УДК 517.53
DOI: 10.31471/2304-7399-2024-19(73)-24-32

БОРЕЛЕВІ ВИНЯТКОВІ ВЕКТОРИ ДЛЯ ЦІЛИХ КРИВИХ З ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Я. І. Савчук, О. К. Фурсенко, Н. М. Черновол
Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба; 61023, м. Харків, вул. Сумська, 77/79; тел. +38(050) 6102842, e-mail: hnupskafedravm@ukr.net

Робота присвячена опису структури множини борелевих виняткових векторів для трансцендентної цілої кривої з лінійно залежними компонентами без спільних нулів. Раніше отримано опис структури множин пікарових та борелевих виняткових векторів для трансцендентної p-вимірної цілої кривої з лінійно незалежними компонентами без спільних нулів. Зокрема, було встановлено, що в p-вимірному комплексному просторі допустимих в цьому просторі борелевих виняткових векторів може бути не більше p. Було доведено, що множина борелевих виняткових векторів разом з нульовим вектором є скінченним об'єднанням підпросторів розмірності не вище p-1 з p-вимірного комплексного евклідового простору. До того ж сума розмірностей усіх цих підпросторів не перевищує p і будь-який попарний перетин цих підпросторів містить лише нульовий вектор. Таку саму структуру має і множина пікарових виняткових векторів. Також відомо, що структура множини неванліннових виняткових векторів для цілої кривої скінченного порядку з лінійно залежними компонентами подібна структурі для звичайної цілої кривої скінченного порядку.

В пропонованій статті показано, що для цілої кривої з лінійно залежними компонентами допустимих борелевих виняткових векторів може бути більше за розмірність простору, але не більше певного числа, яке залежить від розмірності простору та ступеня залежності компонент. Також доведено, що множину борелевих виняткових векторів в об'єднанні з векторами, ортогональними цілій кривій, та нульовим вектором, можна подати у вигляді скінченного об'єднання підпросторів розмірності не вище p-1.

Ключові слова: *ціла крива з лінійно залежними компонентами, неванлінновий винятковий вектор, валіроновий винятковий вектор, допустима система векторів, мероморфна функція.*

В роботах [1] та [2] повністю описано структуру неванліннових виняткових векторів для цілих кривих з лінійно залежними компонентами. Нагадаємо, що ціла крива $\vec{G}(z)=\left(g_1(z),\, g_2(z),\, \dots ,g_p(z)\right)$ називається цілою кривою з ω-лінійно залежними компонентами, якщо розмірність лінійного підпростору $A_0=\left\{\vec{a}\in \boldsymbol{C}^p : \vec{G}(z)\cdot\vec{a}\equiv 0\right\}$ дорівнює ω, $0\le\omega\le p-2$. Очевидно, що при $\omega=0$ матимемо звичайну цілу криву з лінійно незалежними компонентами. Випадок $\omega>p-2$ не розглядається, оскільки $\omega=p$ означає, що усі $g_j(z)\equiv 0$, а $\omega=p-1$ означає, що серед $g_j(z)$ є така компонента $g_k(z)$, через яку виражаються усі інші, тобто $g_j(z)=\lambda_j g_k(z)$. Також вважаємо, що цілі функції $g_1(z),\, g_2(z),\, \ldots,\, g_p(z)$ не мають спільних нулів.

Нехай множина S є деякою підмножиною q-вимірного підпростору із $\boldsymbol{C}^p$ і містить q лінійно незалежних векторів. Систему векторів $M\subset S$ називатимемо допустимою в S, якщо: при $card\, M\le q$ всі вектори із M лінійно незалежні; при $card\, M>q$ довільні q векторів із M лінійно незалежні.

В роботі [4] введено поняття борелевого виняткового вектора для цілої кривої $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$ з лінійно незалежними компонентами. Зрозуміло, що це поняття можна перенести на випадок цілої кривої з лінійно залежними компонентами: вектор $\vec{a}\in\boldsymbol{C}^p\setminus A_0$ назвемо *борелевим винятковим* для цілої кривої $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$ з ω-лінійно залежними компонентами, якщо категорія росту $N\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)$ нижча за категорію росту $T\left(r,\vec{G}\right)$.

