Алгебра і геометрія

УДК 512.64
DOI: 10.31471/2304-7399-2024-19(73)-57-66

ФАКТОРИЗАЦІЯ СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМНИХ МАТРИЦЬ ЛОРАНА НАД КІЛЬЦЕМ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

М. І. Кучма, В. М. Дільний, О. Г. Орищин
Національний університет "Львівська політехніка"; 79013, вул. Степана Бандери, 12, м. Львів, Україна; e-mail: mariia.i.kuchta@lpnu.ua, volodymyr.m.dilnyi@lpnu.ua, oksana.h.oryshchyn@lpnu.ua

Багато задач в області цифрової обробки сигналів та зв'язку, теорії автоматичного керування, теорії керованих систем скінченного стану, теорії відтворення образів і теорії пристроїв передачі даних можна перетворити на алгебраїчні задачі для поліноміальних матриць Лорана, і вони можуть бути розв'язані за допомогою існуючих алгебраїчних методів. Ефективні алгебраїчні алгоритми, які базуються на перетвореннях поліноміальних матриць Лорана та їх факторизаціях, дозволяють здійснити повний аналіз динаміки системи.

Введене поняття напівскалярної еквівалентності поліномних матриць Лорана і встановлена для них нижня трикутна форма з інваріантними множниками на головній діагоналі, а також отримана умова регуляризації поліноміальних матриць Лорана, дозволяє знайти умови факторизації симетричних матриць Лорана на кільцем поліномів з інволюцією.

У статті розглянуто задачу про факторизації симетричних поліноміальних матриць Лорана над кільцем з інволюцією. Отримано необхідні і достатні умови факторизації таких матриць із регулярним множником з наперед заданою канонічною формою Сміта. Отримано критерій факторизації симетричних поліноміальних матриць Лорана, яка є паралельною до факторизації її форми Сміта.

Ключові слова: *регулярна поліноміальна матриця Лорана, верхній і нижній степінь поліноміальної матриці Лорана, факторизація симетричної поліноміальної матриці Лорана, канонічна форма Сміта, значення матриці на системі коренів діагональних елементів.*

Вступ

Нехай $M_n(\mathbf{C}[x])$ і $M_n(\mathbf{C}[x,x^{-1}])$ – кільце поліноміальних $n \times n$ матриць і кільце поліноміальних $n \times n$ матриць Лорана (кільце квазіполіномних матриць) над полем комплексних чисел $\mathbf{C}$ відповідно, а $GL_n(\mathbf{C}[x])$ і $GL_n(\mathbf{C}[x,x^{-1}])$ їхні відповідні групи оборотних елементів.

Верхнім і нижнім степенем поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ вигляду $A(x)=A_{-l}x^{-l}+\ldots+A_0+\ldots+A_mx^m$, $A_i\in M_n(\mathbf{C})$ називають відповідно числа $m=\overline{\deg}\,A(x)$, якщо $A_m\neq \mathrm{O}$, і $-l=\underline{\deg}\,A(x)=-\overline{\deg}\,A(x^{-1})$, якщо $A_{-l}\neq \mathrm{O}$, де $m\geq -l$, O – нульова матриця. Степенем поліноміальної матриці Лорана $A(x)$ називають число $\deg A(x)=\overline{\deg}\,A(x)-\underline{\deg}\,A(x)$, тобто $s=m+l.$

Надалі розглядатимемо матриці $A(x)$, для яких $\det A(x)\neq 0$. Поліноміальну матрицю Лорана $A(x)=\sum\limits_{i=-l}^{m}A_ix^i$, $A_i\in M_n(\mathbf{C})$ називають регулярною, якщо $\det A_{-l}\neq 0,\ \det A_m\neq 0$.

