY OF AN EXCEPTIONAL SETS

S. I. Dubey, O. B. Skaskiv

Ivan Franko National University of Lviv; 79000, 1, Universytetska st., Lviv;
e-mail: mazorchyk@gmail.com, olskask@gmail.com

Let L be the class of the positive increasing on $[0;+\infty)$ *functions, and* L_1 *be the subclass of the functions* $h \in L$ *such that* $h\left(x+\frac{1}{h(x)}\right) = O(h(x)), (x \to +\infty)$. *For measurable by Lebesgue set* $E \subset [0;+\infty)$, *of finite Lebesgue measure* $\text{meas}\, E = \int_E dx < +\infty$, *we define the lower asymptotic h-density of E on* $+\infty$

$$d_h(E) = \underline{\lim}_{R\to+\infty} h(R)\cdot \text{meas}\,(E \cap [R;+\infty)).$$

Let $S(a,b)$ *be the class of analytic in* $\Pi(a,b) = \{z: a < \text{Re}\, z < b\}$ *functions such that*

$(\forall x \in (a,b))$: $M(x,F) := \sup\{|F(t+iy)|: 0 < t \le x, y \in \mathbb{R}\} < +\infty$, *and* $L(x,F) = (lnM(x,F))'_+$ *is the right-hand derivative. In the paper, it is proved the following theorem: let* $\Phi, h \in L$ *be the functions such that* $h(2r) = o(\Phi(r))(r \to \infty)$. *If* $F \in S_\infty(0,\infty)$ *and* $(\exists x_n \nearrow +\infty\ (n \to +\infty))$: $L(x_n, F) \ge \Phi(x_n)(n \ge 1)$, *the relation* $F'(z) = (1+o(1))$ $L(x,F)F(z)$ *holds as* $x \to +\infty(x \notin E, d_h(E) = 0)$ *for all* z *such that* $\text{Re}\, z = x$ *and* $|F(z)| = (1+o(1))M(x,F)$ *as* $x \to +\infty$

Key words: *analytic function, strip, exceptional set, Wiman-Valiron theory.*