В [4] доведено, що для довільної трансцендентної цілої кривої $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$ будь-яка допустима в $\boldsymbol{C}^p$ система борелевих виняткових векторів містить не більше p векторів, причому наведено приклад цілої кривої, яка має p лінійно незалежних борелевих виняткових векторів.

Ми покажемо, що цей результат узагальнюється на випадок цілої кривої з лінійно залежними компонентами.

Теорема 1. *Для довільної трансцендентної цілої кривої $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$ з ω-лінійно залежними компонентами будь-яка допустима в $\boldsymbol{C}^p$ система борелевих виняткових векторів містить не більше $(p-\omega)(\omega+1)$ векторів.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$ – допустима в $\boldsymbol{C}^p$ система векторів із $\boldsymbol{C}^p\setminus A_0$. Відповідно до міркувань в [4] маємо

$$\big(k-(p-\omega)(\omega+1)\big)T\left(r,\vec{G}\right)\le\sum_{j=1}^{k}N\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right)+Q\left(r,\vec{G}\right), \tag{1}$$

де $Q\left(r,\vec{G}\right)$ – така функція, що $Q\left(r,\vec{G}\right)=O(\ln r)$ при $r\to\infty$, якщо $\vec{G}$ скінченного порядку; якщо ж $\vec{G}$ нескінченного порядку, то

$Q\left(r,\vec{G}\right)=O\left(\ln T\left(r,\vec{G}\right)+\ln r\right)$, коли r прямує до ∞, пропускаючи, можливо, деяку множину проміжків на $\left[0,\,\infty\right)$, яка має скінченну довжину.

Припустимо, що існує трансцендентна ціла крива $\vec{G}$, яка має $\left(p-\omega\right)\left(\omega+1\right)+1$ допустимих борелевих виняткових векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_{p+1}$. Тоді з (1) отримуємо при $k=\left(p-\omega\right)\left(\omega+1\right)+1$:

$$T\left(r,\vec{G}\right)\le\sum_{j=1}^{(p-\omega)(\omega+1)+1}N\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right)+Q\left(r,\vec{G}\right). \qquad (2)$$

Якщо ціла крива $\vec{G}$ нескінченного порядку, то $N\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right)$, $j=1,2,\ldots,p+1$, мають скінченний порядок, отже, існує така стала $C<\infty$, що при $r\ge r_0$ виконується $\sum\limits_{j=1}^{p+1}N\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right)\le r^C$. Тоді зовні деякої множини E скінченної міри L виконується $T\left(r,\vec{G}\right)\le r^C+O\left(\ln T\left(r,\vec{G}\right)+\ln r\right)\le r^C+\frac{1}{2}T\left(r,\vec{G}\right)$, звідки $T\left(r,\vec{G}\right)\le 2r^C$. Якщо $r\in E$, то існує точка $r'\in\left[r,\,r+L+1\right]$, така, що $r'\notin E$. Тоді

$$T\left(r,\vec{G}\right)\le T\left(r',\vec{G}\right)\le 2r'^C\le 2\left(r+L+1\right)^C\le 3r^C,$$

якщо r достатньо велике. Отже, ми отримали, що $T\left(r,\vec{G}\right)$ має скінченний порядок і тим самим прийшли до протиріччя.

Якщо ціла крива $\vec{G}$ скінченного порядку, то $Q\left(r,\vec{G}\right)=o\left(T\left(r,\vec{G}\right)\right)$, і тоді (2) можемо переписати так:

$$\left(1+o(1)\right)T\left(r,\vec{G}\right)\le\sum_{j=1}^{p+1}N\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right). \qquad (3)$$

З цієї нерівності очевидно, що якщо $\vec{G}$ має додатний порядок, то усі функції $N\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right)$, $j=1,2,\ldots,p+1$, не можуть мати категорію росту нижчу за категорію росту $T\left(r,\vec{G}\right)$, тобто ми також прийшли до протиріччя. Якщо $\vec{G}$ має нульовий порядок, то $n\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right)=O\left(1\right)$, тобто $N\left(r,\vec{a}_j,\vec{G}\right)=O\left(\ln r\right)$, $j=1,2,\ldots,p+1$. Тоді з (3) отримуємо, що $T\left(r,\vec{G}\right)=O\left(\ln r\right)$, тобто $\vec{G}$ не є трансцендентною цілою кривою, а це суперечить умові теореми.