Матриці над кільцями комплексних та дійсних квазімногочленів з інволюціями різних типів, зокрема факторизація таких матриць вперше вивчались у праці [1]. Використовуючи результати, які стосуються проблеми виділення регулярних множників з поліномних матриць [2], і їх напівскалярної еквівалентності [2], [3], було отримано необхідні та достатні умови існування [4] та єдиності [5], [6] факторизації симетричних матриць над кільцями поліномів з інволюцією.

Формування мети дослідження

Нехай в кільці квазіполіномів

$$\mathbf{C}[x,x^{-1}]=\left\{f(x)=\sum_{i=-l}^{p}a_ix^i,\ a_i\in\mathbf{C}\right\}$$

введена інволюція ∇ одним із таких можливих способів [1]:

$$\begin{aligned}
&(\delta) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p}a_ix^i\right)^{\nabla}=\sum_{i=-l}^{p}\overline{a}_ix^{-i},\\
&(\varepsilon) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p}a_ix^i\right)^{\nabla}=\sum_{i=-l}^{p}\overline{a}_i(-x)^{-i},\\
&(\varsigma) \qquad \left(\sum_{i=-l}^{p}a_ix^i\right)^{\nabla}=\sum_{i=-l}^{p}a_i(-x)^{-i}.
\end{aligned} \tag{1}$$

На кільце матриць $M_n(\mathbf{C}[x,x^{-1}])$ інволюцію ∇ перенесемо так:

$$A(x)^{\nabla}=\left\|a_{ij}(x)\right\|^{\nabla}=\left\|a_{ji}(x)^{\nabla}\right\|.$$

Поліномну матрицю Лорана $A(x)$ називають ∇-симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$.

Очевидно, що кожну таку матрицю $A(x)$ можна зобразити як матричний поліном, який у випадку ∇-симетричності має вигляд

$$A(x) = \sum_{i=-m}^{m} A_i x^i, \quad A_i^{\nabla} = A_i,$$

а ∇ – одна із вказаних в (1) інволюцій.

У праці [7] введене поняття напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць максимального рангу над алгебраїчно замкнутим полем $\mathbf{F}$ характеристики 0 (зокрема, поле комплексних чисел $\mathbf{C}$) і встановлена там нижня трикутна форма матриць зіграли важливу роль у побудові теорії розкладності матричних поліномів на множники. Ці результати пізніше були узагальнені для поліноміальних матриць над довільним полем $\mathbf{F}$ [8, 9], і була встановлена так звана стандартна форма пар матриць відносно узагальненої еквівалентності [9, 10]. У роботі [11] доведено факт напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць Лорана, а в [12] досліджено умови існування симетричної еквівалентності для симетричних матричних поліномів над кільцем з інволюцією.

Введене в [11] поняття напівскалярної еквівалентності поліномних матриць Лорана, отримана умова регуляризації для поліноміальних матриць Лорана в термінах значення матриці на системі коренів елементів діагональної матриці [13] і встановлені необхідні й достатні умови виділення регулярного множника з наперед заданою формою Сміта із неособливої поліноміальної матриці Лорана дозводяють розв'язати питання про факторизацію симетричних поліномних матриць Лорана над кільцем з інволюцією, введеною в [1].

Метою даної роботи є дослідження симетричних поліномних матриць Лорана та отримання умов факторизацій таких матриць над кільцем з інволюцією.

Виклад нових результатів дослідження

Нехай $S_A(x)$ – канонічна форма Сміта поліноміальної матриці Лорана $A(x) \in M_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$:

$$S_A(x) = P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}\,(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \tag{2}$$

де матриці $P(x),\ Q(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$, $\varepsilon_i(x)$ – інваріантні множники, $\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x)\quad i = \overline{1, n-1}$, і $T_A(x)$ – трикутна форма з інваріантними множниками на головній діагоналі щодо напівскалярної еквівалентності:

$$T_A(x) = CA(x)R(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}(x)\varepsilon_1(x) & \varepsilon_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}(x)\varepsilon_1(x) & t_{n2}(x)\varepsilon_2(x) & \dots & \varepsilon_n(x) \end{bmatrix},$$

де $C \in GL_n(\mathbf{C})$, $R(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$, $\deg t_{ij}(x) < \deg \varepsilon_i(x) - \deg \varepsilon_j(x)$, якщо $\deg \varepsilon_i(x) - \deg \varepsilon_j(x) > 0$ і $t_{ij}(x) = 0$, якщо $\deg \varepsilon_i(x) - \deg \varepsilon_j(x) = 0$, $i > j$.