Отже, теорема доведена повністю.

Наведемо приклад, який підтверджує, в деякій мірі, точність доведеної теореми.

Розглянемо цілу криву

$$\vec{G}(z)=\left(2-e^{z}\ ,\ 0,\ \dots\ ,0,e^{z}-1\right). \tag{4}$$

Очевидно, компоненти $g_1(z)=2-e^{z}$ та $g_p(z)=e^{z}-1$ є лінійно незалежними, а для кожного з лінійно незалежних векторів $\vec{a}_k=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, де одиниця знаходиться на k-му місці, $k=1,2,\dots,p-1$, маємо $\vec{G}(z)\cdot\vec{a}_k\equiv 0$. Тому розглядувана ціла крива є з $\omega=p-2$ лінійно залежними компонентами. В якості допустимої в $\boldsymbol{C}^p$ системи векторів виберемо множину векторів вигляду $\vec{a}(w)=\left(1,w,w^2,\dots,w^{p-1}\right)$ при $w\neq\infty$, $\vec{a}(\infty)=(0,\dots,0,1)$. Бачимо, що $\vec{G}(z)\cdot\vec{a}(w)=2-e^{z}+\overline{w}^{p-1}\left(e^{z}-1\right)\not\equiv 0$, $\vec{G}(z)\cdot\vec{a}(\infty)=e^{z}-1\not\equiv 0$, тобто $\vec{a}\notin A_0$ при всіх w. Візьмемо $\varsigma_k=\exp\dfrac{2k\pi i}{p-1}$, $z_k=2^{\frac{1}{p-1}}\exp\dfrac{2k\pi i}{p-1}$ при $k=1,2,\dots,p-2$. Простими обчисленнями знаходимо $\vec{G}(z)\cdot\vec{a}(\varsigma_k)=2-e^{z}+e^{z}-1=1$; $\vec{G}(z)\cdot\vec{a}(z_k)=2-e^{z}+2\left(e^{z}-1\right)=e^{z}$. Звідси бачимо, що $n\left(r,\vec{a}(\varsigma_k),\vec{G}\right)=n\left(r,\vec{a}(z_k),\vec{G}\right)=0$, тобто усі $2(p-1)$ допустимих в $\boldsymbol{C}^p$ векторів $\vec{a}(\varsigma_0),\vec{a}(\varsigma_1),\dots,\vec{a}\left(\varsigma_{p-2}\right)$, $\vec{a}(z_0),\vec{a}(z_1),\dots,\vec{a}\left(z_{p-2}\right)$ є пікаровими і, тим більше, борелевими для цілої кривої вигляду (4).

Нам не вдалося з'ясувати, наскільки точною є теорема 1 при інших $\omega\geq 1$.

Позначимо через $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$ множину усіх борелевих виняткових векторів для цілої кривої $\vec{G}$. Зрозуміло, теорема 1 не дає повного описання структури $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$. Зокрема, очевидно, що для довільних векторів $\vec{a}\notin A_0$ та $\vec{a}'\in A_0$ маємо $\vec{G}(z)\cdot(\vec{a}+\vec{a}')\equiv\vec{G}(z)\cdot\vec{a}$, звідки $N\left(r,\vec{a}+\vec{a}',\vec{G}\right)=N\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)$. Тому, якщо $\vec{a}\in\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$, то й $A\setminus A_0\subset\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$, де A – підпростір із $\boldsymbol{C}^p$ розмірності $\omega+1$, утворений як множина всеможливих лінійних комбінацій вектора $\vec{a}$ з векторами підпростору A_0.

Структуру $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$ для цілої кривої з лінійно незалежними компонентами описано в [5] (теорема 1). Для цілої кривої з лінійно залежними компонентами отримана

Теорема 2. *Для довільної трансцендентної цілої кривої* $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$ *з* ω*-лінійно залежними компонентами множину* $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\cup A_0$ *можна подати у вигляді скінченного об'єднання підпросторів* $A_1,A_2,\dots,A_m$ *із* $\boldsymbol{C}^p$

розмірності $\leq p-1$.

Ця теорема випливатиме з такої леми.

Лема. *Нехай* $\vec{G}$ *– ціла трансцендентна крива в* $\boldsymbol{C}^p$ *,* $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_q$ *– система лінійно незалежних векторів із* $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$*,* B *– лінійна оболонка векторів* $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_q$*. Тоді має місце один з двох випадків: 1)* $B\subset \boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\cup A_0$*; 2) існує скінченна кількість підпросторів* $B_j\subset B$ *,* $j=\overline{1,s}$ *,* $\dim B_j = q-1$*, таких, що* $B\cap \boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\subset \bigcup_{j=1}^{s} B_j$ *.*

Д о в е д е н н я . Розглянемо в $\boldsymbol{C}^q$ вектор-функцію

$$\vec{G}_1(z)=\left(\vec{G}(z)\vec{b}_1\,,\,\vec{G}(z)\vec{b}_2\,,\,\ldots\,,\vec{G}(z)\vec{b}_q\right)\cdot\Phi(z)\,, \tag{5}$$

де $\Phi(z)$ – деяка мероморфна в $\boldsymbol{C}$ функція без нулів, полюсами якої є спільні нулі функцій

$$\vec{G}(z)\vec{b}_1\,,\,\vec{G}(z)\vec{b}_2\,,\,\ldots\,,\vec{G}(z)\vec{b}_q\,. \tag{6}$$

Зрозуміло, що категорія росту $N\left(r,\Phi\right)$ є нижчою за категорію росту $T\left(r,\vec{G}\right)$.

Оскільки ціла крива $\vec{G}$ є з ω-лінійно залежними компонентами, то у випадку $q-1\leq\omega$ може статись, що система функцій (6) є з $\left(q-1\right)$-лінійно залежними компонентами. Тоді, як ми це вказали на початку цієї роботи, існує k та числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$, що для усіх $j=\overline{1,q}$ виконується $\vec{G}(z)\vec{b}_j=\vec{G}(z)\vec{b}_k$, тому для довільного вектора $\vec{b}=\beta_1\vec{b}_1+\beta_2\vec{b}_2+\ldots+\beta_q\vec{b}_q\in B\setminus A_0$ маємо $\vec{G}(z)\vec{b}=\left(\overline{\beta}_1\lambda_1+\overline{\beta}_2\lambda_2+\ldots+\overline{\beta}_q\lambda_q\right)\vec{G}(z)\vec{b}_k$, тобто $N\left(r,\vec{b},\vec{G}\right)=N\left(r,\vec{b}_k,\vec{G}\right)$, отже $\vec{b}\in\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$. Таким чином, ми показали, що якщо система функцій (6) є з $\left(q-1\right)$-лінійно залежними компонентами, то $B\subset\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\cup A_0$.

Тепер розглянемо випадок, коли система функцій (6) є з не більше ніж $\left(q-2\right)$-лінійно залежними компонентами. Позначимо це число ω_1. Отже, (6) є цілою кривою в $\boldsymbol{C}^q$ з ω_1-лінійно залежними компонентами. Позначимо також підпростір $M_0=\left\{\vec{\lambda}\in\boldsymbol{C}^q:\vec{G}_1(z)\vec{\lambda}\equiv 0\right\}$. Зрозуміло, що $\dim M_0=\omega_1$.