Означення 1 ([13]). Значенням матриці $G(x)$ на системі коренів елементів діагональної матриці $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ називають матрицю вигляду

$$M_{G(x)}(\Phi) = \begin{bmatrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ M_{g_2(x)}(\varphi_2) \\ \dots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{bmatrix},$$

де $M_{g_i(x)}(\varphi_i)$ – значення поліноміальної матриці на системі коренів полінома

$$\varphi_i(x) = (x - \alpha_1)^{s_1}(x - \alpha_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)^{s_m},$$

введене в [2] так:

$$M_{g_i(x)}(\varphi_i) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_m \end{bmatrix}, \qquad H_k = \begin{bmatrix} g_i(\alpha_k) \\ g_i'(\alpha_k) \\ \dots \\ g_i^{(s_k - 1)}(\alpha_k) \end{bmatrix},$$

де $g_i^{(j)}(x)$ – похідні порядку j від рядка $g_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, матриці $G(x)$.

Означення 1 справджується для випадку поліноміальних матриць Лорана $G(x)$ і $\Phi(x)$, зважаючи на те, що елементи вигляду x^l є оборотними в кільці $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ і матриці вигляду Ex^l також оборотні над $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$.

Означення 2 ([2, 14]). Діагональну матрицю $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ називають d-матрицею, якщо $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = \overline{1, n-1}$.

Нехай $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) - d$-матриця, яка є дільником форми Сміта $S_A(x)$ поліноміальної матриці Лорана $A(x)$. Через

$$V(\Phi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dfrac{\varphi_2 k_{21}}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\varphi_n k_{n1}}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} & \dfrac{\varphi_n k_{n2}}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} & \dots & \dfrac{\varphi_n k_{nn-1}}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

позначимо матрицю, породжену d-матрицею $\Phi(x)$, у якій $(\varphi_i,\varepsilon_j)$ – найбільший спільний дільник квазіполіномів $\varphi_i(x)$ і $\varepsilon_j(x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $i\geq j$,

$$k_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{якщо } (\varphi_i,\varepsilon_j)=\varphi_j, \\ k_{ij_{h_{ij}}}x^{-h_{ij}}+\ldots+k_{ij_1}x^{-1}+k_{ij_0}, & \text{якщо } (\varphi_i,\varepsilon_j)\neq\varphi_j, \end{cases}$$

$h_{ij}=\deg\dfrac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varphi_j}-1$, $i=\overline{2,n}$, $j=\overline{1,n-1}$, $i>j$, k_{ij_s} – попарно різні змінні величини, які приєднуються до поля $\mathbf{C}$, $s=0,1,\ldots,h_{ij}$ [2].

Сформулюємо один з результатів [11], що стосується факторизації поліноміальної матриці Лорана.

Теорема 1. Нехай $\Phi(x)$ – d-матриця, $\deg\det\Phi(x)=nr$ і $\Phi(x)$ є дільником форми Сміта $S_A(x)$ матриці $A(x)\in M_n(\mathbf{F}[x,x^{-1}])$. Для матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x)=K(x)L(x)$, в якій $K(x)$ – регулярна поліноміальна матриця Лорана степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, а $L(x)$ – неособлива поліноміальна матриця Лорана, тоді тільки тоді, коли

$$\det M_{V(\Phi)P(x)\left\| E\,x^{-r+1},\ldots,\,Ex^{-1},\,E\right\|}(\Phi)\neq 0, \tag{4}$$

де матриці $P(x)\in GL_n(\mathbf{F}[x,\,x^{-1}])$ і $V(\Phi)$ відповідно із співвідношень (2) і (3).

Теорема 2. Нехай $\Phi(x)$ – d-матриця, $\deg\det\Phi(x)=nr$ і $\Phi(x)$ є дільником форми Сміта $S_A(x)$ симетричної матриці $A(x)\in M_n(\mathbf{C}[x,x^{-1}])$. Для матриці $A(x)$ існує факторизація

$$A(x)=B(x)C(x)B(x)^{\nabla}, \tag{5}$$

в якій $B(x)$ – регулярна поліноміальна матриця Лорана степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C(x)$ – неособлива поліноміальна матриця Лорана, тоді тільки тоді, коли ∇-симетрична матриця

$$V(\Phi)P(x)A(x)P(x)^{\nabla}V(\Phi)^{\nabla}$$

одночасно ділиться зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$ при деяких значеннях параметрів k_{ijs} матриці $V(\Phi)$ із (3), для яких виконується умова (4).

Доведення. Необхідність. Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація (5). Спираючись на результати із [11] існують матриці $C \in GL_n(\mathbf{C})$ і $Q(x)$, $Q_1(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ такі, що

$$CA(x)Q(x) = T_A(x) = T(x)S_A(x), \tag{6}$$

$$CB(x)Q_1(x) = T_B(x) = T_1(x)\Phi(x), \tag{7}$$

де $T(x)$ і $T_1(x)$ – нижні унітрикутні оборотні над $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ матриці.

Враховуючи (5) і (6), одержимо рівність

$$CA(x)Q(x) = CB(x)Q_1(x)Q_1(x)^{-1}C(x)[Q_1(x)^{\nabla}]^{-1}Q_1(x)^{\nabla}B(x)^{\nabla}C^{\nabla}[C^{\nabla}]^{-1}Q(x),$$

яку запишемо у вигляді

$$CA(x)C^{\nabla} = T_1(x)\Phi(x)H(x)\Phi(x)^{\nabla}T_1(x)^{\nabla}$$

або

$$CA(x)C^{\nabla} = T_B(x)H(x)T_B(x)^{\nabla}, \tag{8}$$

де $H(x) = Q_1(x)^{-1}C(x)[Q_1(x)^{\nabla}]^{-1}$ – ∇-симетрична матриця.

Домноживши одержану рівність (8) зліва і справа на оборотні над $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ відповідно матриці $T(x)^{-1}$ і $[T(x)^{\nabla}]^{-1}$, отримуємо

$$T(x)^{-1}CA(x)C^{\nabla}[T(x)^{\nabla}]^{-1} = T(x)^{-1}T_B(x)H(x)T_B(x)^{\nabla}[T(x)^{\nabla}]^{-1}. \tag{9}$$

Легко бачити, що матриця $T(x)^{-1}C = P(x)$ буде лівою перетворюючою матрицею до форми Сміта $S_A(x)$ матриці $A(x)$.

Оскільки для $A(x)$ існує факторизація (5), то це означає, що з матриці $A(x)$ виділяється регулярний множник $B(x)$ степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$. Інакше кажучи, виконується умова (4), тобто матриця $P(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ при деяких значеннях k_{ijs} правоеквівалентна до регулярної матриці $B(x)$. Тому існує оборотна над $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ матриця $R(x)$ така, що

$$P(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x)R(x) = B(x), \tag{10}$$

де матриця $V(\Phi)$ із (3).