Очевидно, для довільного вектора $\vec{\lambda}=\left(\overline{\lambda}_1,\ldots,\overline{\lambda}_q\right)\in\boldsymbol{C}^q\setminus\left\{\vec{0}\right\}$ і відповідного йому вектора $\vec{b}=\lambda_1\vec{b}_1+\ldots+\lambda_q\vec{b}_q$ виконується

$\vec{G}(z)\vec{b}=\vec{G}_1(z)\vec{\lambda}/\Phi(z)$, тому

$$N\left(r,\vec{b},\vec{G}\right)=N\left(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1\right)+N\left(r,\Phi\right). \tag{7}$$

Зауважимо, що категорія росту $T\left(r,\vec{G}_1\right)$ не може перевищувати категорію росту $T\left(r,\vec{G}\right)$, бо

$$T\left(r,\vec{G}_1\right)+N\left(r,\Phi\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{\sum_{j=1}^{q}\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\vec{b}_j\right|^2\right\}^{1/2}d\varphi+O(1)\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{\sum_{j=\omega+1}^{q}\left\|\vec{G}\left(re^{i\phi}\right)\right\|^2\cdot\left\|\vec{b}_j\right\|^2\right\}^{1/2}d\varphi+O(1)=T\left(r,\vec{G}\right)+O(1),\quad r\to\infty.$$

Тому можливі два випадки:

1) категорія росту $T\left(r,\vec{G}_1\right)$ нижча за категорію росту $T\left(r,\vec{G}\right)$;

2) категорія росту $T\left(r,\vec{G}_1\right)$ така ж, як і категорія росту $T\left(r,\vec{G}\right)$.

Розглянемо кожний з цих випадків.

1) Очевидно, $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_q$ – базис в B, тому довільний вектор $\vec{b}\in B\setminus A_0$ можемо подати у вигляді $\vec{b}=\lambda_1\vec{b}_1+\ldots+\lambda_q\vec{b}_q$. Тоді, взявши $\vec{\lambda}=\left(\overline{\lambda}_1,\ldots,\overline{\lambda}_q\right)$, із співвідношення (7) бачимо, що $N\left(r,\vec{b},\vec{G}\right)$ має нижчу категорію за $T\left(r,\vec{G}\right)$, бо $N\left(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1\right)\le T\left(r,\vec{G}_1\right)+O(1)$. Отже, $B\subset\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\cup A_0$.

2) Для кожного з базисних в $\boldsymbol{C}^q$ векторів $\vec{\lambda}^{(1)}=(1,0,\ldots,0)$, $\vec{\lambda}^{(2)}=(0,1,0,\ldots,0)$, $\vec{\lambda}^{(q)}=(0,\ldots,0,1)$, відповідно до рівності (7), маємо $N\left(r,\vec{b}_j,\vec{G}\right)=N\left(r,\vec{\lambda}^{(j)},\vec{G}_1\right)+N\left(r,\Phi\right)$, $j=0,1,\ldots q$. Тому категорія росту кожної з функцій $N\left(r,\vec{\lambda}^{(j)},\vec{G}_1\right)$ нижча за категорію росту $T\left(r,\vec{G}\right)$, а, отже, й за категорію росту $T\left(r,\vec{G}_1\right)$. Це означає, що усі вектори $\vec{\lambda}^{(1)},\ldots,\vec{\lambda}^{(q)}$ є борелевими винятковими для $\vec{G}_1$. Доповнимо ці вектори до максимальної допустимої в $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}_1\right)$ системи. Зрозуміло, ця максимальна допустима в $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}_1\right)$ система векторів буде допустимою в $\boldsymbol{C}^q$. За теоремою 1 вона не може містити більше ніж $(q-\omega_1)(\omega_1+1)$ векторів. Позначимо цю кількість через l, а вектори, якими доповнено до максимальної системи – $\vec{\lambda}^{(q+1)},\vec{\lambda}^{(q+2)},\ldots,\vec{\lambda}^{(l)}$.