З рівностей (7) і (10), одержимо співвідношення

$$C^{-1}T_1(x)\Phi(x)Q_1(x)^{-1} = P(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x)R(x),$$

яке, домноживши справа на $Q_1(x)$ і зліва на $T(x)^{-1}C = P(x)$, перетворимо до вигляду

$$T(x)^{-1}T_1(x)\Phi(x) = V(\Phi)^{-1}\Phi(x)R(x)Q_1(x). \qquad (11)$$

Тепер, зважаючи на (11) і вигляд матриці $H(x)$, співвідношення (9) матиме вигляд

$$P(x)A(x)P(x)^{\nabla} = V(\Phi)^{-1}\Phi(x)R(x)C(x)R(x)^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}[V(\Phi)^{\nabla}]^{-1}. \qquad (12)$$

Позначимо $R(x)C(x)R(x)^{\nabla} = W(x)$. Очевидно, що $W(x) \in M_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ є ∇-симетричною матрицею.

Отже, з рівності (12) одержуємо одночасну подільність матриці $V(\Phi)P(x)A(x)P(x)^{\nabla}V(\Phi)^{\nabla}$ зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$.

Достатність. Нехай

$$V(\Phi)P(x)A(x)P(x)^{\nabla}V(\Phi)^{\nabla} = \Phi(x)W(x)\Phi(x)^{\nabla}. \qquad (13)$$

На підставі теореми 1 матриця $P(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x)$ правоеквівалентна до регулярної поліномної матриці Лорана $B(x)$ степеня r, тобто $P(x)^{-1}V(\Phi)^{-1}\Phi(x) = B(x)S(x)$, де $S(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$. Тому з рівності (13) отримуємо

$$A(x) = B(x)S(x)W(x)S(x)^{\nabla}B(x)^{\nabla},$$

де $C(x) = S(x)W(x)S(x)^{\nabla}$, очевидно, є ∇-симетричною матрицею.

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай $\Phi(x)$ $-d$-матриця, $\deg\det\Phi(x) = nr$ і форма Сміта $S_A(x)$ матриці $A(x) \in M_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ зображається у вигляді

$$S_A(x) = \Phi(x)D(x)\Phi(x)^{\nabla}. \qquad (14)$$

Для матриці $A(x)$ існує факторизація (5), в якій $B(x)$ є регулярною поліноміальною матрицею Лорана степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C(x)$ – неособливою поліноміальною матрицею Лорана з формою Сміта $D(x)$, тоді і тільки тоді, коли $\det M_{P(x)\|Ex^{-r+1},\ldots,Ex^{-1},E\|}(\Phi) \neq 0$, де матриця $P(x) \in GL_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ із співвідношення (2).

Доведення випливає з теореми 2. Зважаючи на те, що виконуються умови $(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j$ для $i = \overline{2,n}$, $j = \overline{1,n-1}$, $i > j$, тому матриця $V(\Phi) = E$ у співвідношенні (3).

Означення 3. Факторизацію (5) поліноміальної матриці Лорана $A(x)$, канонічна форма Сміта якої дорівнює добутку форм Сміта її співмножників, називають паралельною до факторизації її форми Сміта (14).

Теорема 4. У факторизації $A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}$ ∇-симетричної матриці $A(x) \in M_n(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ регулярний множник $B(x)$ єдиний з формою Сміта $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$, тоді і тільки тоді, коли форма Сміта матриці $A(x)$ дорівнює добутку форм Сміта її співмножників.

Доведення випливає з теореми 5 роботи [11] та врахуванням теореми 3 даної роботи.

Висновки

Отримані результати дослідження задач факторизації симетричних поліноміальних матриць можуть бути використані у сфері цифрової обробки сигналів та зв'язку [15, 16]. Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць Лорана [11] і факторизації таких матриць, а також ефективні алгоритми, засновані на перетвореннях поліноміальних матриць Лорана, дозволяють розширити алгебраїчний інструмент для дослідження повного аналізу динаміки системи [17].