Тепер розглянемо всеможливі групи по $q-1$ векторів з системи

$$\vec{\lambda}^{(1)},\ldots,\vec{\lambda}^{(q)},\vec{\lambda}^{(q+1)},\ldots,\vec{\lambda}^{(l)}. \tag{8}$$

Лінійні оболонки кожної з таких груп утворять лінійні підпростори в $\boldsymbol{C}^q$ розмірності $q-1$, які позначимо $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_s$. Зрозуміло, що для усіх векторів $\vec{\lambda}=\left(\overline{\lambda}_1,\ldots,\overline{\lambda}_q\right)\in\Lambda_j$ множина відповідних їм векторів $\vec{b}=\lambda_1\vec{b}_1+\ldots+\lambda_q\vec{b}_q$ утворить підпростір в $\boldsymbol{C}^p$ розмірності $q-1$, який позначимо B_j. Отже, підпросторам $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_s$ в $\boldsymbol{C}^q$ ми поставили у відповідність підпростори $B_1,B_2,\ldots,B_s$ в $\boldsymbol{C}^p$

Покажемо, що обов'язково $B\cap\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\subset\bigcup\limits_{j=1}^{s}B_j$. Припустимо, від супротивного, що існує вектор $\vec{b}_0=\lambda_{01}\vec{b}_1+\ldots+\lambda_{0q}\vec{b}_q\in B\cap\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)$, $\vec{b}_0\notin\bigcup\limits_{j=1}^{q}B_j$. Це означає, що відповідний йому вектор $\vec{\lambda}_0=\left(\overline{\lambda}_{01},\ldots,\overline{\lambda}_{0q}\right)$ не належить жодному з підпросторів B_j, тобто не може бути лінійною комбінацією жодних $q-1$ векторів із максимальної допустимої в $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}_1\right)$ системи векторів (8), тому $\vec{\lambda}_0$ разом з векторами $\vec{\lambda}^{(1)},\ldots,\vec{\lambda}^{(q)},\vec{\lambda}^{(q+1)},\ldots,\vec{\lambda}^{(l)}$ утворить допустиму в $\boldsymbol{C}^q$ систему векторів. Також, відповідно до рівності (7), категорія росту $N\left(r,\vec{\lambda}_0,\vec{G}_1\right)$ не перевищує категорію росту $N\left(r,\vec{b}_0,\vec{G}\right)$, отже, нижча за категорію росту $T\left(r,\vec{G}\right)$, а, значить, нижча і за категорію росту $T\left(r,\vec{G}_1\right)$. Тому $\vec{\lambda}_0\in\boldsymbol{B}\left(\vec{G}_1\right)$. А це протирічить тому, що система векторів (8) є максимальною допустимою в $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}_1\right)$. Отримане протиріччя доводить лему.

Д о в е д е н н я   т е о р е м и 2.

Виберемо максимальну допустиму в $\boldsymbol{C}^p$ систему борелевих винятткових векторів даної цілої кривої. За теоремою 1 таких векторів не більше $(p-\omega)(\omega+1)$.

Якщо кількість цих векторів $k<n$, то розглянемо їхню лінійну оболонку, яку позначимо через A. Зрозуміло, що A є підпростором в $\boldsymbol{C}^p$ розмірності k і $\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\subset A$. За доведеною лемою можливий один з двох випадків.

1) $A\subset\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\cup A_0$, тобто $A=\boldsymbol{B}\left(\vec{G}\right)\cup A_0$. Тим самим теорема доведена.

2) існує скінченна кількість підпросторів $A^{(j)}\subset A$, $j=\overline{1,m_1}$,

$\dim A^{(j)} = k-1$, таких, що $A \cap \boldsymbol{B}(\vec{G}) = \boldsymbol{B}(\vec{G}) \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} A^{(j)}$, тобто $\boldsymbol{B}(\vec{G}) = \bigcup_{j=1}^{m_1} \left(\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A^{(j)} \right)$.

Для тих $A^{(j)}$, для яких $\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A^{(j)} \neq A^{(j)} \setminus A_0$, проведемо такі ж міркування як з A, і отримаємо $\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A^{(j)} = \bigcup_{s=1}^{m_2} \left(\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A^{(js)} \right)$, де $A^{(js)}$ – підпростори розмірності $(k-2)$, отримані з $A^{(j)}$ точно так само, як ми отримали $A^{(j)}$ із A.

На наступному кроці для тих $A^{(js)}$, для яких $\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A^{(js)} \neq A^{(js)} \setminus A_0$, знаходимо $\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A^{(js)} = \bigcup_{i=1}^{m_3} \left(\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A^{(jsi)} \right)$, де $A^{(jsi)}$ – підпростори розмірності $(k-3)$.