Література

1. Любачевский Б.Д. Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирский мат. журн. 1973. – **14,** № 2 – С. 337-356.
2. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
3. Казімірський П.С., Петричкович В.М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диф. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61-66.
4. Зеліско В.Р., Кучма М.І. Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи і фіз.- мех. поля. 1997. – **40**, № 4 – С. 91-95.
5. Зеліско В.Р. Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1988. – Вип. **30** – С. 36-38.
6. Зеліско В.Р. Матриці та матричні рівняння над кільцями многочленів з інволюцією // Прикл. проблеми мех.і мат. 2010. – Вип. **8** – С. 18-22.
7. Казімірський П.С., Петричкович В.М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. 1977. – С. 61-66.
8. Петричкович В.М. О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1987. – Вип. 25. – С. 13-16.
9. Petrychkovych V. Generalized equivalence of pair of matrices // Linear Multilinear Algebra, 2000. – 48. – P. 179-188.

10. Petrychkovych V. Standart form of pair of matrices with respect to generalized equivalence // Visnyk Lviv. Univ. 2003. – 61. – P. 153-160.
11. Kuchma M.I., Gatalevych A.I. Triangular form of Laurent polynomial matrices and their factorization // Mathematical modelling and computing, 2022. – 9. No. 1, P. 119-129.
12. Кучма М.І. Симетрична еквівалентність матричних многочленів і виділення спільного унітального дільника із матричних многочленів // Укр. матем. журн. 2001. Т. 53. № 2. – С. 211-219.
13. Зеліско В.Р., Щедрик В.П. Матриця значень на системі коренів діагональних елементів елементів матриці та її застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – **48,** № 4 – С. 20-29.
14. Казимирский П. С., Щедрик В. П. О решениях матричных многочленных односторонних уравнений // Доклади АН СССР. 1989. – 304, №2. – С. 271-274.
15. Foster J.A., McWhirter J.G., Davies M.R., Chambers J.A. An algorithm for calculating the QR and singular value decompositions of polynomial matrices // IEEE Trans. Signal Process. 2010. – 58(3). – P. 1263-1274.
16. Park H. Symbolic computation and signal processing, Journal of Symbolic Computation // 2004. – 37. – P. 209-226.
17. Kaczorek T. Polynomial and Rational Matrices: Applications in Dynamical System. Theory, Commun. and Control Eng. Ser. London (UK). 2007.

Стаття надійшла до редакційної колегії 11.10.2024 р.

FACTORIZATION OF LAURENT SYMMETRIC POLYNOMIAL MATRICES OVER THE RING WITH INVOLUTION

M. I. Kuchma, V. M. Dilnyi, O. H.Oryshchyn

Lviv Polytechnic National University; 79013, 12 Stepana Bandery St., Lviv, Ukraine; e-mail: mariia.i.kuchma@lpnu.ua, volodymyr.m.dilnyi@lpnu.ua, oksana.h.oryshchyn@lpnu.ua

Many problems in the fields of digital signal processing and communication, automatic control theory, theory of finite-state controlled systems, theory of image reproduction, and theory of data transmission devices can be converted into algebraic problems for Laurent polynomial matrices and can be solved using existing algebraic methods. Effective algebraic algorithms, which are based on elementary transformations of Laurent polynomial matrices and their factorizations, allow a complete analysis of system dynamics.

The introduced concept of semiscalar equivalence of Laurent polynomial matrices and the established lower triangular form with invariant factors on the main diagonal for them, as well as the obtained condition for *regularization of Laurent polynomial matrices, allows us to find conditions for the factorization of symmetric Laurent matrices on the ring of polynomials with involution.*

The article deals with the problem of factorization of symmetric Laurent polynomial matrices over a ring with involution. Necessary and sufficient conditions for the factorization of such matrices with a regular factor with a predefined canonical Smith form were obtained. A criterion for the factorization of Laurent symmetric polynomial matrices is obtained, which is parallel to the Smith factorization of its form.

Keywords: *regular Laurent polynomial matrix, the upper and lower degrees of Laurent polynomial matrix, factorization of Laurent symmetric polynomial matrix, Smith normal form, matrix values on the system of roots of diagonal elements.*