Врешті-решт, не більше ніж через $(k-1)$ крок, ми отримаємо $\boldsymbol{B}(\vec{G}) = \bigcup_{j} \left(\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A_j \right)$, де через A_j ми перепозначили ті $A^{(j)}$, $A^{(js)}$, $A^{(jsi)}$, …, які, з врахуванням зробленого вище зауваження, повністю включаються в $\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cup A_0$, отже, $\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cap A_j = A_j \setminus A_0$. Тому

$$\boldsymbol{B}(\vec{G}) \cup A_0 = \bigcup_{j} A_j . \qquad (8)$$

Якщо максимальна допустима в $\boldsymbol{C}^p$ система борелевих виняткових векторів даної цілої кривої з ω-лінійно залежними компонентами містить не менше ніж n векторів, то розглядаємо всеможливі лінійні оболонки із $n-1$ векторів з цієї системи, які позначимо $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k_1)}$. Зрозуміло, що кожна $A^{(j)}$ є лінійним підпростором розмірності $n-1$ і $\boldsymbol{B}(\vec{G}) \subset \bigcup_{j=1}^{k_1} A^{(j)}$. Далі міркуємо так як ми це робили вище і через не більше ніж $n-1$ крок приходимо до рівності (8).
Теорема 2 доведена.

Література

1. Савчук Я.І. Структура множини неванліннівських дефектних векторів для цілих кривих з лінійно залежними компонентами // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2013, №1(21). – с. 20-25.
2. Савчук Я.І. Ціла крива з лінійно залежними компонентами та наперед заданою множиною дефектних векторів // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2014, № 1(25). – с. 26-32.
3. Toda N. Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions algebroides. – Math. Journ., 1970, 22, p. 290-319.

4. A.I. Bandura, Ya.I. Savchuk, Structure of the set of Borel exceptional vectors for entire curves, Matematychni Studii 53 (2020), №1, 41-47. doi: 10.30970/ms.53.1.41-47.
5. Ya.I. Savchuk, A.I. Bandura, Structure of the set of Borel exceptional vectors for entire curves. II Mat. Stud. (2021), Vol. 55 (2), 137-145. doi: 10.30970/ms.55.2.137-145. Scopus (II квартиль).

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.10.2024 р.

BOREL EXCEPTIONAL VECTORS FOR ENTIRE CURVES WITH LINEARLY DEPENDENT COMPONENTS

Ya. I. Savchuk, O. K. Fursenko, N. M. Chernovol
Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University;
61023, Kharkiv, Sumska str., 77/79; ph. +38 (050) 6102842;
e-mail: hnupskafedravm@ukr.net

The paper is devoted to the description of the structure of the set of the Borel exceptional vectors for a transcendental entire curve with linearly dependent components without common zeros. The structure of the set of the Picard and the Borel exceptional vectors for a transcendental p-dimensional integer curve with linearly independent components without common zeros was previously described. In particular, it was established that in a p-dimensional complex space the number of the Borel exceptional vectors admissible in this space can be no more than p. It was proved that the set of the Borel exceptional vectors together with the zero vector is a finite union of subspaces of dimension no higher than p-1 of the p-dimensional complex Euclidean space. In addition, the sum of the dimensions of all these subspaces does not exceed p and any pairwise intersection of these subspaces contains only the zero vector. The set of Picard exceptional vectors has the same structure. It is also known that the structure of the set of Nevanlinna exceptional vectors for a finite-order entire curve with linearly dependent components is similar to that of an ordinary finite-order entire curve.

In the proposed paper, we show that for an integer curve with linearly dependent components, the number of admissible Borel exceptional vectors can be greater than the dimension of the space, but not greater than a certain number, which depends on the dimension of the space and the degree of dependence of the components. It is also proved that the set of the Borel exceptional vectors in combination with the vectors orthogonal to the entire curve and the zero vector can be represented as a finite union of subspaces of dimension no higher than p-1.

Keywords: *entire curve with linearly dependent components, Nevanlinna exceptional vector, valyroid exceptional vector, admissible system of vectors, meromorphic function.*